Manuel Coveñas Naquiche
1
MATEMATICA
1

MATEMÁTICA 1

EDICIÓN 1 998

Manuel Coveñas Naquiche
1
MATEMATICA
1

MATEMÁTICA 1

I.S.B.N. 84-8389-962-0

DISTRIBUIDORA COVEÑAS E.I.R.L.
Jirón Las Verdolagas N°199 Urbanización
Micaela Bastidas Telf.s: 486-7957; 521-0949
Los Olivos, Lima.

IMPRESO EN EL PERÚ/*PRINTED IN PERU*

Presentación

***"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"***

Estas coplas, en las que el vate Antonio Machado expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de ***Manuel COVEÑAS NAQUICHE****, con justicia* ***"el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas"*** *por su prolífica producción bibliográfica en el área didáctica- en esta no fácil ciencia formal.*

En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, ¡innatas en él!, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: ***¡EL MAESTRO DE AULA!****, con quien está en permanente contacto.*

Con ocasión de esta segunda edición -ampliada y corregida de sus textos de ***MATEMÁTICAS****, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:*

- ***Una exposición teórica sencilla****, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...*
- ***Ejemplos resueltos*** *en orden de dificultad progresiva y con...*
- ***Talleres*** *para cada capítulo, a desarrollarse en clase, ¡mejor si es a nivel grupal!, motivando así la participación activa de los educandos.*

No contento con esto, añade:

- ***Ejercicios de reforzamiento*** *en dos niveles, según el grado de dificultad y,*
- ***Propuesta de Olimpíadas Matemáticas****, con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos impartidos en cada unidad temática.*

Como pueden apreciar amigos/as lectores/as, estos textos se convierten en un material de invalorable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las ***Matemáticas****, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.*

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE

TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 IDEA DE CONJUNTO

Es indudable que la palabra **"Conjunto"** se utiliza con mucha frecuencia en el Lenguaje más corriente como vamos a ver ahora mismo. Es pues conveniente, que nos habituemos a emplearla con naturalidad.

*Hay muchas palabras que se ofrecen como **Sinónimo** de **Conjunto**. Así en vez de conjunto se dice a veces, **colección, familia, clase, equipo**, y todavía más palabras.*

*NOTA METODOLÓGICA: Será bueno notar que la palabra **"Conjunto"** sirve para todos los casos y las otras no. No se puede decir en mi colegio hay una **"colección"** de profesores; ni se puede decir en mi biblioteca hay una **"familia"** de libros, ni tampoco se puede decir en la sala de mi casa hay un **"equipo"** de espejos. En cambio, la palabra **"Conjunto"** viene bien en todos esos casos. Por eso se dice que tiene un sentido **más general** que las otras; y de aquí su utilidad en la Matemática.*

1.1.1 ELEMENTOS DE UN CONJUNTO: Cuando se piensa en un conjunto de COSAS; estas cosas, son los **"elementos"** del conjunto. De este modo:

1. La letra **a** es un elemento del conjunto "VOCALES DEL CASTELLANO"
2. Todo **tigre** es un elemento del conjunto "FIERAS"
3. El número **4** es un elemento del conjunto "NUMEROS NATURALES"

La palabra **"elemento"** se cambia a veces por SINÓNIMOS (en verdad menos generales) como **socio, miembro, componente** y otros. Por ejemplo: Manuel es **socio** del club Universitario de Deportes, Felipe es **miembro** del Jurado Nacional de Elecciones. Pero nosotros utilizaremos casi siempre la palabra **"elemento"** como se acostumbra en Matemática.

1.1.2 NOTACIÓN DE UN CONJUNTO: En general los conjuntos se denotan por letras mayúsculas: **A, B, C, ... X, Y, Z,** y los elementos se denotan por letras minúsculas: **a, b, c, ... x, y, z.** Se acostumbra a escribir los elementos de los conjuntos entre llaves y separados por comas.

Ejemplo (1): A = {a, b, c, d, e};

este conjunto se lee: "Conjunto A cuyos elementos son: a, b, c, d y e"

Ejemplo (2): B = {1, 2, 3, 4, 5, 6};

este conjunto se lee: "Conjunto B cuyos elementos son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6"

1.1.3 RELACIÓN DE PERTENENCIA

La palabra **"pertenece a"**, que significa lo mismo que **"es elemento de"**, debe usarse muchas veces en el estudio de los conjuntos. Por esta razón se decide representarla por un signo sencillo, que es "∈" este signo se lee de cualquiera de los modos que acabamos de poner entre comillas, utilizando este signo "∈" en los ejemplos que hemos dado pueden escribir con más brevedad y para que así se vea repetimos aquí algunos de ellos, y añadimos otros:

a ∈ "Vocales del Castellano"
6 ∈ "Números pares"
Tigre ∈ "fieras"
Δ ∈ "Triángulos"

1.1.4 LA NEGACIÓN: En matemáticas suele expresarse la negación tachando con **/** el signo afirmativo.

Por ejemplo, como **"="** significa **"igual a"** tendremos: $2 + 1 = 3$; $2 + 3 \neq 8$; $6 \neq 7$ ($\neq$ se lee **"no es igual a"**). De este modo volviendo a los conjuntos, aparece el signo ∉:

que nos dicen:	b ∉ "Vocal"	;	caballo ∉ "fieras"
	b no es una vocal	;	el caballo no es una fiera.

Observación: *La relación de pertenencia sólo se establece entre un elemento y un conjunto.*

Ejemplo: P = {a, b, 5, {d, e}, 9} Diremos: a ∈ P **(verdadero)** ; {d, e} ∈ P **(verdadero)**
b ∈ P **(verdadero)** ;
5 ∈ P **(verdadero)** ; 9 ∈ P **(verdadero)**

Problema: Se tiene el siguiente conjunto B = {1, {2, 3}, 4, 5, {6}}, señalar con **V** si la proposición es verdadera o con **F** si la proposición es falsa.

I. 1 ∈ B ......
II. 4 ∈ B ......
III. 6 ∈ B ......
IV. {2, 3} ∉ B ......
V. 5 ∉ B ......
VI. {6} ∈ B ......

Resolución:

I. 1 ∈ B ...... **(V)**
II. 4 ∈ B ...... **(V)**
III. 6 ∈ B ...... **(F)**
IV. {2, 3} ∉ B ...... **(F)**
V. 5 ∉ B ...... **(F)**
VI. {6} ∈ B ...... **(V)**

Observación: *La relación de pertenencia se utiliza entre elemento y conjunto.*

1.2 DETERMINACIÓN O DESIGNACIÓN DE CONJUNTOS

Un conjunto puede determinarse de dos formas: Por **Extensión** y por **Comprensión.**

1.2.1 DETERMINACIÓN POR EXTENSIÓN: Consiste en la enumeración efectiva de todos sus elementos, es decir se nombra uno a uno sus elementos.

Ejemplo (1): A = El conjunto de los Números Naturales menores que 8

Por extensión: A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Ejemplo (2): B = El conjunto de los Números impares menores o iguales que 9.

Por extensión: B = {1, 3, 5, 7, 9}

1.2.2 DETERMINACIÓN POR COMPRENSIÓN: Para expresar un conjunto de ésta manera se señala una propiedad común a todos los elementos.
A ésta manera de nombrar un conjunto se denomina también forma abreviada o sintética de determinar un conjunto.

Ejemplo Modelo: *Si un conjunto Q se ha determinado por Comprensión, mediante el uso de la propiedad **X**, aplicado a sus elementos, dicho conjunto se menciona así:*

*"Q es el conjunto de las **Y** tal que (/) tiene la propiedad **X**"*

***Y** → se llama variable que va a tener cualquier valor de algún elemento del conjunto.*

*"**Tal que**" (/) es una barra oblicua.*

Ejemplo (1): T = El conjunto de los Números naturales menores que 100.

Por Comprensión: $T = \{x/x \in IN; x < 100\}$

Ejemplo (2): S = El conjunto de los Números naturales cuyos cuadrados son menores que 82.

Por Comprensión: $S = \{x/x \in IN; x^2 < 82\}$

Recuerda que:

IN = {Conjunto de los Números Naturales} = {0, 1, 2, 3, 4 ......}

1.3 CLASES DE CONJUNTOS

De acuerdo al Número de sus elementos, se clasifican en:

1.3.1 CONJUNTO VACÍO O NULO: Es aquel que no tiene elementos, se denota por la letra griega "ϕ" (se lee: = fi), también se denota por: "{ }"

Ejemplos:

1 A = {x/x es un virrey actual del Perú}
A = ϕ ó A = { }.

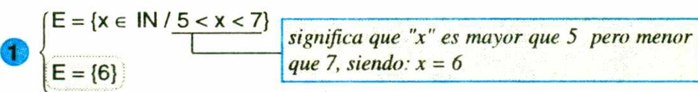
es vacío porque no existe virrey en la actualidad en el Perú.

2 B = {y/y es un número entero comprendido entre 12 y 13}
B = ϕ ó B = { }.

es vacío porque no existe número entero entre 12 y 13.

1.3.2 CONJUNTO UNITARIO: Es aquel que tiene uno y sólo un elemento.

Ejemplos:



1 $E = \{x \in IN / 5 < x < 7\}$
E = {6}

significa que "x" es mayor que 5 pero menor que 7, siendo: x = 6

2 F = {x/x = 8}
F = {8}

3 L = {x/x es la capital del Perú}
L = {Lima}

1.3.3 CONJUNTO FINITO: Es aquel que tiene una cantidad **determinada** de elementos.

Ejemplos: P = {2, 3, 7, 8, 9, 12} Q = {x/x es una letra del abecedario}

1.3.4 CONJUNTO INFINITO: Es aquel que tiene una cantidad **ilimitada** de elementos y cuyo último elemento no se puede señalar.

Ejemplos: R = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

*Los **puntos suspensivos** significan que siguen los elementos y como la numeración es ilimitada, **R** es un conjunto infinito.*

S = {x/x es una estrella del firmamento}

Nota: En la Matemática Moderna se utiliza una serie de nuevos símbolos tomados de la lógica formal o Lógica Matemática y que iremos aplicándolos gradualmente. Recordar siempre que los símbolos lógicos son abreviaturas de expresiones matemáticas bien definidas.

Ejemplos:

SÍMBOLO LÓGICO	
⇒	Se lee: **"Entonces"**
⇔	Se lee: **"Si y sólo si"**
∀	Se lee: **"Para todo"**

Recordar que:

> Significa "mayor que"

< Significa "menor que"

Ejemplo: A = {x/x es un número natural < 7}

Luego, diremos que: A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

1 es un número natural ⇒ 1 ∈ A ; 2 es un número natural ⇒ 2 ∈ A

1.3.5 CONJUNTOS IGUALES: Un conjunto "A" es igual a un conjunto "B", si es que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Es decir: A = B ⇔ A ⊂ B ó B ⊂ A

Ejemplo (1):

A = {3, 5, 8}
B = {8, 5, 3}
} A = B

Los dos conjuntos A y B si son iguales pues tienen los mismos elementos; entonces:
A ⊂ B ("A" está contenido en "B") ó
B ⊂ A ("B" está contenido en "A")

Ejemplo (2): El conjunto A = {x ∈ IN/2 < x < 6} es igual al conjunto B = {x ∈ IN/3 ≤ x ≤5}?

Resolución:

Del conjunto "A": A = {x ∈ IN/2 < x < 6}; "x" toma los valores de 3, 4 y 5.

A = {3, 4, 5}

2 < x < 6; significa que "x" es mayor que 2, pero menor que 6.

Del conjunto "B": B = {x ∈ IN/3 ≤ x ≤ 5}; "x" toma los valores de 3, 4, y 5.

B = {3, 4, 5}

$3 \leq x \leq 5$; significa que "x" es mayor o igual que 3; pero menor o igual que 5.

Luego:

Los conjuntos A y B son iguales (A = B)

Ejemplo (3): El conjunto $S = \{x \in IN / 4 \leq x < 8\}$; es igual al conjunto $R = \{x \in IN / 3 < x < 7\}$

Resolución:

Del Conjunto "S": $S = \{x \in IN / 4 \leq x < 8\}$; "x" toma los valores de 4, 5, 6 y 7.

S = {4, 5, 6, 7}

$4 \leq x < 8$; significa que "x" es mayor o igual que 4, pero menor que 8.

Del conjunto "R": $R = \{x \in IN / 3 < x < 7\}$; "x" toma los valores 4, 5, y 6.

R = {4, 5, 6}

$3 < x < 7$; significa que "x" es mayor que 3, pero menor que 7.

Luego:

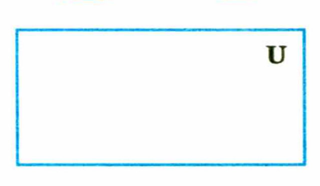
Los conjuntos S y R no son iguales ($S \neq R$)

1.3.6 CONJUNTOS DISJUNTOS: Son aquellos conjuntos, que no tienen ningún elemento común.

Ejemplo (1): Sea: A = {x/x es un hombre americano}
B = {x/x es un hombre europeo}

A y B son disjuntos; pues un hombre no puede ser al mismo tiempo americano y europeo.

Ejemplo (2): Sean los conjuntos: A = {2, 4, 6, 8} ; B = {1, 3, 5, 7, 9} ; A y B son disjuntos; pues no tienen ningún elemento en común.
Usando los Diagramas de **Venn - Euler**, se tiene:



1.3.7 CONJUNTO UNIVERSAL (U): Es el conjunto que contiene, comprende ó dentro del cual están todos los demás conjuntos; se le simboliza por la letra **U** y gráficamente se le representa mediante un rectángulo en cuyo vértice (uno cualquiera) se coloca la letra **U**.

U

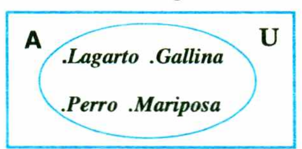
El conjunto de libros de una biblioteca, puede ser un ejemplo de conjunto Universal, sus elementos serán cada uno de los libros de los que consta. El marco de referencia es relativo, de modo que podemos referir como Conjunto Universal por ejemplo al conjunto de bibliotecas de la ciudad.

Ejemplo: Sea el conjunto: A = {gallina, perro, lagarto, mariposa}

Representación usando Diagrama de Venn - Euler.

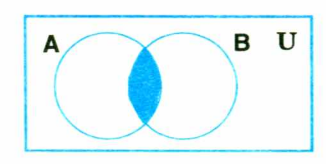
Su Universo o conjunto Universal será:

U = {todos los seres animales}



1.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN CONJUNTO

1.4.1 DIAGRAMA DE VENN - EULER: Consiste en representar el **Conjunto Universal** mediante un rectángulo y los otros conjuntos mediante círculos, triángulos o cualquier figura plana.



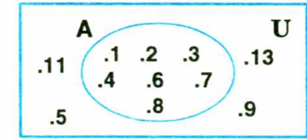
Ejemplo: Representar gráficamente

A = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}

9 ∉ A ; 5 ∉ A

11 ∉ A ; 13 ∉ A

Gráficamente:



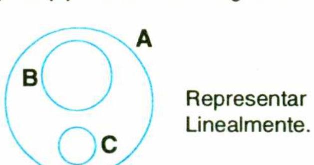
1.4.2 DIAGRAMAS LINEALES: Sirven para representar las relaciones de **Inclusión** de 2 ó más conjuntos. Se representa por medio de segmentos verticales.

Ejemplos (1): S = {a, b, c, d, e}, T = {b, c} ➡ T está incluido en S.

Al utilizar los Diagramas lineales tendremos:

S
|
T

Ejemplos (2): Si se tiene el gráfico:



Representar Linealmente. ➡

Resolución:
Su representación lineal será:

1.5 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

1.5.1 INCLUSIÓN O SUBCONJUNTOS: Se dice que el conjunto A es parte del conjunto B, o que está incluido en B, si todos los elementos de A están en B. Se le denota como "A ⊂ B" que se lee: "**A incluido en** B"

Es decir: $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$

Se acostumbra también a leerse como que A está **contenido** o es **subconjunto** de B y en el caso que se denote como $B \supset A$, se lee: "B contiene o incluye al conjunto A".

Ejemplo (1) : Sean los conjuntos: $A = \{a, 2, b, 3\}$ y $B = \{a, b, c, 2, 3, 5\}$

En estos dos conjuntos podemos notar que todos los elementos de A pertenecen también a B. Entonces concluimos diciendo que: $A \subset B$

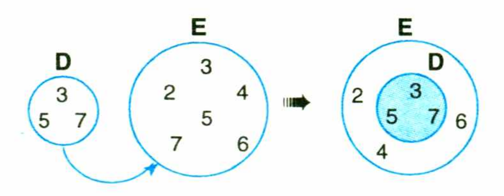
Ejemplo (2) : Sean los conjuntos: $D = \{3, 5, 7\}$ y $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Resolución:

Se observa que: **"D"** es subconjunto de **"E"** porque todos los elementos de **"D"** pertenecen también a **"E"**.
Simbólicamente lo expresamos así: $D \subset E$

Se lee: "D" está incluido en "E" ; "D" está contenido en "E",
"D" es subconjunto de "E" o "D" es parte de "E".

Representación usando Diagramas de **Venn - Euler.**



Observación: *La relación de **inclusión** se utiliza entre conjuntos y no entre elemento y conjunto.*

Ejemplo (3) : Sean los conjuntos: $A = \{1, 3, 4, 5\}$ y $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

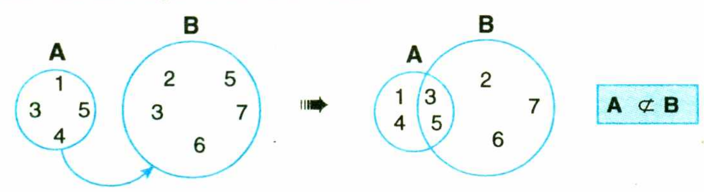
Resolución:

"A" no es subconjunto de "B", porque no todos los elementos de "A" pertenecen a "B", es decir : $4 \in A$ pero $4 \notin B$

Simbólicamente lo expresamos así: $A \not\subset B$

Se lee: "A" no está incluido en "B", "A" no está contenido en "B"
"A" no es subconjunto de "B" ó "A" no es parte de "B".

Representación usando Diagrama de **Venn - Euler.**



1.5.2 PROPIEDADES DE INCLUSIÓN

1º **Propiedad:** Todo conjunto es subconjunto de si mismo. ➠ $A \subset A$

2º **Propiedad:** El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. ➠ $\phi \subset A$

3º **Propiedad:** Si un conjunto está incluido en otro, y éste en un tercero, entonces el primer conjunto está incluido en el tercer conjunto. Si: ➠ $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

1.5.3 SUBCONJUNTO PROPIO:
Si un conjunto "A" es un subconjunto de otro conjunto "B", y este otro conjunto "B" tiene uno ó más elementos que no pertenecen al subconjunto "A", se dice que: "A" es parte propia o subconjunto propio de "B".

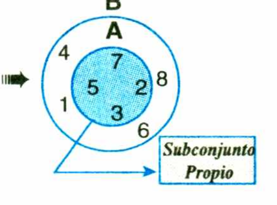
Ejemplo: Dados los conjuntos:

$A = \{2, 7, 5, 3\}$ y

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

"A" es un subconjunto propio de "B"

Representación usando Diagramas de **Venn - Euler.**



1.5.4 CONJUNTOS COMPARABLES:
Dos conjuntos A y B son comparables si y sólo si $A \subset B$ ó $B \subset A$. Es decir cuando uno de los conjuntos está incluido en el otro.
En el caso que: $A \not\subset B$ ó $B \not\subset A$ entonces estos dos conjuntos son **no comparables.**

Ejemplo (1): Si: $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$

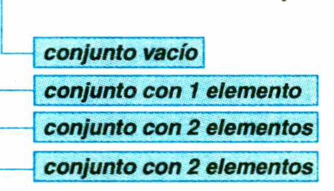
El conjunto "A" es comparable con "B" porque: $A \subset B$.

Ejemplo (2): Si: $S = \{7, 2, 1, 3, 5\}$ y $T = \{7, 2, 4\}$

Los conjuntos no son comparables, pues: $S \not\subset T$; ni $T \not\subset S$.

1.5.5 FAMILIA DE CONJUNTOS O CONJUNTO DE CONJUNTOS:
Es aquel conjunto, cuyos elementos son también conjuntos. Si un conjunto tiene algunos elementos que son conjuntos y otros que no lo son; éste conjunto no es una familia de conjuntos.

Ejemplo (1): $A = \{\{2, 3\}, \{5, 2\}, \{7\}, \phi\}$; ***Si es una familia de conjuntos,*** *porque todos sus elementos son conjuntos.*



Ejemplo 2: B = {{2, 3}; {5, 2} ; 7, ϕ};

*No es **una familia de conjuntos,** porque tiene un elemento que no es conjunto.*

Este elemento no es conjunto, para que sea conjunto tiene que estar entre llaves o sea: {7}

1.5.6 CONJUNTO POTENCIA: Es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado, si el conjunto dado es "A", el Conjunto Potencia de "A" se denota por P(A) y; se lee: "P de A".

Ejemplo (1): Si: A = {5} ; los subconjuntos que se forman son:
P(A) = {{5} , ϕ} ; recordar que el conjunto ϕ es subconjunto de cualquier conjunto.

El número de subconjuntos del conjunto: A = {5}; se obtiene: $2 = 2^1$ subconjuntos.

Ejemplo (2): Si: B = {a, b} ; los subconjuntos que se forman son: P(B) = {{a} , {b}, {a,b}, ϕ}

El número de subconjuntos del conjunto: B = {a, b}; se obtienen: $4 = 2^2$ subconjuntos.

Ejemplo (3): Si: C = {5, 2, 7}; los subconjuntos que se forman son:
P(C) = {{5}, {2}, {7}, {5, 2}, {5, 7}, {2, 7}, {5, 2, 7}, ϕ}

El número de subconjuntos del conjunto C = {5, 2, 7}, se obtienen: $8 = 2^3$ subconjuntos.

- ***Por Inducción Matemática:***

Si el conjunto "A" tiene 1 elemento: P(A) = 2^1 subconjuntos.
Si el conjunto "A" tiene 2 elementos: P(A) = 2^2 subconjuntos.
Si el conjunto "A" tiene 3 elementos: P(A) = 2^3 subconjuntos.
: :
: :

- ***Generalizando:*** Si el conjunto "A" tiene "n" elementos: P(A) = 2^n subconjuntos.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS

Ejercicio 1 : Dado los conjuntos:

A = {x/7 < x < 9; "x" es número natural}
B = {x/x + 5 = 11; "x" es número natural}

De ellos cuál o cuáles son unitarios.

A) A **B)** B **C)** A y B
D) Nulos **E)** N.A.

Resolución:

- Del conjunto A:
  A = {x/7 < x < 9; "x" es número natural}
  "x" toma valor de 8.

  Donde:

  A = {x} = {8} **(Es un conjunto unitario)**

- Del conjunto B:
  B = {x/x + 5 = 11; "x" es número natural}
  "x" toma valor de 6.

  Donde:

  B = {x} = {6} **(Es un conjunto unitario)**

Los dos conjuntos (A y B) son unitarios **Rpta. C**

Ejercicio 2: Si: A = {x/"x" es un número natural mayor que 2}
B = {x/"x" es un país} C = {x/"x" es una fruta}

De ellos cuál es conjunto y cual no; de acuerdo a ello marque **F**, si es falso, y **V** si es verdadero, según corresponda:

A) VFV **B)** VFF **C)** VVV **D)** FFF **E)** FFV

Resolución:

- A = {x/"x" es un número natural mayor que 2}

  A = {x} = {3, 4, 5, 6, 7,......}

  (Si es un conjunto)

- B = {x/"x" es un país}

  B = {Perú, Argentina, Chile, Colombia,......}

  (Si es un conjunto)

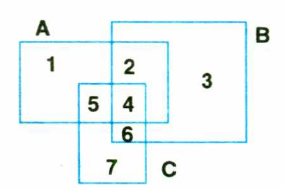
- C = {x/"x" es una fruta}

  C = {naranja, papaya, fresa, plátano, ...}

  (Si es un conjunto)

∴ A, B y C son conjuntos. **Rpta. C**

Ejercicio 3: Dado el diagrama:



y las proposiciones:

I) 1 ∈ A **II)** 4 ∈ B **III)** 6 ∈ C

IV) 2 ∉ C **V)** 5 ∉ B **VI)** 7 ∈ A

A) VVVFVF **B)** VVFFVV **C)** VVVVVF
D) FFVVFV **E)** VVVVFV

Resolución:

- En primer lugar, escribimos los elementos de cada conjunto, veamos: A = {1, 2, 4, 5} ; B = {2, 3, 4, 6} y C = {4, 5, 6, 7}

- En segundo lugar, la veracidad de cada una de las proposiciones:

  I) 1 ∈ A ⇒ **es verdadero;** porque el elemento 1, si pertenece al conjunto A.
  II) 4 ∈ B ⇒ **es verdadero;** porque el elemento 4; si pertenece al conjunto B.
  III) 6 ∈ C ⇒ **es verdadero**; porque el elemento 6; si pertenece al conjunto C.
  IV) 2 ∉ C ⇒ **es verdadero;** porque el elemento 2, no pertenece al conjunto C.

V) $5 \notin B \Rightarrow$ **es verdadero;** porque el elemento 5; no pertenece al conjunto B.

VI) $7 \in A \Rightarrow$ **es falso;** porque el elemento 7; no pertenece al conjunto A.
(Lo correcto es: $7 \notin A$**)**

∴ La respuesta correcta es: VVVVVF   Rpta. C

Ejercicio 4: Si: A = {{a}; {b}; d; {a, b}}; cuál de las siguientes relaciones es verdadera:

A) $\{a\} \subset A$ **B)** $d \notin A$ **C)** $a \in A$
D) $\{b\} \in A$ **E)** $a \in \{a, b\}$

Resolución:

A) $\{a\} \subset A$

es falso; porque la relación es de elemento {a} a conjunto A.

Lo correcto es: $\{\{a\}\} \subset A$

B) $d \notin A$

es falso; porque el elemento "d" sí pertenece al conjunto A.

Lo correcto es: $d \in A$

C) $a \in A$

es falso; porque el elemento "a" no pertenece al conjunto A.

Lo correcto es: $\{a\} \in A$

D) $\{b\} \in A$

es verdadero; porque la relación de pertenencia es de elemento {b} a conjunto A.

E) $a \notin \{a, b\}$

es falso; porque el elemento "a" si pertenece al conjunto {a,b}

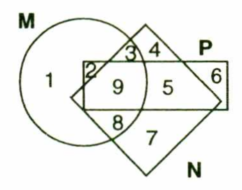
Lo correcto es: $a \in \{a, b\}$

Recuerda que:

i) *La relación de* ***pertenencia*** ($\in$), *es de elemento a conjunto.*

ii) *La relación de* ***inclusión*** ($\subset$), *es de conjunto a conjunto.*

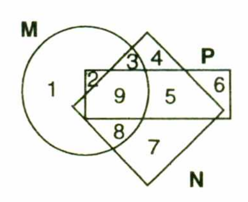
Ejercicio 5: Observa el diagrama:



• Decir cuál es la respuesta correcta:

A) M = {1, 2, 4, 8, 9} **B)** N = {3, 4, 6, 7, 8, 9}
C) P = {2, 5, 6, 9} **D)** M = {2, 3, 4, 8, 9}
E) Ninguna

Resolución:



• De acuerdo al diagrama los elementos de cada conjunto son:

M = {1, 2, 3, 8, 9}   N = {3, 4, 5, 7, 8, 9}
P = {2, 5, 6, 9}

∴ La respuesta correcta es: P = {2, 5, 6, 9}   Rpta. C

Ejercicio 6: Si: $A = \{3x/x \in \mathbb{N} ; 2 \leq x < 7\} \wedge B = \{2x/x \in \mathbb{N} ; 1 < x < 4\}$; cuál de las siguientes relaciones es falsa.

A) $B \not\subset A$ **B)** $9 \in \{6, 9, 12, 15, 18\}$
C) 4 y $6 \in \{4, 6\}$ **D)** $\{12\} \subset \{6, 9, 12, 15, 18\}$
E) $B \subset A$

Resolución:

- Hallamos los elementos del conjunto A.

$A = \{3x/x \in \mathbb{N} ; 2 \leq x < 7\}$

"x" toma los valores de: 2, 3, 4, 5 y 6.

Luego; los valores de "x" los reemplazamos en la expresión: "3x"; obteniendo:

$A = \{3x\} = \{3(2), 3(3), 3(4), 3(5), 3(6)\}$

$\therefore$ $A = \{6, 9, 12, 15, 18\}$

- Hallamos los elementos del conjunto B.

$B = \{2x/x \in \mathbb{N} ; 1 < x < 4\}$

"x" toma los valores de: 2 y 3.

Luego; los valores de "x" los reemplazamos en la expresión: "2x", obteniendo:

$B = \{2x\} = \{2(2), 2(3)\}$

$\therefore$ $B = \{4, 6\}$

- Ahora analizamos alternativa por alternativa, veamos:

A) $B \not\subset A$ $\Rightarrow$ **es verdadero;** porque el conjunto "B" no está contenido en el conjunto A.

B) $9 \in \{6, 9, 12, 15, 18\}$ $\Rightarrow$ **es verdadero;** porque el elemento 9 pertenece al conjunto $\{6, 9, 12, 15, 18\}$

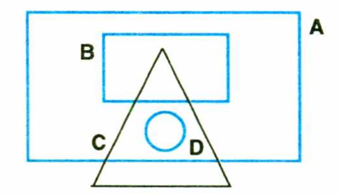
C) 4 y $6 \in \{4, 6\}$ $\Rightarrow$ **es verdadero;** porque los elementos 4 y 6, pertenecen al conjunto $\{4, 6\}$

D) $\{12\} \subset \{6, 9, 12, 15, 18\}$ $\Rightarrow$ **es verdadero;** porque el conjunto $\{12\}$ esta contenido ($\subset$), en el conjunto $\{6,9,12, 15, 18\}$

E) $B \subset A$ $\Rightarrow$ **falso**; porque el conjunto "B" no esta contenido o incluido en A. **Lo correcto es:** $B \not\subset A$

Rpta. E

Ejercicio 7: Dado el Diagrama:



y las proposiciones:

I. $D \subset C$ **II.** $B \subset A$ **III.** $C \subset A$

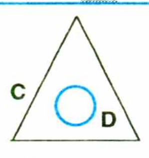
Decir cuál o cuáles es verdadera o verdaderas.

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** I y II
D) Las tres **E)** Ninguna

Resolución:

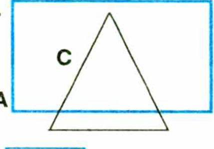
- De acuerdo al diagrama y las proposiciones dadas, obtenemos:

I).



II).

III).



$D \subset C$ ... (verdadera). $B \subset A$ ... (verdadera). $C \subset A$ ... (falso) **Rpta. C**

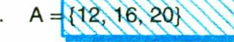
Ejercicio 8: Si: $A = \{4x / x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 6\}$, entonces por extensión será:

A) $A = \{3, 4, 5\}$ **B)** $A = \{12, 16\}$
C) $A = \{4, 4, 4\}$ **D)** $A = \{12, 16, 20\}$
E) Ninguna

Resolución:

$A = \{4x / x \in \mathbb{N}; 3 \leq x < 6\}$ — "x" toma los valores de: 3, 4, y 5.

Luego; los valores de "x" los reemplazamos en la expresión "4x", obteniendo:

$A = \{4x\} = \{4(3), 4(4), 4(5)\}$ $\therefore$  $A = \{12, 16, 20\}$ **Rpta. D**

Ejercicio 9: Si: $B = \{x^3 - 1 / x \in \mathbb{N}; 2 \leq x \leq 5\}$, entonces por extensión será:

A) $B = \{2, 3, 4, 5\}$ **B)** $B = \{2, 3, 4\}$
C) $B = \{7, 26, 63\}$ **D)** $B = \{7, 26, 63, 124\}$
E) Ninguna

Resolución:

$B = \{x^3 - 1 / x \in \mathbb{N}; 2 \leq x \leq 5\}$ — "x" toma los valores de: 2, 3, 4 y 5

Luego, los valores de "x" los reemplazamos en la expresión "$x^3 - 1$", obteniendo:

$B = \{x^3 - 1\} = \{2^3 - 1, 3^3 - 1, 4^3 - 1, 5^3 - 1\}$ ➠ $\therefore$ $B = \{7, 26, 63, 124\}$ **Rpta. D**

Ejercicio 10: Determinar por comprensión el siguiente conjunto: $M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

A) $M = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$ **B)** $M = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\}$ **C)** $M = \{2x + 2 / x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x < 5\}$
D) $M = \{2x + 2 / x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ **E)** $M = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x > 0\}$

Resolución:

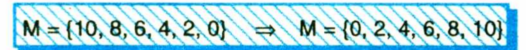
El conjunto: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ al determinarse por comprensión es de la forma:

$$M = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$$

Verificación:

$M = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$ — "x" toma los valores de: 5, 4, 3, 2, 1 y 0; pues: $x \in \mathbb{N}$

Luego, los valores de "x" los reemplazamos en la expresión "2x", obteniendo: $M = \{2x\} = \{2(5), 2(4), 2(3), 2(2), 2(1), 2(0)\}$

$\therefore$  $M = \{10, 8, 6, 4, 2, 0\} \Rightarrow M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ **Rpta. A**

Ejercicio 11 : Si: $M = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, al transformar el conjunto por comprensión tenemos:

I) $M = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$

II) $M = \{(2x + 1)/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 6\}$

III) $M = \{(2x - 1)/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\}$; es verdadera o verdaderas.

A) Sólo II **B)** Sólo I **C)** Sólo III **D)** Sólo I y II **E)** Sólo II y III

Resolución:

I) $M = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\}$ — "x" toma los valores de: 0, 1, 2, 3, 4 y 5; pues $x \in \mathbb{N}$

Luego, los valores de "x" los reemplazamos en la expresión "x"; obteniendo:

$M = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\therefore$ $\{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\} \neq \{3, 5, 7, 9, 11\}$ **(Falso)**

II) $M = \{(2x + 1)/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 6\}$ — "x" toma los valores de: 1, 2, 3, 4 y 5; pues $x \in \mathbb{N}$

Luego; los valores de "x" los reemplazamos en la expresión (2x + 1), obteniendo:

$M = \{(2x + 1)/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 6\} = \{2.1 + 1, 2.2 + 1, 2.3 + 1, 2.4 + 1, 2.5 + 1\}$

$\therefore$ $M = \{(2x + 1)/ x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \;\; 6\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ **(Verdadero)**

III) $M = \{(2x - 1)/ x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\}$ — "x" toma los valores de: 2, 3, 4 y 5; pues $x \in \mathbb{N}$

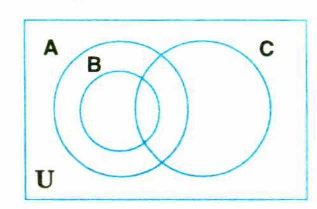
Luego, los valores de "x" los reemplazamos en la expresión (2x - 1), obteniendo:

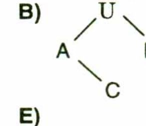
$M = \{(2x - 1)/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\} = \{2.2 - 1; 2.3 - 1, 2.4 - 1, 2.5 - 1\}$

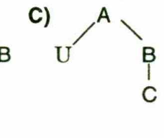
$M = \{2x - 1/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\} = \{3, 5, 7, 9\}$

$\therefore$ $\{(2x - 1)/ x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\} \neq \{3, 5, 7, 9, 11\}$ **(Falso)** Rpta. A

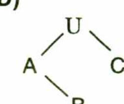
Ejercicio 12 : Traducir a un diagrama lineal el siguiente diagrama de Venn - Euler.

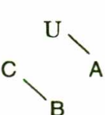


A)


B)


C) A — U, B — C

D)


E)


Resolución:

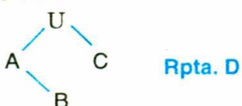
♦ De acuerdo al diagrama de Venn - Euler, nos da a entender que: **B** está incluido en **A**

$(B \subset A) \Rightarrow$ A — B ...(1)

- Además tanto **A** como **C** están incluidos en U; osea:

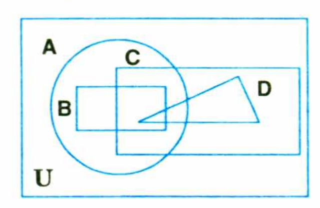
...(2)

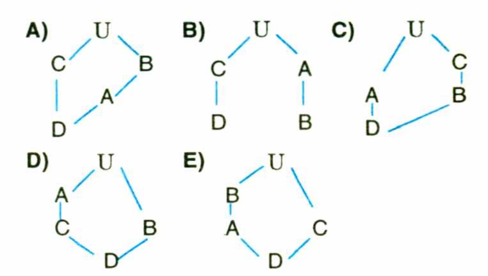
Luego, de (1) y (2), obtenemos:



Rpta. D

Ejercicio 13 : Traducir a un diagrama lineal el siguiente diagrama de Venn - Euler.





Resolución:

- De acuerdo al diagrama de Venn - Euler nos da ha entender que: **D** está incluido en **C** .

$(D \subset C) \Rightarrow$ C — D ...(1)

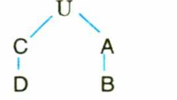
- Además **B** está incluido en **A**

$(B \subset A) \Rightarrow$ A — B ...(2)

- También **C** y **A**, están incluidos en U; osea:

...(3)

Luego, de (1), (2) y (3), obtenemos:



Rpta. B

Ejercicio 14 : Determinar cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos:

a). P(A) = 32 subconjuntos
b). P(B) = 8^2 subconjuntos

A) 6 y 3 **B)** 5 y 4 **C)** 5 y 6
D) 5 y 8 **E)** N.A.

Resolución:

- P(A) = 32 subconjuntos; pero $32 = 2^5$

↓

P(A) = 2^5, **Donde:** n = 5 elementos

∴ El conjunto "A" tiene 5 elementos

- P(B) = 8^2 subconjuntos

↓

P(B) = $(2^3)^2$; Propiedad: $\left(A^n\right)^m = A^{n \cdot m}$

Recuerda que:

Si el conjunto "A" tiene "n" elementos; el conjunto potencia A tendrá: 2^n subconjuntos ó elementos, o sea:

P(A) = 2^n subconjuntos

$P(B) = 2^6$; **Donde:** n = 6 elementos

∴ El conjunto "B" tiene 6 elementos **Rpta. C**

Ejercicio 15 : Si los conjuntos A y B son iguales, hallar la suma de los elementos del conjunto C, tal que: $A = \{2^{a-1}, 3^{b+1}\}$; $B = \{16, 27\}$ ∧ $C = \{x^2/x \in \mathbb{N} \wedge b \leq x \leq a\}$

A) 48 **B)** 50 **C)** 52

D) 54 **E)** 58

Resolución:

- **Del conjunto "A" y "B"**, como son iguales, obtenemos: $A = \{2^{a-1}, 3^{b+1}\}$; $B = \{16, 27\}$

i) $2^{a-1} = 16 \Rightarrow 2^{a-1} = 2^4 \Rightarrow a - 1 = 4$ ➠ ∴ $a = 5$

ii) $3^{b+1} = 27 \Rightarrow 3^{b+1} = 3^3 \Rightarrow b + 1 = 3$ ➠ ∴ $b = 2$

- **Del conjunto "C"**, $C = \{x^2/x \in \mathbb{N} \wedge b \leq x \leq a\} \Rightarrow C = \{x^2/x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 5\}$ obtenemos:

"x" toma los valores de: 2, 3, 4 y 5.

Luego, los valores de "x" los reemplazamos en la expresión: x^2.

$$C = \{x^2\} = \{2^2, 3^2, 4^2, 5^2\} = \{4, 9, 16, 25\}$$

∴ $C = \{4, 9, 16, 25\} \Rightarrow \Sigma$ de elementos de "C" = 54 **Rpta. D**

TALLER DE EJERCICIOS Nº ①

Ejercicio 1 : Indica a que tipo de conjuntos corresponden:

$A = \{\phi\}$; $B = \{x \in IN/5 < x < 6\}$
$C = \{x \in IN/ x \geq 5\}$

A) Vacío; Vacío; Infinito
B) Unitario; Vacío; Infinito
C) Unitario; Vacío; Finito
D) Vacío; Vacío; Finito
E) Vacío; Unitario; Infinito

Resolución:

Rpta. B

Ejercicio 2 : Si el siguiente conjunto es unitario. Hallar los valores de b y a; dar como respuesta su diferencia.

$$A = \{a + b ; b + 4 ; 11\}$$

Resolución:

Rpta. $b - a = 3$

Ejercicio 3 : Cuántos subconjuntos tiene:

$$A = \{1 ; 2 ; 3 ; \{3\}; \{1\}\}$$

Resolución:

Rpta. 32

Ejercicio 4 : Uno de los subconjuntos de:

$$A = \{a ; \{b\} ; c\} \text{ es:}$$

A) {b} **B)** {a ; b} **C)** {b ; c}
D) {a ; c} **E)** {{a} ; b}

Resolución:

Rpta. D

Ejercicio 5 : La suma de los elementos del conjunto.

$$A = \{(3x+1)/x \in \mathbb{N} \wedge 5 < x < 10\}$$

es:

Resolución:

Rpta. 94

Ejercicio 6 : Determinar por extensión:

$$A = \{x^2 / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 5\}$$

Dar como respuesta la suma de elementos de "A".

Resolución:

Rpta. 30

Ejercicio 7 : Dado un conjunto "A" señalar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones: $A = \{1 ; 2 ; \{3 ; 4\} ; 5\}$

I) $2 \in A$ **II)** $5 \subset A$ **III)** $\phi \in A$
IV) $\{3 ; 4\} \subset A$ **V)** $\{1 ; 2 ; 5\} \subset A$ **VI)** $n(A) = 5$

Resolución:

Rpta.

Ejercicio 8 : Si los conjuntos A y B son iguales.

$$A = \{32 ; 3^{2x}\} \wedge B = \{81 ; 2^{2y+1}\}$$

Entonces: "x + y" es:

Resolución:

Rpta. $x + y = 4$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS

NIVEL I

Ejercicio 1 : Dado los conjuntos:

A = {x/5 < x < 7; "x" es número natural}
B = {x/3x - 1 = 8; "x" es número natural}
De ellos cuál o cuáles son unitarios.

A) A **B)** B **C)** A y B **D)** Nulos **E)** N.A.

Ejercicio 2 : Si:

A = {x/"x" es un número natural mayor que 5}
B = {x/"x" es una fiera}
C = {x/"x" es un mamífero}

De ellos cual es conjunto o cual no, de acuerdo a ello marque **F,** si es falso, y **V** si es verdadero, según corresponda.

A) VFV **B)** VFF **C)** VVV **D)** FFF **E)** FFV

Ejercicio 3 : Dado el diagrama y las proposiciones: Decir cuáles son verdaderos y cuáles son falsos:

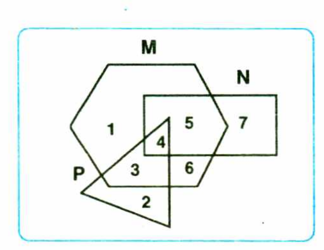
I. $8 \in A$
II. $4 \in C$
III. $3 \notin B$
IV. $1 \in B$
V. $5 \notin A$
VI. $9 \notin C$

A) VVFVVF **B)** VFVVFF **C)** VVVVFV
D) VVVFVV **E)** VFFVFV

Ejercicio 4 : Si: A = {{a}; b; {c}; {d; e}}, cuál de las siguientes relaciones es verdadera.

A) $\{c\} \subset A$ **B)** $a \in A$ **C)** $b \subset A$
D) $\{d, e\} \subset A$ **E)** $\{\{d, e\}\} \subset A$

Ejercicio 5 : Observa el diagrama:



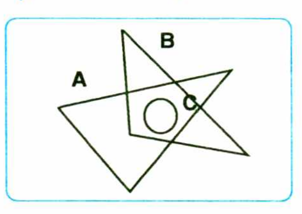
• Decir cuál es la respuesta correcta.

A) M = {1, 3, 4, 5, 6, 7} **B)** N = {4, 5, 6, 7}
C) P = {2, 3, 4, 6} **D)** N = {4, 5, 7}
E) Ninguna

Ejercicio 6 : Si: $A = \{4x/x \in \mathbb{N} ; 3 < x \leq 6\}$ $\wedge$ $B = \{5x/x \in \mathbb{N} ; 3 < x \leq 5\}$. Cuál de las siguientes relaciones es falsa.

A) $B \subset A$ **B)** $20 \in \{16; 20; 24\}$
C) 20 y $25 \in \{20;25\}$ **D)** $\{20\} \subset \{20; 25\}$
E) $B \not\subset A$

Ejercicio 7 : Dado el diagrama:



y las proposiciones:

I. $C \subset A$ **II.** $B \subset A$ **III.** $C \subset B$

Decir cuál o cuáles es verdadera o verdaderas.

A) Sólo I **B)** I y III **C)** Sólo II
D) Los tres **E)** Ninguna

Ejercicio 8 : Si: $A = \{3x/x \in \mathbb{N} ; 2 < x \leq 6\}$, Entonces por extensión será:

A) A = {3; 4; 5; 6} **B)** A = {3; 3; 3; 3}
C) A = {9; 12; 15; 18} **D)** A = {9; 12; 15}
E) Ninguna

Ejercicio 9: Si: $B = \{x^2 - 3/x \in \mathbb{N}\ ;\ 3 \leq x < 6\}$;
Entonces por extensión será:

A) B = {3; 4; 5} **B)** B = {3; 4; 5; 6}
C) B = {6; 13; 22} **D)** B = {6; 13; 22; 33}
E) Ninguna

Ejercicio 10: Determinar por comprensión el siguiente conjunto:

D = {1; 3; 5; 7; 9; 11}

A) $D = \{x/x \in \mathbb{N}\ \wedge x \leq 11\}$

B) $D = \{2x + 1/\ x \in \mathbb{N}\ \wedge x \leq 11\}$

C) $D = \{2x - 1/\ x \in \mathbb{N}\ \wedge 0 < x \leq 6\}$

D) $D = \{2x - 1/x \in \mathbb{N}\ \wedge 2 \leq x \leq 6\}$

E) $D = \{x + 1/x \in \mathbb{N}\ \wedge 0 \leq x < 10\}$

Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. D	4. E	5. D
6. A	7. B	8. C	9. C	10. C

NIVEL II

Ejercicio 1: Si: P = {2, 4, 6, 8, 10}, al transformar el conjunto por comprensión tenemos:

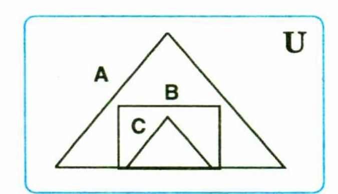
I. $P = \{x/x \in \mathbb{N}\ \wedge x < 9\}$

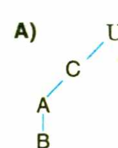
II. $P = \{(2x + 2)/x \in \mathbb{N}\ \wedge 0 \leq x < 5\}$

III. $P = \{2x/x \in \mathbb{N}\ \wedge 0 \leq x \leq 5\}$

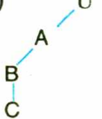
A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo I y II
D) Sólo III **E)** Sólo II y III

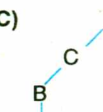
Ejercicio 2: Traducir a un diagrama lineal el siguiente Diagrama de Venn-Euler.



A)


B)

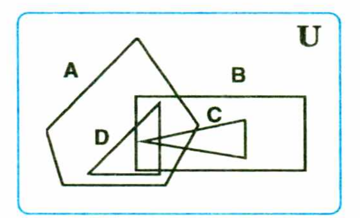


C)


D) U — A — C — B

E) Ninguna

Ejerccio 3: Traducir a un diagrama lineal el siguiente diagrama de Venn-Euler.



A) U; C — B; D — A

B) U; B — D; C — A; D — A

C) U; A — B; B — D; C — D

D) U; B — C; A — D

E) Ninguna

Ejercicio 4: Determinar cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $P(A) = 128$ subconjuntos
b) $P(B) = 16^3$ subconjuntos

A) 7 y 7 **B)** 7 y 6 **C)** 6 y 5 **D)** 7 y 12 **E)** N.A.

Ejercicio 5 : Si los conjuntos A y B son iguales, hallar la suma de los elementos del conjunto "C"; tal que:

$A = \{5^{a-1}; 4^{b+2}\}$; $B = \{125; 64\}$ $\wedge$
$C = \{x^3/x \in \mathbb{N} \wedge b \le x \le a\}$

A) 36 **B)** 27 **C)** 100 **D)** 80 **E)** 90

Ejercicio 6 : Si: $A = \{2 ; 8 ; \{9\}\}$. ¿Cuántas de las afirmaciones son ciertas?

I. $2 \subset A$ **II.** $\{8\} \in A$ **III.** $\{2 , 8\} \subset A$ **IV.** $\{9\} \in A$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** N.A

Ejercicio 7: Dados los conjuntos unitarios:

$A = \{x + 7 ; 2x + 5\} \wedge B = \{y - 3 ; 5y - 15\}$
Hallar el valor de "x + y"

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 8 : Dados los conjuntos:

$A = \phi$; $B = \{o\}$; $C = \{\phi\}$; Indique lo correcto.

A) $A = B$ **B)** $B = C$ **C)** $n(B) = n(C)$
D) $n(B) = 0$ **E)** Todos son iguales

Ejercicio 9 : Si: $M = \{3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11\}$ al transformar el conjunto por comprensión, tenemos que:

I. $M = \{x/x \in IN \wedge x < 6\}$
II. $M = \{(2x + 1)/ x \in IN \wedge 1 \le x < 6\}$
III. $M = \{(2x - 1)/x \in IN \wedge 1 < x < 6\}$

A) Sólo II **B)** Sólo I **C)** Sólo III
D) Sólo I y II **E)** Sólo II y III

Ejercicio 10 : Dado el conjunto:

$B = \{x/x \in IN \wedge 0 < x \le 5\}$

Determinar: n [P(B)]

A) 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 8 **E)** 24

Ejercicio 11: Determinar el siguiente conjunto por extensión:

$A = \{2x/x \in IN \wedge 2 \le x \le 10\}$

A) {4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 18 ; 20}
B) {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 18 ; 20}
C) {1 , 4 ; 6 ; 8 ; 10 , 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20}
D) {4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20}
E) {6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20}

Ejercicio 12 : Determinar el siguiente conjunto por extensión:

$Q = \{2^x/x \in IN \wedge 0 \le x \le 5\}$

A) {1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32} **B)** {1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16}
C) {2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32} **D)** {1 ; 2 ; 4 ; 16 ; 32}
E) {0 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16}

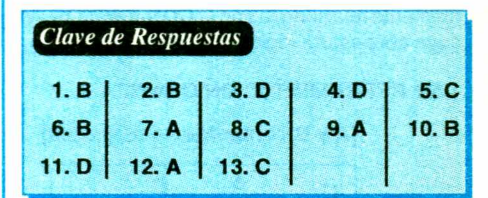
Ejercicio 13 : Dado el siguiente conjunto:

$R = \{a ; b ; \{c\} ; d ; e\}$

I. $a \wedge b \in R$ **II.** $\{\{c\}\} \subset R$ **III.** $\{e\} \in R$

cuántas son falsas.

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III
D) I y II **E)** II y III

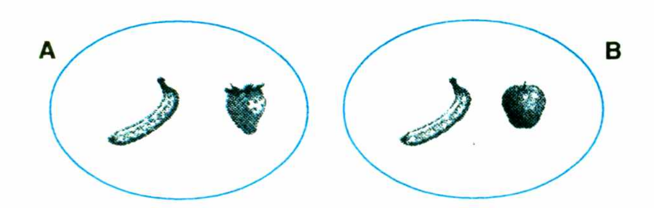


Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. D	4. D	5. C
6. B	7. A	8. C	9. A	10. B
11. D	12. A	13. C		

1.6 OPERACIONES CON CONJUNTOS

1.6.1 INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS: Observa estos conjuntos:

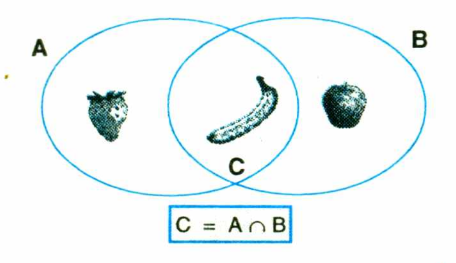


¿tienen algunos elementos comunes estos dos conjuntos?

Si, los platanos.

- El conjunto que forman estos dos elementos representado por la le-, tra **C**, se llama **Intersección** de los conjuntos **A** y **B**, se expresa así: $A \cap B = C$
- El símbolo "$\cap$" se lee: **"INTERSECCIÓN"**

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



Definición:

***Intersección** de dos conjuntos A y B, es el conjunto de todos los elementos comunes a A y B, o sea que pertenece a A y pertenece a B. Se denota por "A ∩ B" y se lee: "A intersección B".*

En forma simbólica, se denota:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

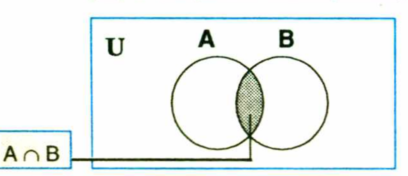
Así pues la intersección de conjuntos está íntimamente relacionada con la **CONJUNCION "y"** cuya abreviatura lógica-simbólica es $\wedge$

Luego: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

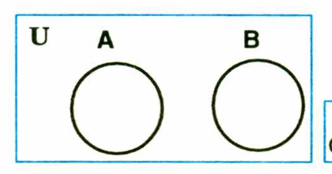
Se lee:"Intersección de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto de todos los elementos x, tal que x pertenece a **A** y x pertenece a **B**.

1.6.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

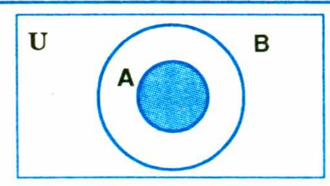
(A y B conjuntos no disjuntos)



(A y B conjuntos disjuntos)



$A \cap B = \phi$
Conjunto Vacío



Si: $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Ejemplo 1: Hallar la intersección de M = {a; b; c; d; e} ∧ N = {a; t; u; d; z}

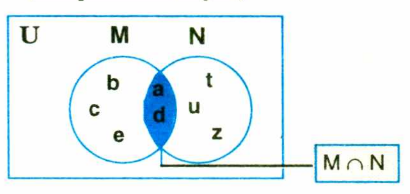
Resolución:

(Interpretación Gráfica)

M = {a; b; c; d; e}

N = {a; t; u; d; z}

$M \cap N$ = {a; d}



Ejemplo 2: Hallar la intersección de: R = {x ∈ IN/3 < x ≤ 8} ∧ S = {x ∈ IN / 5 ≤ x < 10}

Resolución:

R = {x ∈ IN/3 < x ≤ 8} Los valores que toma x que sean mayores que 3 pero menores o iguales que 8 son: 4, 5, 6, 7 y 8. ∴ R = {4; 5; 6; 7; 8}

S = {x ∈ IN/5 ≤ x < 10} Los valores que toma x que sean mayores o iguales que 5, pero menores que 10 son: 5, 6, 7, 8 y 9. ∴ S = {5; 6; 7; 8; 9}

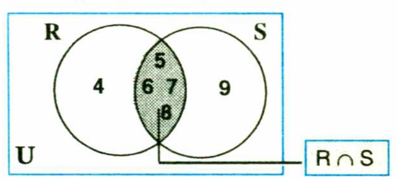
Luego:

(Interpretación Gráfica)

R = {4; 5; 6; 7; 8}

S = {5; 6; 7; 8; 9}

$R \cap S$ = {5; 6; 7; 8}



Ejemplo 3: Hallar la intersección de: A = {a; b; c} ∧ B = {p; q}

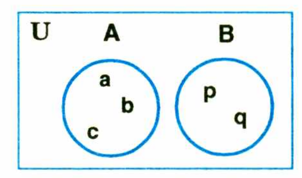
Resolución:

En este caso observamos que no hay elementos comunes, luego la intersección es un conjunto vacío.

(Interpretación Gráfica)

$A \cap B = \phi$

o bien: $A \cap B = \{\ \}$



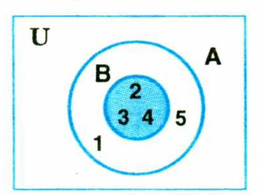
Ejemplo 4 : Hallar la intersección de: A = {1; 2; 3; 4; 5} ∧ B = {2; 3; 4}

Resolución:

A = {1; 2; 3; 4; 5}
B = {2; 3; 4}

A ∩ B = {2; 3; 4}

(Interpretación Gráfica)



A ∩ B = B

En este caso se puede observar que B ⊂ A, es decir, todos los elementos de B son también elementos de A, por lo que decimos que B está incluido en A.

Ejemplo 5 : Hallar la intersección de A = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ∧ B = {1; 2; 3; 4; 5 ; 6}

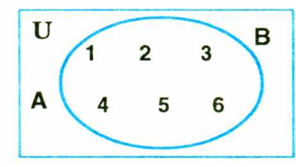
Resolución:

En este caso observamos que los conjunto A y B tienen los mismos elementos, es decir: A = B.

Luego podemos afirmar que:

A ∩ B = B ó bien: A ∩ B = A

(Interpretación Gráfica)



A ∩ B = A

1.6.3 INTERSECCIÓN DE VARIOS CONJUNTOS: La intersección de dos o más conjuntos es el conjunto formado por elementos comunes a todos ellos a la vez.

Ejemplo 1 : Hallar la intersección de A = {1; 2; 3; 5} , B = {3; 5; 7; 8} ∧ C = {1; 5; 6; 7}

Resolución:

En los tres conjuntos, observamos que el elemento **"5"** es común para los **tres**.

Luego: A ∩ B ∩ C = { 5 }

- Este mismo conjunto {5} se obtiene:
  Hallando primero A ∩ B

A = {1; 2; 3; 5}
B = {3; 5; 7; 8}

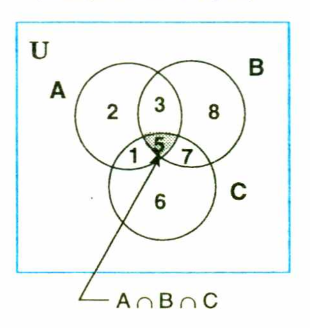
A ∩ B = {3; 5}

Luego hallaremos la intersección: A ∩ B con C

A ∩ B = {3; 5}
C = {1; 5; 6; 7}

(A ∩ B) ∩ C = {5}

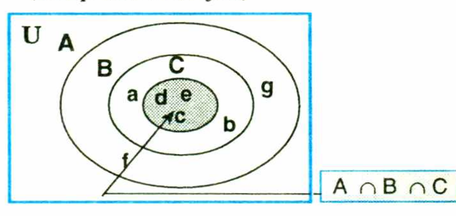
(Interpretación Gráfica)



Ejemplo 2 : Hallar la intersección de $A = \{a; b; c; d; e; f; g\}$; $B = \{a; b; c; d; e\}$ $\wedge$ $C = \{d; e; c\}$

Resolución:

(Interpretación Gráfica)



En los tres conjuntos, observamos que los elementos "d, e, c" son comunes para los tres.

Luego: $A \cap B \cap C = \{d; e; c\}$

1.6.4 PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

1° **Propiedad Conmutativa:** Dados dos conjuntos: $A = \{3; 4; 5\} \wedge B = \{3; 5; 7\}$

$A \cap B = \{\text{elementos comunes de } A \wedge B\} = \{3; 5\}$
$B \cap A = \{\text{elementos comunes de } B \wedge A\} = \{3; 5\}$

Observamos que en ambos casos se tiene el mismo conjunto: $\{3; 5\}$, como respuesta.

Luego: $A \cap B = B \cap A$

esta igualdad se cumple siempre y cuando los pares de conjuntos sean de un mismo universo.

2° **Propiedad Asociativa:** Dados los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 5; 6\}$ $\wedge$ $C = \{4; 3; 6; 7\}$

- **En primer lugar**, hallamos: $A \cap B$

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1; 2; 3; 4\} \\ B = \{2; 3; 5; 6\} \end{array}\right\} A \cap B = \{2; 3\}$$

- **En segundo lugar**, hallamos: $(A \cap B) \cap C$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{2; 3\} \\ C = \{4; 3; 6; 7\} \end{array}\right\} (A \cap B) \cap C = \{3\} \quad \ldots(I)$$

- Ahora que sucederá si efectuamos $B \cap C$ y luego lo intersectamos con A.

$$\left.\begin{array}{l} B = \{2; 3; 5; 6\} \\ C = \{4; 3; 6; 7\} \end{array}\right\} B \cap C = \{3; 6\}$$

Luego hallamos: $(B \cap C) \cap A$

$$\left.\begin{array}{l} B \cap C = \{3; 6\} \\ A = \{1; 2; 3; 4\} \end{array}\right\} \begin{array}{c} (B \cap C) \cap A = \{3\} \\ \text{ó} \\ A \cap (B \cap C) = \{3\} \end{array} \quad \ldots (II)$$

Como se observará en las expresiones (I) y (II) se ha obtenido el mismo resultado es decir:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$ **(Propiedad Asociativa)**

1.6.5 OTRAS PROPIEDADES:

a) Propiedad de Idempotencia: dice: "la intersección de cualquier conjunto A consigo mismo, es el mismo conjunto"

Así: $A \cap A = A$

b) Propiedad: "La intersección de cualquier conjunto A con el conjunto **vacío,** es el mismo conjunto vacío.

Así: $A \cap \phi = \phi$

c) Propiedad: "Cualquier conjunto A, intersectado con el conjunto universal, es igual al conjunto "A".

Así: $A \cap U = A$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Ejercicio 1: En cada caso halla los elementos del conjunto intersección:

a). A = {x/x es letra de la palabra puerta}
B = {x/x es letra de la palabra pintura}

b). $C = \{x \in IN / 18 < x \leq 25\}$
$D = \{x \in IN / 16 \leq c < 22\}$

Resolución:

a). A = {p, u, e, r, t, a} ∧ B = {p, i, n, t, u, r, a} ➠ ∴ $A \cap B = \{p, u, r, t, a\}$

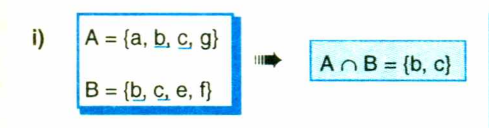
b). C = {19, 20, 21, 22, 23, 24, 25} ∧ D = {16, 17, 18, 19, 20, 21} ➠ ∴ $C \cap D = \{19, 20, 21\}$

Ejercicio 2: Sean los conjuntos: A = {a, b, c, g} ; B = {b, c, e, f} ∧ C = {a, b, d, e, h}

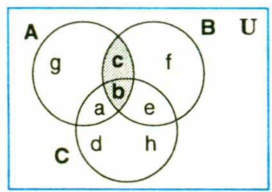
Hallar: **i)** $A \cap B$ **ii)** $B \cap C$ **iii)** $A \cap C$ **iv)** $A \cap B \cap C$

Resolución:

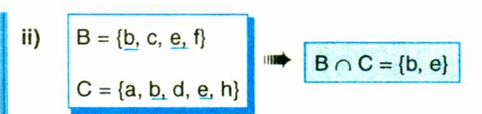
i)



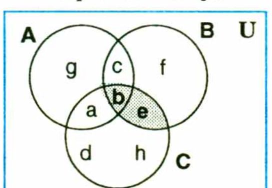
Interpretación Gráfica



ii)



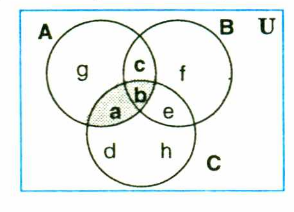
Interpretación Gráfica



iii) A = {a, b, c, g}

C = {a, b, d, e, h} ➡ A ∩ C = {a, b}

Interpretación Gráfica

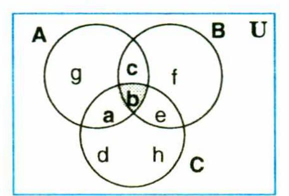


iv) A ∩ B ∩ C = (A ∩ B) ∩ C

= {b, c} ∩ {a, b, d, e, h}

∴ A ∩ B ∩ C = { b}

Interpretación Gráfica



Ejercicio 3 : Sean los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4}; B = {2, 3, 5, 6, 7} ∧ C = {7, 8, 9}

Hallar: **i)** A ∩ B **ii)** B ∩ C **iii)** A ∩ B ∩ C

Resolución:

a) A ∩ B = {1, 2, 3, 4} ∩ {2, 3, 5, 6, 7}

⇒ A ∩ B = {2, 3}

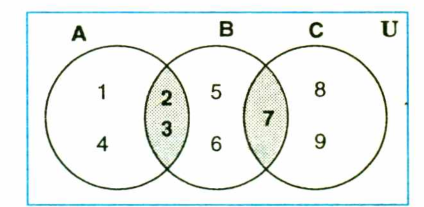
b) B ∩ C = {2, 3, 5, 6, 7} ∩ {7, 8, 9}

⇒ B ∩ C = {7}

c) A ∩ B ∩ C = (A ∩ B) ∩ C = {2, 3} ∩ {7, 8, 9}

⇒ A ∩ B ∩ C = ϕ

Interpretación Gráfica



Ejercicio 4 : Sean los conjuntos: P = {1, 2, 3, 7, 8} ; Q = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ∧ R = {7, 8, 9}

Hallar: **a)** P ∩ Q **b)** P ∩ R **c)** P ∩ Q ∩ R

Resolución:

a) P ∩ Q = {1, 2, 3, 7, 8} ∩ {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

⇒ P ∩ Q = {3, 7, 8}

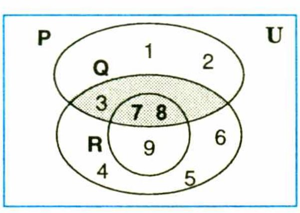
b) P ∩ R = {1, 2, 3, 7, 8} ∩ {7, 8, 9}

⇒ P ∩ R = {7, 8}

c) P ∩ Q ∩ R = (P ∩ Q) ∩ R = {3, 7, 8} ∩ {7, 8, 9}

⇒ (P ∩ Q) ∩ R = {7, 8}

Interpretación Gráfica



TALLER DE EJERCICIOS Nº ②

Ejercicio 1 : Dados los conjuntos:

A = {x/x es un número natural menor que 13}
B = {x/x es divisor de 12}
Hallar: $A \cap B$

Resolución:

Rpta. $A \cap B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6; 12\}$

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos:

$P = \{x \in IN / 6 < x < 20\}$
$Q = \{x \in IN / 8 \leq x < 18\}$
¿Cuántos elementos tiene el conjunto $P \cap Q$?

Resolución:

Rpta. 10 elementos

Ejercicio 3 : Dados los conjuntos:

$A = \{x \in IN / 2 \leq x \leq 8\}$
$B = \{x \in IN / 6 < x < 10\}$ $\wedge$ $C = \{6 ; 7 ; 8\}$
Hallar: $(A \cap B) \cap C$

Resolución:

Rpta. $(A \cap B) \cap C = \{7 ; 8\}$

Ejercicio 4 : Si: $A = \{1 ; 2 ; 5 ; 6\}$
$B = \{2 ; 3 , 4 ; 5\}$ $\wedge$ $C = \{4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

Entonces; cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

A B C

Resolución:

Rpta. {4 ; 5 , 6}

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

NIVEL I

Ejercicio 1 :Dados los siguientes conjuntos:

A = {x / x es letra de la palabra teléfono}
B = {x / x es letra de la palabra elefante}
Hallar: A ∩ B

A) {e, l, f} **B)** {e, f, n} **C)** {e, l, f, n}
D) {l, f} **E)** {e, l, f, n , t}

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos:

C = {x/x es impar menor o igual que 29}
D = {x/x es un múltiplo de 3 menor que 30}
¿Cuántos elementos tiene el conjunto C ∩ D?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ejercicio 3 : Dados los conjuntos:

P = {x/x es un número natural mayor que 8}
Q = {x/x es un divisor de 20}. Hallar: P ∩ Q

A) {10, 15, 20} **B)** {15, 20} **C)** {10, 20}
D) {10, 15, 18, 20} **E)** N.A.

Ejercicio 4 : Dados los conjuntos:

M = {x ∈ IN/12 < x < 23}
N = {x ∈ IN/15 ≤ x < 25}
¿Cuántos elementos tiene el conjunto M ∩ N?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 5 : Dados los conjuntos:

P = {x ∈ IN/128 < x ≤ 150}
Q = {x ∈ IN / 140 < x < 160}
¿Cuántos elementos tiene el conjunto P ∩ Q?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Ejercicio 6 : Si:

A = {x ∈ IN/ 3 ≤ x ≤ 9}
B = {x ∈ IN/ 5 < x < 11} ∧ C = {7, 8, 9}
Hallar: (A ∩ B) ∩ C

A) {6, 7, 8} **B)** {6, 7} **C)** {8, 9}
D) {7, 8, 9} **E)** N.A.

Ejercicio 7 : Dados los conjuntos:

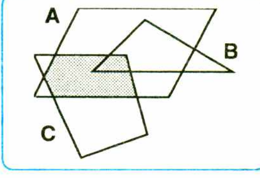
A = {n, i, c, o, l, a, s}
B = {x/x es letra de la palabra colonias}
C = {x/x es letra vocal}
Hallar: (A ∩ B) ∩ (A ∩ C)

A) {a, e, u} **B)** {a, i, o} **C)** {n, l, c}
D) {a, e, i, o, u} **E)** N.A.

Ejercicio 8 : Si: A = {2, 3, 5, 7, 8, 9} ;
B = {6, 8, 9} ∧ C = {1, 2, 4, 8}

Entonces; cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del Diagrama.

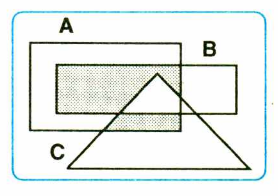
A) 8, 9, 5
B) 2, 8
C) 2, 3, 8
D) 3, 5, 9
E) 5, 8



Ejercicio 9 : Si: A = {1, 2, 3, 7};
B = {2, 5, 6, 7} ∧ C = {3, 4, 5, 7}

Entonces; cuáles son los elementos que deben estar en las partes achuradas del diagrama.

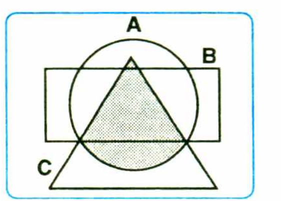
A) 2, 5, 7
B) 2, 3, 7
C) 2, 3
D) 3, 5, 7
E) 2, 5, 6, 7



Ejercicio 10 : Si: A = {2, 3, 4, 5, 8, 9} ;
B = {1, 2, 5, 6, 9} ∧ C = {4, 7, 8, 9}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

A) 2, 5, 9
B) 4, 9
C) 2, 5, 8, 9
D) 4, 8, 9
E) 3, 4, 5, 8



Clave de Respuestas

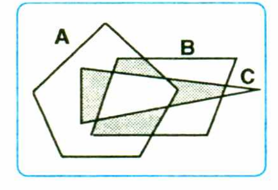
1. E	2. C	3. C	4. D	5. B
6. D	7. B	8. B	9. C	10. D

NIVEL II

Ejercicio 1 : Si: A = {1, 2, 3, 8, 9} ;
B = {3, 4, 5, 7, 8, 9} ∧ C = {2, 5, 6, 9}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en las partes achuradas del diagrama.

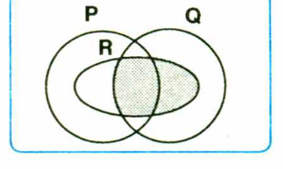
A) 1, 2, 3
B) 1, 2, 9
C) 2, 9, 5
D) 2, 3, 5, 8
E) 3, 4, 8, 9



Ejercicio 2 : Si: P = {a, b, c, d, e} ;
Q = {c, d, e, f, g, h} ∧ R = {b, d, g}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

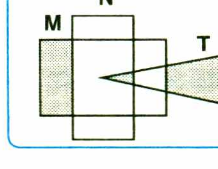
A) b, d
B) c, d, e
C) d, g
D) f, h
E) a, b, d



Ejercicio 3 : Si: M = {a, c, d, e, f, g} ;
N = {b, c, f, h} ∧ T = {e, f, i}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en las partes achuradas del diagrama.

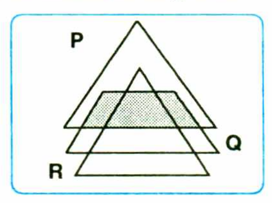
A) c, f, i **B)** a, f, e
C) b, c **D)** a, f, i
E) f, e, i



Ejercicio 4 : Si: P = {1, 2, 3, 4, 5} ;
Q = {3, 4, 5, 6, 7,8} ∧ R = {2,4,7, 9}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

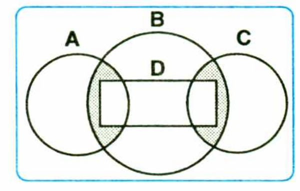
A) 1, 2, 4
B) 3, 4, 5
C) 2, 4, 5
D) 6, 7, 8
E) 4, 5



Ejercicio 5 : Si: A = {1, 2, 3} ; B = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ; C = {7, 8, 9} ∧ D = {3 , 5 , 7}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en las partes achuradas del diagrama.

A) 3, 5, 7
B) 4, 5, 6
C) 1, 2, 8
D) 2, 8
E) 2, 8, 9



Ejercicio 6 : Si:
A = {1 , 3 , 5 , 7} y B = {1, 2, 3, 4, 5}
¿Cuántos subconjuntos tiene el conjuto A ∩ B?

A) 3 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 4

Ejercicio 7 : Se tienen los conjuntos:

P = {x ∈ IN/x es múltiplo de 3}
Q = {x ∈ IN/x es divisor de 30}
¿Cuántos elementos tiene P ∩ Q?

A) 3 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 6

Ejercicio 8 : Se tienen los conjuntos:

IN = {0 , 1 , 2 , 3, 4, ...}
U = {x/x ∈ IN Λ ≤ 50}
A = {x ∈ U/x es múltiplo de 4}
B = {x ∈ U/x es múltiplo de 6}
¿Cuántos elementos tiene A ∩ B?

A) 4 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 5

Ejercicio 9 : Dado que:

IN = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...}
A = {x/x ∈ IN; x es múltiplo de 3}
B = {x/x ∈ IN, x es múltiplo de 4}
C = {x/x ∈ IN; x < 25}

Determinar: n [A ∩ B ∩ C]

A) 6 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

Ejercicio 10 : Dados los conjuntos:

A = {x/9 ≤ x^2 ≤ 300 ; x ∈ IN}
B = {x/2x - 5 ≤ 30 ; x ∈ IN}
Hallar el n (A ∩ B).

A) 17 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

Ejercicio 11 : Si: A = {1 , 2, 5, 9}

B = {2 , 3, 4, 5, 6, 7} Λ C = {4 , 5 , 6, 8 , 9}

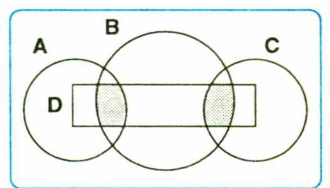
Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

A) 4 , 5, 6
B) 2 , 3, 4, 5
C) 2 , 5 , 9
D) 5 , 6 , 7 , 8
E) 4 , 5 , 6

Ejercicio 12 : Si: A = {1 , 2 , 3, 4, 5} ; B = {3 , 4, 5 ,6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11}; C = {9 , 10 , 11 , 12 , 13} Λ D = {2 , 4 , 7 , 10 , 12}

Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

A) 3 , 4 , 5
B) 4 , 7 , 10
C) 4 , 10
D) 7 , 10 , 12
E) 6 , 7 , 8

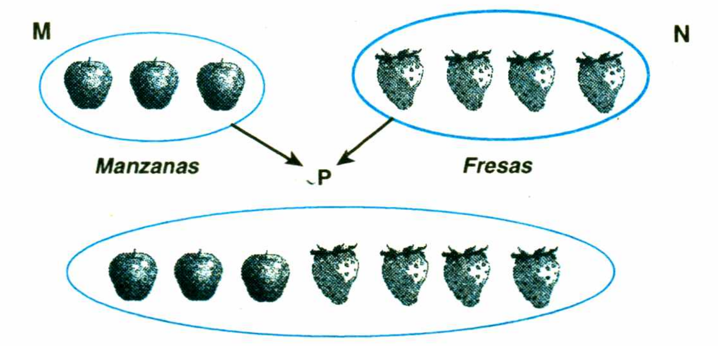


Clave de Respuestas

1. D	**2. C**	**3. D**	**4. B**	**5. D**
6. C	**7. D**	**8. A**	**9. D**	**10. C**
11. C	**12. C**			

1.7 REUNIÓN O UNIÓN DE CONJUNTOS

Observa estos conjuntos:



Tenemos un conjunto **M** de manzanas y otro conjunto **N** de fresas. Lo juntamos todos para formar un sólo bloque o conjunto **P** que se llama **Reunión de los Conjuntos M y N.** La operación realizada se representa

Así: $M \cup N = P$

(El símbolo: "$\cup$" se lee: **Reunión**)

Definición: *La reunión de dos conjuntos **A** y **B** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a **A** ó pertenecen a **B** ó a ambos. Se denota por "**A ∪ B**" y se lee: "A unión B".*

En forma simbólica se denota:

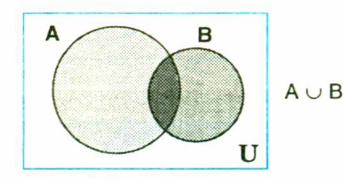
$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$

Así pues la Reunión de conjuntos está íntimamente relacionada con la **Disyunción** "O", cuya abreviatura lógica simbólica es: "v".

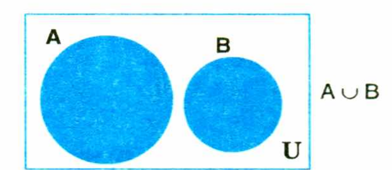
$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Se lee: "Reunión de los conjuntos A y B, es conjunto de todos los elementos x, tal que x pertenece a A ó x pertenece a B".

1.7.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



A ∪ B

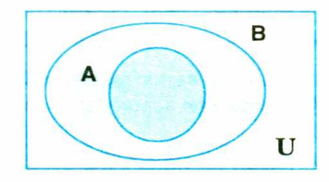


A ∪ B

Recuerda:

*Que los **Conjuntos Disjuntos** no tienen intersección entre sí, mientras que los **Conjuntos no Disjuntos** sí tienen intersección entre sí:*

Si: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$



Ejemplo 1: Hallar el conjunto: $A \cup B$; sabiendo que: $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ $\wedge$ $B = \{2; 3; 4; 6; 7\}$

Resolución:

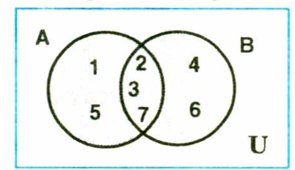
La unión de dos conjuntos es:

$A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$

$B = \{2; 3; 4; 6; 7\}$

$\Rightarrow$ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Interpretación Gráfica



Ejemplo 2: Hallar el conjunto: $R \cup P$; sabiendo que:

$R = \{x \in IN/5 < x < 10\}$; $P = \{x \in IN/2 \leq x \leq 5\}$

Resolución:

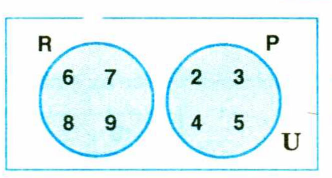
R = {x ∈ IN/5 < x < 10} ; los valores que toma "x" que sean mayores que 5 pero menores que 10 son: 6, 7, 8, 9. ∴ **R = {6; 7; 8; 9}**

P = {x ∈ IN/2 ≤ x ≤ 5} ; los valores que toma "x" que sean mayores o iguales a 2 pero menores o iguales que 5 son: 2, ,3, 4, 5. ∴ **P = {2; 3; 4; 5}**

Luego:

R ∪ P = {6; 7; 8; 9} ∪ {2; 3; 4, 5}

∴ **R ∪ P = {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}**



R ∪ P

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto: M ∪ N; sabiendo que:

M = {x ∈ IN/3 < x ≤ 9} ∧ N = {x ∈ IN/4 < x < 6}

Resolución:

M = {x ∈ IN/3 < x ≤ 9} ; los valores que toma "x" que sean mayores que 3, pero menores o iguales que 9 son: 4, 5, 6, 7, 8, 9. ∴ **M = {4; 5; 6; 7; 8; 9}**

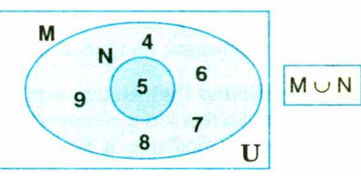
N = {x ∈ IN/4 < x < 6} ; el valor que toma "x" que sea mayor que 4, pero menor que 6 es el 5. ∴ **N = {5}**

Luego:

M = {4; 5; 6; 7; 8; 9}
N = {5}

M ∪ N = {4, 5; 6; 7; 8; 9}

Interpretación Gráfica



M ∪ N

1.7.2 PROPIEDADES DE LA REUNIÓN O UNIÓN DE CONJUNTOS

1º **PROPIEDAD CONMUTATIVA:** Dados los conjuntos: A = {3; 4} ∧ B = {3; 7}

A ∪ B = {Elementos comunes y no comunes a A ∧ B} = {3; 4; 7}
B ∪ A = {Elementos comunes y no comunes a B ∧ A} = {3; 4; 7}

Observamos que ambos casos se obtienen el mismo conjunto {3; 4; 7} como resultado.

Luego: **A ∪ B = B ∪ A** PROPIEDAD CONMUTATIVA

2º **PROPIEDAD ASOCIATIVA:** Sean los conjuntos: A = {2; 3}; B = {4; 5} ∧ C = {2; 4; 6}

Si queremos "Reunir" los tres conjuntos en uno solo, la razón nos dice que podemos reunir primero A con B y luego el resultado con C.

Así: $A \cup B = \{2; 3\} \cup \{4; 5\} \Rightarrow A \cup B = \{2; 3; 4; 5\}$

Luego hallamos la reunión de $\underbrace{(A \cup B)}$ con $C = \{2; 3; 4; 5\} \cup \{2; 4; 6\}$

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ ...(I)

y si ahora efectuamos primeros la reunión de B con C y el resultado con A tenemos:

$B \cup C = \{4; 5\} \cup \{2; 4; 6\} \Rightarrow B \cup C = \{2; 4; 5; 6\}$

Luego, hallemos la reunión de A con $(B \cup C) = \{3; 4\} \cup \{2; 4; 5; 6\}$

$\therefore$ $A \cup (B \cup C) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ ...(II)

Como se observará en las expresiones (I) y (II) se ha obtenido el mismo resultado es decir:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **Propiedad Asociativa**

1.7.3 OTRAS PROPIEDADES

a). **Propiedad de Idempotencia:** Dice: "cualquier conjunto reunido consigo mismo es igual al mismo conjunto" Es decir: $A \cup A = A$

b). **Propiedad:** La reunión de cualquier conjunto A con el conjunto vacío, es igual al mismo conjunto A. Es decir: $A \cup \phi = A$

c). **Propiedad:** Cualquier conjunto A reunido con el conjunto universal, es igual al conjunto universal. Asi: $A \cup U = U$

d). **Propiedad Distributiva con Respecto a la Intersección:** La reunión e intersección de conjuntos se puede conectar mediante la siguiente propiedad: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplo: Dado los conjuntos: $A = \{2; 3\}$; $B = \{4; 5\} \wedge C = \{2; 4; 6\}$. Hallar: $A \cup (B \cap C)$

Resolución:

- *Primero hallamos:* **"B ∩ C"**

$\left.\begin{array}{l} B = \{4; 5\} \\ C = \{2; 4; 6\} \end{array}\right\}$ $B \cap C = \{4\}$

- Luego: **Hallamos: "A ∪ (B ∩ C)"**

$\left.\begin{array}{l} A = \{2; 3\} \\ (B \cap C) = \{4\} \end{array}\right\}$ $A \cup (B \cap C) = \{2; 3; 4\}$ ...(α)

Ahora, calculemos en forma independiente: "(A ∪ B)" y "(A ∪ C)"

$(A \cup B) = \{2; 3\} \cup \{4; 5\} \Rightarrow A \cup B = \{2; 3; 4; 5\}$

$(A \cup C) = \{2; 3\} \cup \{2; 4; 6\} \Rightarrow A \cup C = \{2; 3; 4; 6\}$

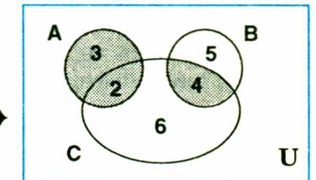
Luego, interceptamos (A ∪ B) con (A ∪ C)

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2; 3; 4\}$ ...(β)

Como se observara en las expresiones (α) y (β) se ha obtenido el mismo resultado.

$A \cup (B \cap C)$

Interpretación Gráfica



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE UNIÓN DE CONJUNTOS

Ejercicio : Dado los conjuntos: A = {3, 5, 6} ; B = {1, 2, 4, 5, 6} ∧ C = {2, 3, 5, 6,7}

Hallar y representar gráficamente: **a)** A ∪ B **b)** B ∪ C **c)** A ∪ B ∪ C

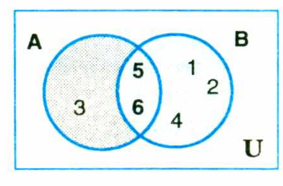
Resolución:

a). Calculamos: A ∪ B

A = {3, 5, 6} B = {1, 2, 4, 5, 6}

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(Interpretación Gráfica)

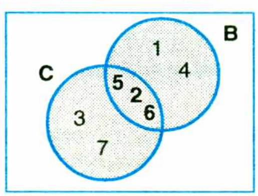


b). Calculamos: B ∪ C

B = {1, 2, 4, 5, 6} C = {2, 3, 5, 6, 7}

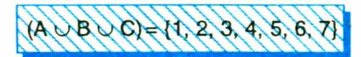
B ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(Interpretación Gráfica)

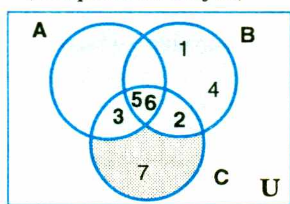


c). Calculamos: (A ∪ B) ∪ C

(A ∪ B ∪ C)= {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∪ {2, 3, 5, 6, 7}


(A ∪ B ∪ C)= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

(Interpretación Gráfica)



Ejercicio 2 : Dados los conjuntos: P = {x ∈ IN/12 ≤ x < 25; x es múltiplo de 3}
Q = {x ∈ IN/20 ≤ x < 32; x es múltiplo de 6} Hallar: P ∪ Q

Resolución:

- De la expresión: $12 \leq x < 25$; los valores que toma "x" son: 12, 13, 14, 15, 16,……, 24. Ahora buscamos los números que son múltiplos de 3, siendo estos: 12, 15, 18, 21 y 24. ∴ **P = {12, 15, 18, 21, 24}**

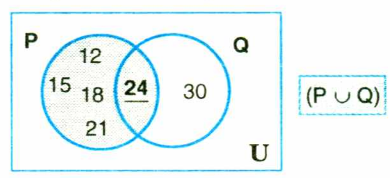
- De la expresión: $20 \leq x < 32$; los valores que toma "x" son: 20, 21, 22, 23,……, 31. Ahora buscamos los números que son múltiplos de 6, siendo estos: 24 y 30. ∴ **Q = {24; 30}**

Luego:

P ∪ Q = {12, 15, 18, 21, <u>24</u>} ∪ {<u>24</u>, 30}

∴ **P ∪ Q = {12, 15, 18, 21, 24, 30}**

Representación Gráfica



Recuerda que:

- *Un número es múltiplo de "**K**", cuando al dividirse dicho número entre "**K**", resulta una división exacta.*
- *También se dice que un número es múltiplo de **K**, cuando es de la forma "K . n", donde "n" toma los valores de: 1, 2, 3, 4, ...*

Ejemplo: *El número 12 es múltiplo de 3, cuando al dividirse dicho número entre 3, resulta una división exacta, veamos:*

12	3
0	4

Entonces: *12 si es múltiplo de 3.*

O también: $12 = 3 . n$ *; donde: n = 1, 2, 3, 4, ...*

*para que 12 sea múltiplo de 3, "n" debe tomar el valor de 4, osea: 12 = 3 . **4***

Ejercicio 3: Dado los conjuntos: A = {x ∈ IN/x < 7}; B = {x ∈ IN/3 ≤ x < 9} ∧ C = {x ∈ IN/5x = 20}. Hallar: A ∪ B ∪ C y representar gráficamente.

Resolución:

- Hallamos los elementos de cada conjunto, se tiene:

A = {x ∈ IN/x < 7} ⇒ **A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}**

B = {x ∈ IN/3 ≤ x < 9} ⇒ **B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}**

C = {x ∈ IN/5x = 20} ⇒ **C = {4}**

- Acontinuación hallamos: A ∪ B

A = {0, 1, 2, <u>3</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>}

B = {<u>3</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, 7, 8}

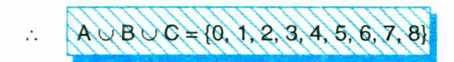
A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

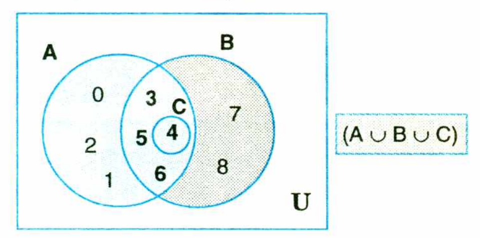
- Luego, hallamos $(A \cup B) \cup C$

Representación Gráfica

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$C = \{4\}$

$\therefore$ 
$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



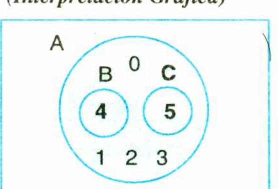
(A ∪ B ∪ C)

Ejercicio 4: Hallar la reunión de los siguientes conjuntos: $A = \{x \in IN / x \leq 5\}$; $B = \{x \in IN / x^2 = 16\}$ $\wedge$ $C = \{x \in IN / x - 3 = 2\}$

Resolución:

- De la expresión: $x \leq 5$, los valores que toma "x" son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ya que "x" es un número natural. ➠ $\therefore$ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- De la expresión: $x^2 = 16$, el valor que toma "x" es 4. ➠ $\therefore$ $B = \{4\}$
- De la expresión: $x - 3 = 2$; el valor que toma "x" es 5. ➠ $\therefore$ $C = \{5\}$

(Interpretación Gráfica)



(A ∪ B ∪ C)

De donde:

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, \underline{4}, 5\} \cup \{\underline{4}\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Luego: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$

$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{5\}$ $\therefore$ $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Recuerda que:

Toda ecuación de la forma:
$x^2 = K$; "x" toma dos valores uno positivo y el otro negativo.

O sea: $x^2 = K \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{K}$

Ejemplo: *Si: $x^2 = 16$* *Entonces:* $x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow$ $x = \pm 4$

Como se podrá observar "x" toma dos valores +4 y - 4; pero en este caso sólo tomamos +4; puesto que nos hablan de números naturales (IN)

TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

Ejercicio 1 : Dados los conjuntos:

$A = \{x/4 \leq x^2 \leq 100;\ x \in IN\}$
$B = \{x/2x - 1 \leq 11\ ;\ x \in IN\}$

Hallar el $n(A \cup B)$

Resolución:

Rpta. 11

Ejercicio 2 : Dado los conjuntos:

$P = \{x/x \text{ es dígito y } 3 \leq x \leq 8\}$

$Q = \{x \in IN / x - 3 = 2\} \wedge R = \left\{x \in IN / \frac{x-1}{2} = 3\right\}$

Hallar: $(P \cup Q) \cap R$

Resolución:

Rpta. {7}

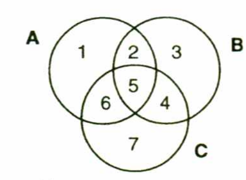
Ejercicio 3 : Se tiene los siguientes datos:

$n(M) = 32$; $n(N) = 27$ y $n(M \cap N) = 11$; Entonces el número de elementos de $M \cup N$ es:

Resolución:

Rpta. 48

Ejercicio 4 : Del siguiente diagrama. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $(A \cap B) \cup C$.



Resolución:

Rpta. 5

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE UNIÓN DE CONJUNTOS

NIVEL I

Ejercicio 1: Dados los conjuntos:

A = {x ∈ IN/x es múltiplo de 5 y 4 < x < 21}
B = {x ∈ IN/x es múltiplo de 4 y 3 < x < 30}
¿Cuántos elementos tiene el conjunto: A ∪ B?

A) 11 **B)** 7 **C)** 10 **D)** 9 **E)** 15

Ejercicio 2: Dados los conjuntos:

A = {x/x es dígito y 2 ≤ x ≤ 6}
B = {x ∈ IN/x^2= 9} Λ C = {x ∈ IN/x - 2= 4}

Hallar: (B ∪ C) ∩ A

A) {2, 4, 5} **B)** {3, 4, 5} **C)** {3, 6}
D) {2, 3, 4, 5, 6} **E)** N.A.

Ejercicio 3: Dados los conjuntos:

A = {x/x es letra de la palabra papaya}
B = {x/x es letra de la palabra plátano}
C = {x/x es letra de la palabra piña}

Hallar: (A ∩ B) ∪ C

A) {a, p, y} **B)** {p, l, t, n, ñ} **C)** {a, i, p, ñ}
D) {a, i, p} **E)** N.A

Ejercicio 4: ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede tener:
(P ∪ Q) ∩ R.

Si: n(P) = 5; n(Q) = 3 y n(R) = 8? (Q, R y P son conjuntos?

A) 13 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 8 **E)** 11

Ejercicio 5: ¿Cuál es el mínimo número de elementos que puede tener: (A ∩ B) ∪ C; Si: n(A) = 5, n(B) = 4 y n(C) = 3?

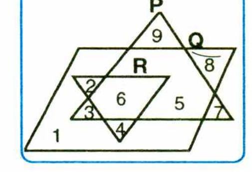
(A, B y C son conjuntos, además: n(A) significa el número de elementos del conjunto A)

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 12

Ejercicio 6: Si el conjunto A tiene cinco elementos y el conjunto B, tiene cuatro elementos. ¿Cuál de los siguientes enunciados podría ser verdadero?

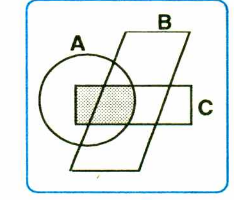
A) A ∪ B tiene 10 elementos
B) B ∪ A tiene 1 elemento
C) A ∪ A tiene 9 elementos
D) B ∪ A tiene 9 elementos
E) A ∪ B tiene 2 elementos

Ejercicio 7: Del siguiente diagrama:
Hallar: "(P ∪ R) ∩ Q"



A) {2, 4, 6}
B) {2, 4, 5, 6}
C) {5, 6}
D) {2, 3, 4, 5, 6}
E) N.A.

Ejercicio 8: Si: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 11} y C = {3, 4, 5, 9, 10}
Entonces: Cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

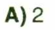


A) 4, 5 y 9
B) 3, 4 y 5
C) 3, 4, 5 y 9
D) 1, 2, 3, 4 y 5
E) N.A.

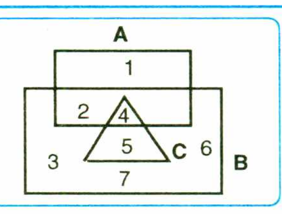
Ejercicio 9: Dado los conjuntos A y B, se tiene que: A ⊂ B; 3n (A) = n(B) y n (A ∪ B) = 15. ¿Cuántos elementos tiene A?

A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 6

Ejercicio 10: Del siguiente diagrama. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto (A ∩ B) ∪ C?


A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

E) 6

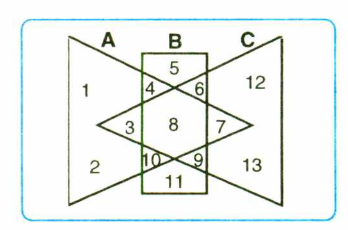


Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. C	4. D	5. B
6. D	7. D	8. B	9. A	10. B

NIVEL II

Ejercicio 1: Del siguiente diagrama hallar: "(A ∩ B ∩ C) ∪ C"



A) {3, 4, 7, 8} **B)** {3, 6, 7, 8, 9, 12, 13}
C) {3, 8, 7} **D)** {3, 6, 7, 9} **E)** N.A.

Ejercicio 2: Dado los conjuntos:

A = {x/x es un número de 2 dígitos y $10 \leq x < 18$}
B = {x ∈ IN/x es múltiplo de 5 y $3 < x \leq 25$}
C = {x ∈ IN/x es múltiplo de 2 y $3 \leq x^2 < 49$}
Hallar: (A ∩ B) ∪ C

A) {2, 3, 4, 5, 6, 7} **B)** {2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15}
C) {4, 6, 10, 15} **D)** {2, 4, 6, 10, 15}
E) N.A.

Ejercicio 3: Dado los conjuntos A y B, se tiene que: B ⊂ A; 3n(B) = 2n(A) y n (A ∪ B) = 15. ¿Cuántos elementos tiene B?

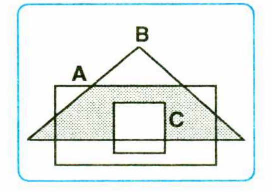
A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 8

Ejercicio 4: Dado los conjuntos A y B, se tiene que: 3n(A) = 5n(B) ; n(A ∩ B) = 4 y n(A ∪ B) = 12. ¿Cuántos elementos tiene A?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 9

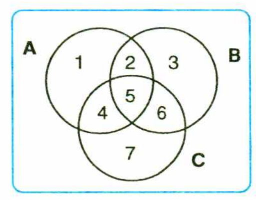
Ejercicio 5: Si: A = {2, 4, 7 , 8, 9} ; B = {1, 3, 5, 8, 9} ∧ C = {7, 8}. Entonces: Cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.

A) 1, 3, 4 y 5
B) 1, 3, 5 y 9
C) 1, 3 y 5
D) 1, 5 y 9
E) 2, 4, 8 y 9



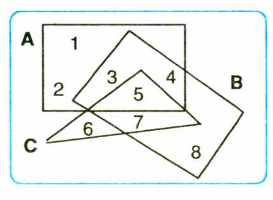
Ejercicio 6: Al efectuar: (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) ¿Qué regiones del diagrama se obtienen?

A) {1 , 2 , 4 , 6}
B) {1 , 2 , 3}
C) {1 , 2 , 6}
D) {1 , 2 , 4 , 5 , 6}
E) {2 , 3 , 6 , 7}



Ejercicio 7: Del siguiente diagrama hallar:
(A ∩ B) ∪ (B ∩ C)

A) {3 , 4 , 5 , 6 , 7}
B) {3 , 4 , 5 , 7 , 8}
C) {3 , 4 , 5 , 7}
D) {3 , 4 , 5, 7, 2}
E) {1 , 2 , 6, 7 , 8}

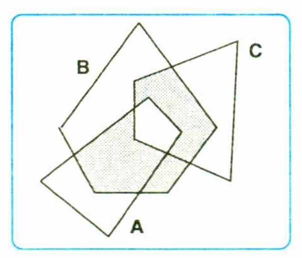


Ejercicio 8: Sea: U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {x/x ∈ U ∧ $x \leq 4$} B = {2x/2x ∈ U ∧ $x \leq 4$}
Hallar: n[(A ∪ B)]

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 9 : Si: A = {1 , 3 , 5} ; B = {2 , 3 , 4 , 5 , 6} ∧ C = {4 , 5 , 7}. Entonces: cuáles son los elementos que deben estar en la parte achurada del diagrama.



A) 1 , 2 , 4 , 7

B) 3, 4 , 5

C) 3 , 5 , 6

D) 1 , 3 , 5 , 6

E) 3 , 4 , 6

Ejercicio 10 : Al efectuar: $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ ¿Qué regiones del diagrama se obtiene?

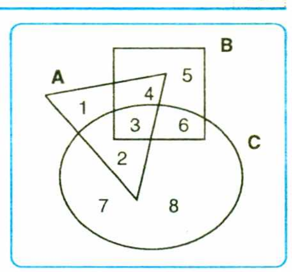
A) {1 , 2 , 3 , 4}

B) {3 , 4 , 5}

C) {3 , 4 , 6}

D) {3 , 4}

E) {1 , 5 , 7 , 8}



Clave de Respuestas

1. B	2. D	3. B	4. C	5. D
6. D	7. C	8. C	9. E	10. C

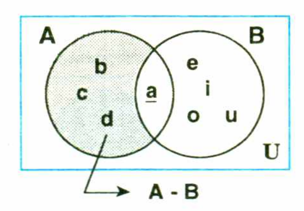
1.8 DIFERENCIA DE CONJUNTOS

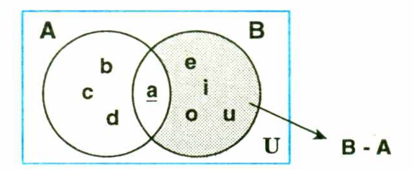
Sean los conjuntos: A = {a; b; c; d} ∧ {a; e; i; o; u}

Hallemos la diferencia: A - B, estará formado por los elementos de **A** que no pertenecen a **B.**

A - B = {b; c; d}

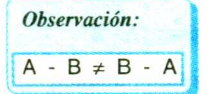
Como se observará en los dos conjuntos el único elemento común es **"a"** que en el diagrama estará en la intersección de los dos conjuntos.





B - A, estará formado por los elementos de **B** que no pertenecen a **A**.

B - A = {e; i; o; u}



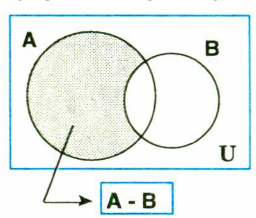
Definición: *La diferencia de dos conjuntos **A** y **B**, es el conjunto de los elementos que pertenecen a **A** y no pertenecen a **B**. Se denota por **"A - B"** y se lee: **"A** menos **B"**.*

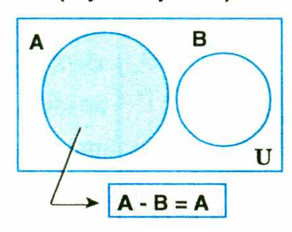
En forma simbólica se denota: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

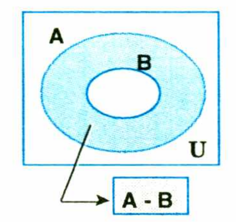
Se lee: "El conjunto A menos B, es igual al conjunto de los elementos "x" tal que "x" pertenece al conjunto A y "x" no pertenece al conjunto B".

1.8.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

(A y B no disjuntos) **(A y B disjuntos)**







Ejemplo 1: Dados los conjuntos: A = {1; 2; 3; 5} ∧ B = {2; 4; 5; 6; 7} Hallar: A - B.

Resolución:

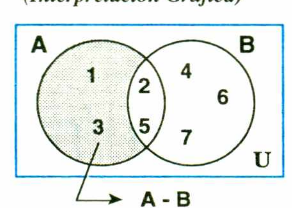
A = {1; 2; 3; 5}

B = {2; 4; 5; 6; 7}

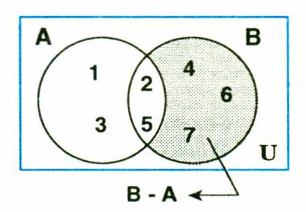
Como se observará los elementos comunes para ambos conjuntos son: 2 y 5; luego la diferencia "A - B" es lo que sobra del conjunto **A**, o sea:

A - B = {1; 3}

(Interpretación Gráfica)



(Interpretación Gráfica)



Y la diferencia **"B - A"** es lo que sobra del conjunto B, o sea:

B - A = {4; 6; 7}

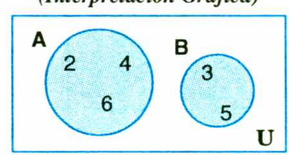
Ejemplo 2: Dados los conjuntos: A = {2; 4; 6} ∧ B = {3; 5} Hallar: "A - B"

Resolución:

Como se observa los dos conjuntos, son disjuntos o sea no hay ningún elemento en común.

Luego: A - B = A ➡ A - B = {2; 4; 6}

(Interpretación Gráfica)



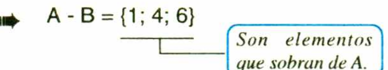
Ejemplo 3: Sean los conjuntos: A = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ∧ B = {2; 3; 5} Hallar: "A - B"

Resolución:

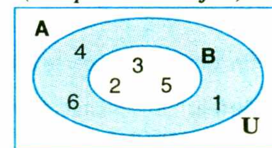
A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

B = {2; 3; 5}

➡ A - B = {1; 4; 6}



(Interpretación Gráfica)



Pero: B - A = ϕ = { }; no sobra ningún elemento en B.

Ejemplo 4 : Sean los conjuntos: $A = \{x \in IN/3 \leq x < 9\} \wedge B = \{x \in IN/2 < x \leq 8\}$. Hallar: "A - B"

Resolución:

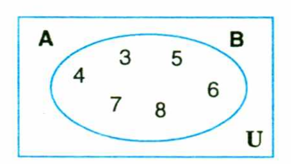
- De la expresión: $3 \leq x < 9$; los valores que toma "x" son: 3, 4, 5, 6, 7, y 8.

$\therefore$ $A = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

- De la expresión: $2 < x \leq 8$; los valores que toma "x" son: 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

$\therefore$ $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Luego: $A - B = \phi = \{\ \}$



1.9 DIFERENCIA SIMÉTRICA:

DEFINICIÓN: Dado los conjuntos A y B definimos "el complemento diferencia de A y B, denotada por $A \Delta B$, al conjunto: $(A - B) \cup (B - A)$

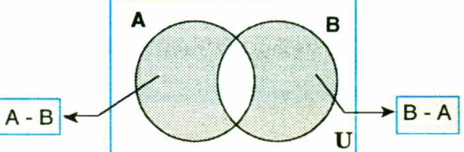
Es decir:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
ó
$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Se lee:

"La diferencia simétrica de A y B"

Interpretación Gráfica



Ejemplo 1 : Sean los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 6\} \wedge B = \{3, 5, 7, 8\}$. Hallar: "$A \Delta B$"

Resolución:

$A = \{1; 3; 5; 6\}$
$B = \{3; 5; 7; 8\}$

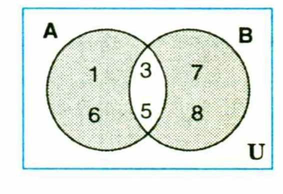
$A - B = \{1; 6\}$

$B - A = \{7; 8\}$

Luego: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \Delta B = \{1; 6\} \cup \{7; 8\}$ $\therefore$ $A \Delta B = \{1; 6; 7; 8\}$

Interpretación Gráfica



Ejemplo 2 : Sean los conjuntos: $A = \{2; 3; 4; 6\} \wedge B = \{2; 4; 6; 3; 5\}$ Hallar: $A \Delta B$

Resolución:

$A = \{2; 3; 4; 6\}$
$B = \{2; 4; 6; 3; 5\}$

$A - B = \phi = \{\ \}$

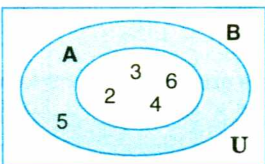
$B - A = \{5\}$

Luego: $A \Delta B = \underbrace{(A - B)} \cup \underbrace{(B - A)}$

$A \Delta B = \phi \cup \{5\}$

$\therefore$ $\boxed{A \Delta B = \{5\}}$

(Interpretación Gráfica)



1.10 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO:

Es lo que falta al conjunto para ser igual al **Conjunto Universal** (U), si el conjunto es **A** su complemento se denota **A'**, también se usan las notaciones:

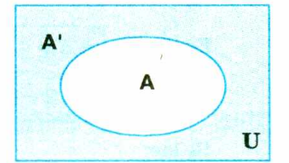
$$\overline{A} = C_U^A = A^c$$

En forma simbólica se denota: $A' = U - A = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$

1.10.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

> *Nota:* *Si un conjunto A esta incluido en otro conjunto B, se puede hallar también el complemento de A con respecto a B; cuya notación se acostumbra a indicar como:*
>
> $C_B^A = B - A$ *; se lee: "Complemento de **A** con respecto a **B**, es igual a; **B** menos **A**".*

(Diagrama de Venn-Euler)



Ejemplo 1: Sea: U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} y los conjuntos:

A = {1; 3; 5; 7} ; B = {x ∈ U/4 < x < 8} ∧ C = {2; 4; 6; 8; 10} Hallar: **a)** A' **b)** B' **c)** C'

Resolución:

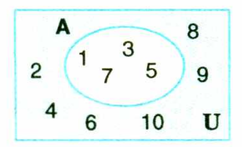
Este problema nos da a entender que vamos a hallar el complemento de los conjuntos A, B y C con respecto al conjunto Universal (U).

a) U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

A = {1; 3; 5; 7}

A ' = U - A = {2; 4; 6; 8; 9; 10}

Interpretación Gráfica

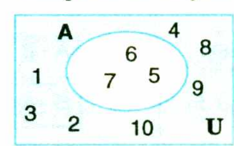


b) U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

B = {x ∈ U/4 < x < 8} ⇒ B = {5; 6; 7}

B ' = U - B= {1; 2; 3; 4; 8; 9; 10}

Interpretación Gráfica



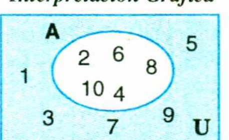
c)

U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

C = {2; 4; 6; 8; 10}

C ' = U - C = {1; 3; 5; 7; 9}

Interpretación Gráfica



Ejemplo 2: Sea: U = {x ∈ IN/x ≤ 10) y los conjuntos: A = {x ∈ IN/x es número impar < 11} Λ B = {x ∈ IN/x < 10}

Hallar: **a)** A' **b)** B' **c)** C_B^A **d)** (A ∩ B)'

Resolución:

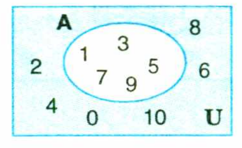
a)

U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

A = {1; 3; 5; 7; 9}

A ' = U - A = {0; 2; 4; 6; 8;10}

Interpretación Gráfica



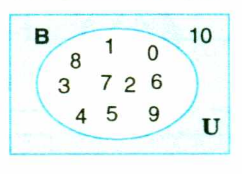
b)

U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

B ' = U - B = {10}

Interpretación Gráfica



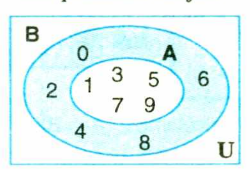
c)

B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

A = {1; 3; 5; 7; 9}

C_B^A = B - A = {0; 2; 4; 6; 8}

Interpretación Gráfica



d) U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

A = {1; 3; 5; 7; 9}

B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

A ∩ B = {1; 3; 5; 7; 9}

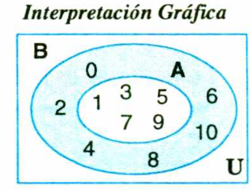
Luego, hallamos el complemento A ∩ B con respecto al conjunto Universal (U).

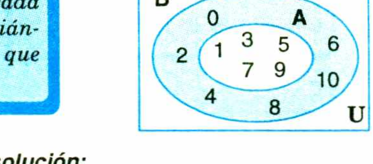
(A ∩ B)' = U - (A ∩ B)

= {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} - {1; 3; 5; 7; 9} ∴ (A ∩ B)' = {0; 2; 4; 6; 8; 10}

Recomendación: *Para sombrear regiones geométricas que corresponden a conjuntos, es conveniente numerar cada Región establecida en el conjunto Universo. Luego guiándonos por esta numeración determinaremos la región que corresponde a un conjunto dado.*

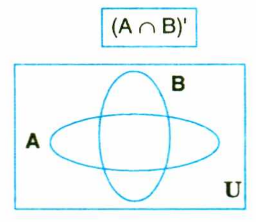
Interpretación Gráfica





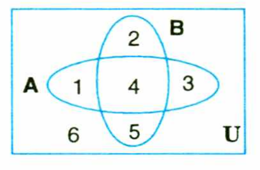
Ejemplo 1 : En el diagrama que se muestra, sombrear la región que corresponde al conjunto:

$(A \cap B)'$

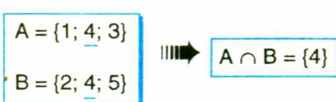


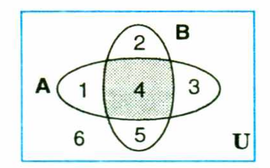
Resolución:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado, así:



2. Ahora, hallamos las regiones que corresponden al conjunto $A \cap B$ Del diagrama se tiene:



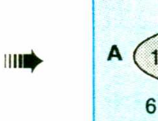


3. Luego calculamos: $(A \cap B)'$

$$(A \cap B)' = \underbrace{U}_{} - \underbrace{(A \cap B)}_{}$$

$$= \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} - \{4\}$$

$\therefore$ $(A \cap B)' = \{1; 2; 3; 5; 6\}$

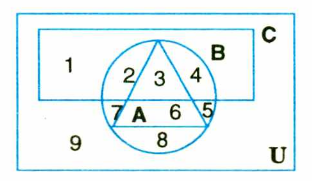


Ejemplo 2 : En el diagrama que se muestra sombrear la Región que corresponde al conjunto:

$(B - A) \cap (C \cap B)'$

Resolución:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado, así:



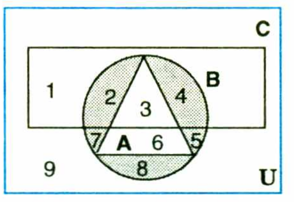
2. Ahora, calculamos: "B - A"

- Del diagrama se tiene:

B = {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}

A = {3; 6}

B - A = {2; 4; 5; 7, 8}

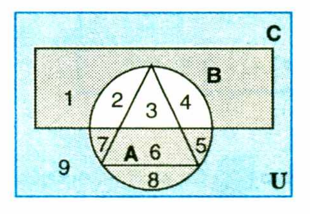


3. Calculamos: (C ∩ B)' del diagrama:

C = {1; 2; 3; 4}

B = {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}

(C ∩ B) = {2; 3; 4}



Luego: (C ∩ B)' = U - (C ∩ B) = {1; 2; 3; 4; 5; 6, 7; 8; 9} - {2; 3; 4}

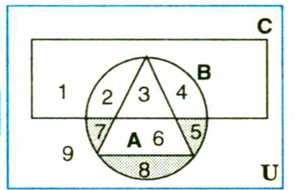
∴ (C ∩ B)' = {1; 5; 6; 7; 8; 9}

4. Por último hallamos: (B - A) ∩ (C ∩ B)'
Siendo:

B - A = {2; 4; 5; 7; 8}

(C - B)' = {1; 5; 6; 7; 8; 9}

∴ (B - A) ∩ (C ∩ B)' = {5; 7; 8}



Ejemplo 3: En el diagrama que se muestra sombrear la región que corresponde al conjunto:

(P' ∩ Q) - M

Resolución:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado, así:

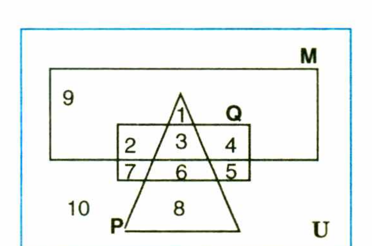
2. Del diagrama se tiene:

U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

P = {1; 3; 6; 8}

Donde: P' = U - P = {2; 4; 5; 7; 9; 10}

∴ P' = {2; 4; 5; 7; 9; 10}



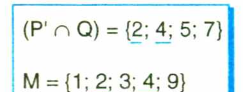
3. Calculamos: $(P' \cap Q)$

$P' = \{2; 4; 5; 7; 9; 10\}$

$Q = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$\Rightarrow$ $(P' \cap Q) = \{2; 4; 5; 7\}$

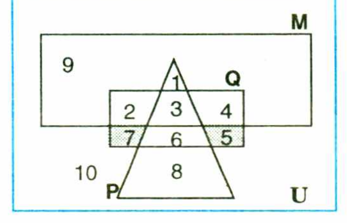
4. Por último calculamos: $(P' \cap Q) - M$



$(P' \cap Q) = \{2; 4; 5; 7\}$

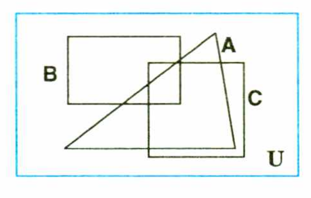
$M = \{1; 2; 3; 4; 9\}$

$\Rightarrow$ $(P' \cap Q) - M = \{5; 7\}$



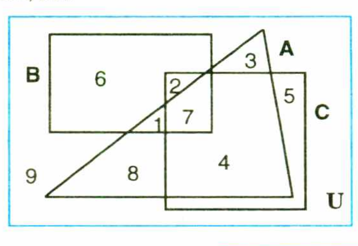
Ejemplo 4: En el diagrama que se muestra, sombrear la región que corresponde al conjunto:

$(A - B)' - (B - C)'$



Resolución:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado, así:



2. Del diagrama se tiene:

$A = \{1; 3; 4; 7; 8\}$

$B = \{1; 2; 6; 7\}$

$A - B = \{3; 4; 8\}$

3. Calculamos: $(A - B)'$

Del diagrama:

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$(A - B) = \{3; 4; 8\}$

$(A - B)' = U - (A - B)$

$\therefore$ $(A - B)' = \{1; 2; 5; 6; 7; 9\}$

4. Del diagrama:

$B = \{1; 2; 6; 7\}$

$C = \{2; 4; 5; 7\}$

$\Rightarrow$ $(B - C) = \{1; 6\}$

5. Calculamos: $(B - C)'$

Del diagrama:

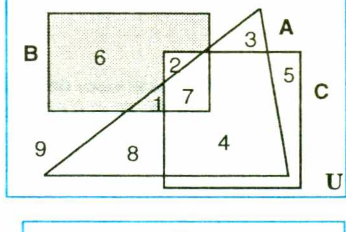
$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$(B - C) = \{1; 6\}$

$(B - C)' = U - (B - C)$

$\therefore$ $(B - C)' = \{2; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$

6. Por último calculamos: (A - B)' - (B - C)'

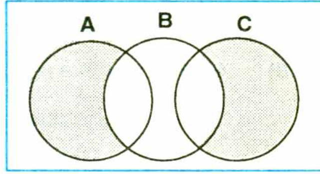


(A - B)' - (B - C)'

= {1; 2; 5; 6; 7; 9} - {2; 3; 4; 5; 7, 8; 9} = {1; 6}

∴ (A - B)' - (B - C)' = {1; 6}

Ejemplo 5: Según el esquema: ¿Qué conjunto corresponde a la parte achurada?



A) A - (C - B) **B)** (A ∪ C) – B
C) B - (A ∪ C) **D)** (A ∪ C) ∩ B
E) N.A.

Resolución:

Este tipo de problemas se resuelve de la manera siguiente:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado asi:

2. Luego hallamos el valor de cada uno de las 4 alternativas o sea (A, B, C y D) de estas 4, una debe ser la respuesta correcta veamos:

A) A - (C - B) = {1; 2} - {5} = {1; 2} **...Falso**

*Es **falso** porque la parte achurada no está compuesta por {1; 2} sino por {1; 5}*

B) (A ∪ C) – B = {1; $\overline{2}$; $\overline{4}$; 5} - {$\overline{2}$; 3; $\overline{4}$} = {1; 5} **...verdadera**

Es verdadera, porque la parte achurada, si está compuesta por {1, 5}

*Nota: como ya tenemos la respuesta correcta o **verdadera**, pues ya no es necesario continuar trabajando con las otras alternativas pero por esta vez lo vamos hacer como especie de práctica.*

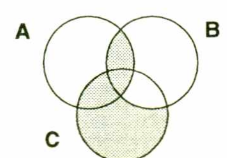
C) B - (A ∪ C) = {$\overline{2}$; 3; $\overline{4}$} - {1; $\overline{2}$; $\overline{4}$; 5} = {3} **...Falso**

*Es **falso** porque la parte achurada no esta compuesta por {3},sino por {1;5}*

D) (A ∪ C) ∩ B = {1; $\overline{2}$; $\overline{4}$; 5} ∩ {$\overline{2}$; 3; $\overline{4}$} = {2; 4} **...Falso**

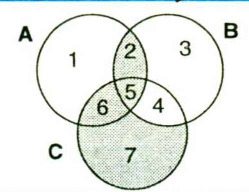
*Es **falso** porque la parte achurada no esta compuesta por {2; 4}, sino por {1;5}*

Ejemplo 6: La parte achurada del esquema corresponde a:



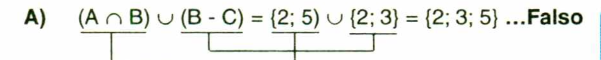
A) (A ∩ B) ∪ (B - C) **B)** (A - B) ∪ (C - B)
C) C - (A ∩ B) **D)** (C - B) ∪ (A ∩ B)
E) N.A.

1. Numeramos cada región en el diagrama dado, así:



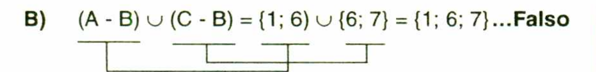
2. Luego, hallamos el valor de cada uno de las 4 alternativas o sea (A, B, C y D), de estas 4, una debe ser la respuesta correcta, veamos:

A) $(A \cap B) \cup (B - C) = \{2; 5\} \cup \{2; 3\} = \{2; 3; 5\}$ **...Falso**



Es falso porque la parte achurada no esta compuesta por {2; 3; 5}, si no por {2, 5; 6; 7}

B) $(A - B) \cup (C - B) = \{1; 6\} \cup \{6; 7\} = \{1; 6; 7\}$**...Falso**

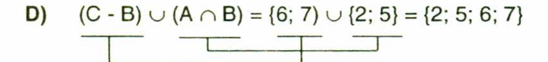


Es falso porque la parte achurada no esta compuesta por {1; 6; 7}, si no por {2, 5, 6, 7}

C) $C - (A \cap B) = \{4; 5; 6; 7\} - \{2; 5\} = \{4; 6; 7\}$ **...Falso**

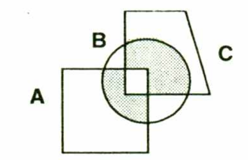
Es falso porque la parte achurada no está compuesta por {4; 6; 7} si no por {2; 5; 6; 7}

D) $(C - B) \cup (A \cap B) = \{6; 7\} \cup \{2; 5\} = \{2; 5; 6; 7\}$



*Es **verdadero** porque la parte achurada si está compuesta por {2; 5; 6; 7}*

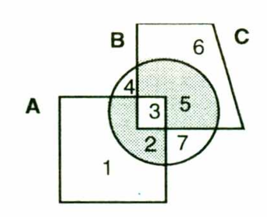
Ejemplo 7: Cuál de las siguientes expresiones representa a la parte sombreada.



A) $[(A - C) \cap B] \cap [(C - A) \cap B]$ **B)** $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
C) $(A - C) \cap (C - A)$ **D)** $(A \Delta C) \cap B$
E) $B - (A \cap C)$

Resolución:

1. Numeramos cada región en el diagrama dado así:



2. Luego, hallamos el valor de cada uno de las 5 alternativas (A, B, C, D y E), de estas una debe ser verdadera, veamos:

A) $[(A - C) \cap B] \cap [(C - A) \cap B] = [\{1; 2\} \cap \{2; 3; 4; 5; 7\}] \cap [\{5; 6\} \cap \{2; 3; 4; 5; 7\}]$

$= \{2\} \cap \{5\} = \phi$ **...(falso)**

B) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2; 3\} \cup \{3; 5\} = \{2; 3; 5\}$ **...(falso)**

C) $(A - C) \cup (C - A) = \{1; 2\} \cup \{5; 6\} = \{1; 2; 5; 6\}$ **...(falso)**

D) $(A \Delta C) \cap B = \{1; 2; 5; 6\} \cap \{2; 3; 4; 5; 7\} = \{2; 5\}$**...(verdadero)**

***Nota:** Como ya tenemos la respuesta correcta ya no es necesario seguir trabajando con la otra alternativa.*

∴ La respuesta correcta es la D

TALLER DE EJERCICIOS Nº 4

Ejercicio 1 : Sean "A" y "B" dos conjuntos tal que:
A - B = {1 ; 6} $\wedge$ A $\cup$ B = {0, 1, 3, 4, 6, 8}.
Hallar: B.

Resolución:

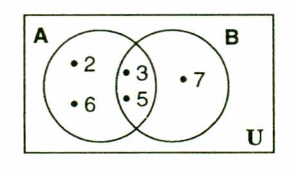
Rpta. {0 , 3 , 4 ,8}

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos:
A = {1 , 2 , 4 , 5 , 7} ; B = {1 , 3 , 5 , 6} $\wedge$ C = {4 , 5 , 6 , 8}, Determinar: (A - B) $\cup$ [(B - C) $\cap$ A]

Resolución:

Rpta. {1 , 2 , 4 , 7}

Ejercicio 3 : La operación: (A - B) $\cup$ B.



Es igual a:

Resolución:

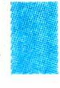
Rpta. {2 , 3 , 5, 6 , 7}

Ejercicio 4 : Dados los conjuntos:
U = {0 , 2 ,4 , 6, 8} ; A = {4 , 8} $\wedge$ B = {2 , 6}.
Determinar: (A' $\cap$ B) $\cup$ (B' $\cap$ A)

Resolución:

Rpta. {2 , 4 , 6 , 8}

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE DIFERENCIA, DIFERENCIA SIMÉTRICA Y COMPLEMENTO DE CONJUNTOS



NIVEL I

Ejercicio 1 : Dados los conjuntos:

A = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ; B = {4, 6, 8} $\wedge$
C = {2, 4, 5, 6, 7}. Hallar: "A - (C - B)"

A) {2, 5, 7} **B)** {3, 4, 6, 8} **C)** {2, 5, 6, 8}
D) {4, 6, 8} **E)** N.A.

Ejercicio 2 : Dados los conjuntos:

P = {a, b, c, d, e, f, g} $\wedge$ Q = {c, d, e, f, h}

Hallar: "P Δ Q"

A) {a, b, g} **B)** {c, d, e, f} **C)** {a, b, g, h}
D) {a, b, c, d, e, f} **E)** N.A

Ejercicio 3 : Dados los conjuntos:

A = {x $\in$ IN/3 < x < 18} $\wedge$ B = {x $\in$ IN/7 $\leq$ x < 19}

¿Cuántos elementos tiene el conjunto C_A^B?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 4 : Dados los conjuntos:

C = {x $\in$ IN/5 $\leq$ x < 13} $\wedge$ D = {x $\in$ IN/7 < x $\leq$ 20}

¿Cuántos elementos tiene el conjunto "D - C"?

A) 5 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Ejercicio 5 : Dados los conjuntos:

A = {3, 5, 7, 9} ; B = {1, 2, 4, 6, 8} $\wedge$
C = {3, 5, 7, 8, 9, 10}. Hallar: (A $\cup$ B) Δ C

A) {3, 5, 7, 9} **B)** {1, 2, 4, 6, 9}
C) {2, 3, 4, 5, 6} **D)** {1, 2, 4, 6, 10} **E)** N.A.

Ejercicio 6 : Dados los conjuntos:

A = {a, b, c, d} ; B = {e, f, g, h} $\wedge$ C = {b, d, e, g}

Hallar: "B Δ (A $\cup$ C)"

A) {a, b, c, d} **B)** {e, g} **C)** {a, b, c, d, f, h}
D) {e, f, g, h} **E)** N.A.

Ejercicio 7 : Dado el conjunto Universal:

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} y los conjuntos:

A = {1, 3, 5, 7, 9} $\wedge$ B = {2, 3, 4}. Hallar: (A - B)'

A) {1, 5, 7, 9} **B)** {2, 3, 4, 6, 8, 10}
C) {3, 4, 6, 8} **D)** (1, 5, 7, 9, 3, 6} **E)** N.A.

Ejercicio 8 : En la figura A, B y C son conjuntos no vacíos. Cuál de las siguientes expresiones representa el área achurada?

A) (A $\cap$ C) $\cup$ B
B) (A – C) $\cap$ B
C) (A $\cap$ C) – B
D) (A $\cap$ B) - C
E) (A $\cup$ C) - B

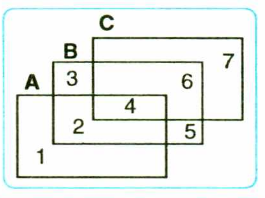
Ejercicio 9 : Dados los conjuntos:

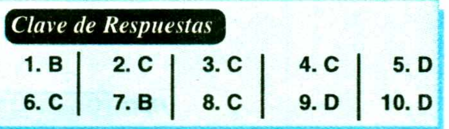
A = {x $\in$ IN/x es múltiplo de 4 y 3 < x < 17}
B = {x $\in$ IN/x es múltiplo de 6 y 5 < x $\leq$ 30} $\wedge$
C = {x $\in$ IN/x $\leq$ 15}. Hallar: (A Δ B) $\cap$ (B Δ C)

A) {4, 8, 12} **B)** {6, 12, 18, 24, 30}
C) {4, 8, 18, 24} **D)** {4, 8, 18, 24, 30} **E)** N.A.

Ejercicio 10 : Del siguiente Diagrama:
Hallar: "(A - B) $\cup$ (B - C)"

A) {1, 2, 4, 6}
B) {2, 3, 4, 5, 6}
C) {1, 2, 3, 4}
D) {1, 2, 3, 5}
E) {1, 2, 3, 4, 5, 6}



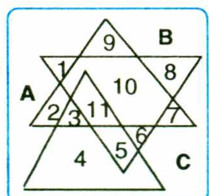


Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. C	4. C	5. D
6. C	7. B	8. C	9. D	10. D

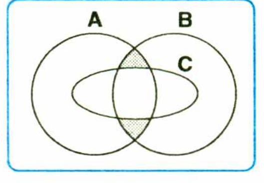
NIVEL II

Ejercicio 1: Del siguiente Diagrama:
Hallar: "(A - B) ∪ (B - C)"



A) {1, 8, 10}
B) {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10}
C) {2, 7, 9}
D) {2, 3, 10, 11}
E) {3, 4, 5, 6}

Ejercicio 2: A, B y C son conjuntos no vacíos. ¿Cuál operación corresponde a la parte achurada del diagrama?



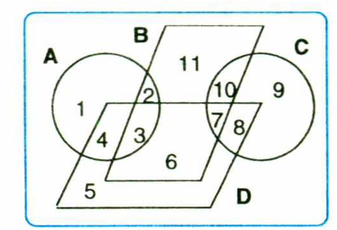
A) (A ∪ B) - C
B) (A - B) ∪ C
C) (A ∩ B) - C
D) C - (A ∪ B)
E) B ∪ (A - C)

Ejercicio 3: Dado el conjunto universal:

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} y los conjuntos: A = {4, 5, 7, 9} ∧ B = {3, 5, 7, 8, 9, 11}. Hallar: (A ∪ B)'.

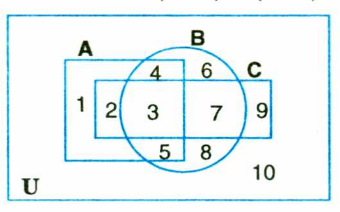
A) {1, 2, 6, 9} **B)** {1, 2, 6, 10, 12}
C) {2, 3, 4, 6, 9} **D)** {3, 4, 5, 7, 8, 9, 11}
E) N.A.

Ejercicio 4: Del siguiente diagrama.
Hallar: (B ∪ C)' - (A ∩ D)'



A) {2, 6, 7, 8, 9, 10, 11} **B)** {1, 5}
C) {4} **D)** {1, 4, 5}
E) N.A.

Ejercicio 5: Del siguiente diagrama.
Hallar: (C - A)' ∩ (A - B)'



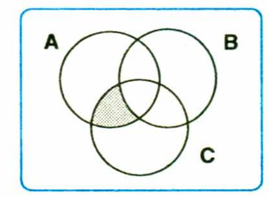
A) Ninguna **B)** {7, 9} **C)** {1, 2}
D) {3, 4, 5, 6, 8, 10} **E)** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}

Ejercicio 6: Sean los conjuntos:
A = {1 , 2, 3, 4} ∧ B = {2 , 4 , 5 , 6, 7}
¿Cuántos elementos tiene: (A ∪ B) - (A ∩ B)?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 7: La operación que corresponde al diagrama es:

I. (A - B) ∩ (C - B) **II.** (A ∩ C) - B **III.** (A ∩ B) - C



A) Sólo I
B) Sólo II
C) I y II
D) II y III
E) Todas

Ejercicio 8: Hallar: n [(A ∪ B) - C]; Si:

A = {1 , 2, 3, 4, 5, 6} ; B = {2, 4 , 6, 8, 10}
C = {n/n = 2K +1 ∧ 0 < K < 5}

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 9: U = {1, 2, 3, ... , 12}

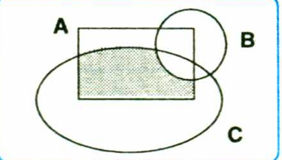
A = {2, 4 , 6, 9, 10, 12} ∧
B = {1, 2 , 5, 6, 8, 10, 11}

¿Cuántos elementos tiene: A' - B?

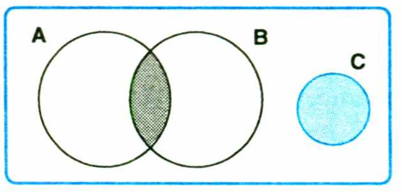
A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

Ejercicio 10: La parte sombreada corresponde a:

A) $(B \cap C) - A$
B) $(A \cap C) - B$
C) $(A \cap B) - C$
D) $(A \cup C) - B$
E) $(B \cup C) - A$



Ejercicio 11 : ¿Qué representa lo sombreado?



A) $(A \cup B) \cap C$
B) $(A \cup C') \cap (B \cup C')$
C) $(A - B)' \cap C$
D) $(A - B)' \cap (A \cup C)$
E) $(C - A) \cup B$

Ejercicio 12 : Para dos conjuntos; A y B, incluido en el universo U, tal que:

$n(A') = 12$; $n(A \cap B) = 3$; $n(B) = 11$; $n(U) = 20$.

Calcular: $n(A \Delta B)$.

A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

Clave de Respuestas

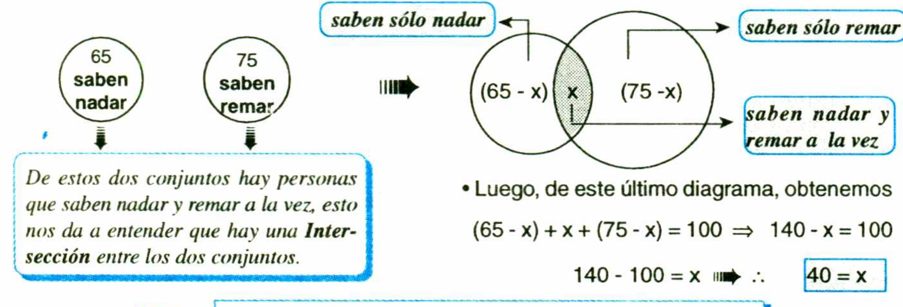
1. B	**2. C**	**3. B**	**4. A**	**5. D**
6. D	**7. C**	**8. B**	**9. E**	**10. B**
11. D	**12. A**			

OTROS TIPOS DE PROBLEMAS SOBRE CONJUNTOS

Problema 1 : De un grupo de 100 personas, 65 saben nadar y 75 saben remar. ¿Cuántas personas saben nadar y también remar?

Resolución:

- Este tipo de problema se resuelve con ayuda del diagrama de Venn - Euler, veamos:



- Luego, de este último diagrama, obtenemos

$(65 - x) + x + (75 - x) = 100 \Rightarrow 140 - x = 100$

$140 - 100 = x \Rightarrow \therefore \boxed{40 = x}$

Rpta. Los que saben nadar y remar a la vez son 40 personas

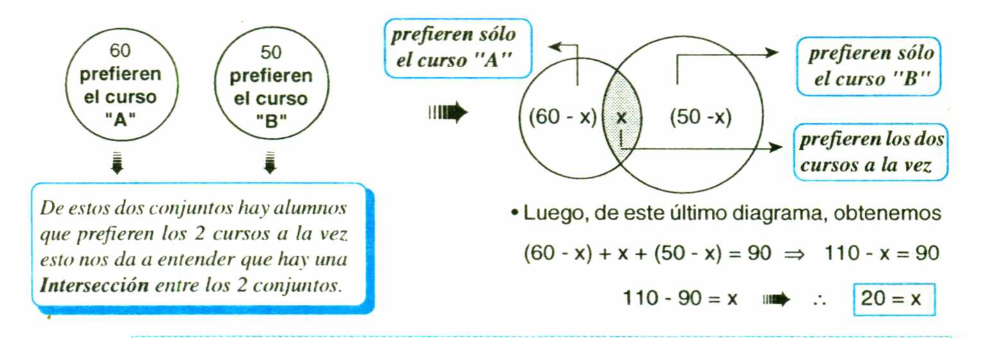
Problema 2 : En una encuesta a 110 alumnos del colegio sobre la preferencia de los cursos A y B se obtuvieron los siguientes resultados:

- 60 prefieren el curso "A"
- 50 prefieren el curso "B"
- 20 no prefieren ninguno de los dos cursos.

INDICAR: **a).** ¿Cuántos alumnos prefieren los dos cursos?
b). ¿Cuántos alumnos prefieren el curso "A" solamente?

Resolución:

Total de alumnos encuestados es 110, de los cuales 20 no prefieren ninguno de los dos cursos, siendo 90 los alumnos que prefieren dichos cursos (A y B).



• Luego, de este último diagrama, obtenemos

$(60 - x) + x + (50 - x) = 90 \Rightarrow 110 - x = 90$

$110 - 90 = x \Rightarrow \therefore \boxed{20 = x}$

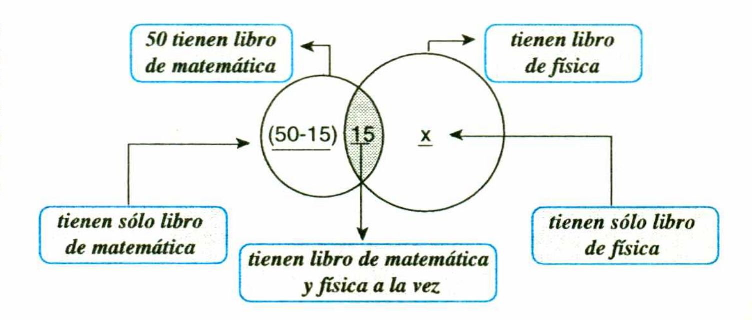
Rpta.
a). Los alumnos que prefieren los dos cursos son: $x = 20$
b). Los alumnos que prefieren solamente el curso "A" son: $60 - x = 60 - 20 = 40$

Problema 3 : De los 60 alumnos de un aula, 50 tienen libro de matemática y 15 de matemática y física.

a) ¿Cuántos tienen sólo el libro de matemática?
b) ¿Cuántos tienen libro de física?
c) ¿Cuántos tienen sólo el libro de física?
d) ¿Cuántos tienen un sólo libro?

Resolución:

Sabemos que de los 50 que tienen libro de matemática, hay 15 que tienen libro de matemática y física que son la Intersección de los dos conjuntos (ver diagrama).



Del diagrama obtenemos: (50 - 15) + 15 + x = 60

35 + 15 + x = 60 ⇒ 50 + x = 60 ➠ ∴ x = 10

Rpta.

a). Los alumnos que tienen sólo el libro de matemática son: 50 - 15 = 35
b). Los alumnos que tienen libro de física son: 15 + x = 15 + 10 = 25
c). Los alumnos que tienen sólo el libro de física son: x = 10
d). Los alumnos que tienen un solo libro son: (50 - 15) + x = 35 + 10 = 45

Problema 4 : En el colegio "San Miguel" de Piura se ha evaluado a 1 000 alumnos en las asignaturas de lenguaje, matemática y biología; obteniendose el siguiente resultado:

a). 680 alumnos aprobaron lenguaje
b). 320 alumnos aprobaron biología
c). 400 alumnos aprobaron sólo lenguaje
d). 50 alumnos aprobaron lenguaje y biología pero no matemática.
e). 170 alumnos aprobaron biología, y matemática pero no lenguaje.
f). 40 alumnos aprobaron biología, lenguaje y matemática.

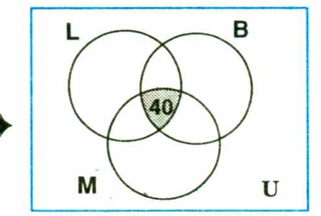
¿Cuántos alumnos aprobaron sólo matemática?

Resolución:

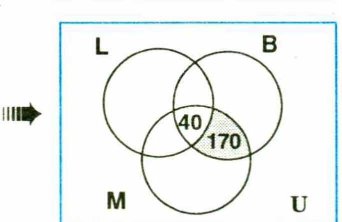
Para resolver este tipo de problemas es conveniente empezar la resolución por el dato (intersección de los tres conjuntos). Veamos:

f). "40 alumnos aprobaron biología, lenguaje y matemática", esto quiere decir que 40 alumnos son los elementos comunes (están en la intersección) de los tres conjuntos. Donde:

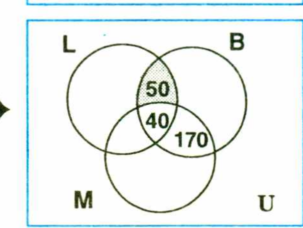
L = alumnos que estudian lenguaje
B = alumnos que estudian biología
M = alumnos que estudian matemática



e). "170 alumnos aprobaron biología y matemática pero no lenguaje" o sea que estos 170 alumnos son elementos comunes (están en la intersección) de los alumnos que aprobaron biología y matemática. (ver diagrama).

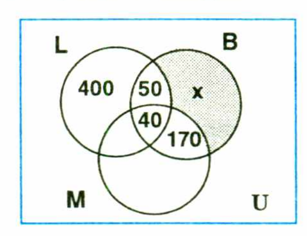


d). "50 aprobaron lenguaje y biología pero no matemática". El razonamiento es similar al anterior. Tenemos ya 40 que aprobaron lenguaje, biología y matemática pero como la condición es que no aprobarán matemática estos 50 alumnos pertenecen sólo a la intersección de los que aprobarán lenguaje y biología (ver diagrama)



c). "400 aprobaron solo lenguaje". Estos alumnos son elementos que pertenecen al conjunto exclusivo del lenguaje, es decir no son elementos comunes a los conjuntos "aprobaron biología" y/o "aprobaron matemática". (ver diagrama).

b). 320 aprobaron biología:

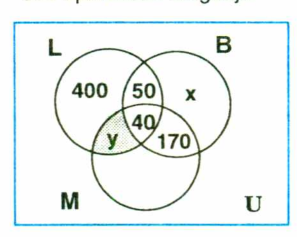


del gráfico tenemos:

$$50 + 40 + 170 + x = 320$$
$$260 + x = 320$$
$$x = 320 - 260$$

$\therefore$ $\boxed{x = 60}$ **(aprobaron sólo biología)**

a) "680 aprobaron lenguaje"

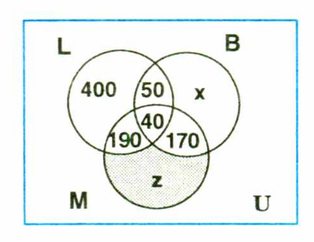


del gráfico tenemos:

$$400 + 50 + 40 + y = 680$$
$$490 + y = 680$$
$$y = 680 - 490$$

$\therefore$ $\boxed{y = 190}$ **(aprobaron sólo lenguaje y matemática)**

Como hay 1 000 alumnos podemos obtener cuantos alumnos aprobarán sólo matemática, procediendo de la siguiente manera:



del gráfico tenemos:

$$400 + 50 + 40 + 60 + 170 + 190 + z = 1\,000$$
$$910 + z = 1\,000$$
$$z = 1\,000 - 910$$

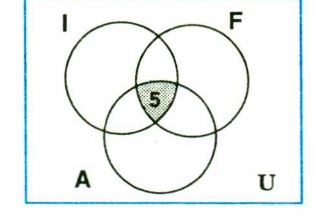
$\therefore$ $\boxed{z = 90}$ **(aprobaron sólo matemática)**

Rpta: Los alumnos que aprobaron sólo matemática son: 90

Problema 5: En un grupo de 55 personas, 25 hablan inglés, 32 francés, 33 alemán y 5 de los tres idiomas. ¿Cuántas personas del grupo hablan dos de estos idiomas, solamente?

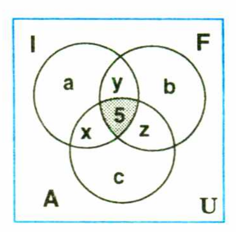
Resolución:

Como son 5 personas los que hablan los tres idiomas, esto quiere decir que es la intersección de los tres conjuntos (ver diagrama)



- Donde:
  I = personas que hablan inglés (25)
  F = personas que hablan francés (32)
  A = personas que hablan alemán (33)

- Ahora completamos cada región del diagrama con una letra de la manera siguiente:



- Del gráfico tenemos:

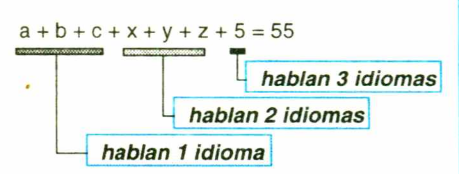
i) $a + x + y + 5 = 25$
ii) $b + y + z + 5 = 32$
iii) $c + x + z + 5 = 33$

sumamos miembro a miembro: Σ M.A.M.

Σ M.A.M. $a + b + c + x + y + z + x + y + z + 15 = 90$

$$a + b + c + x + y + z + x + y + z = 75 \quad \ldots(I)$$

Por Dato:



Donde: $a + b + c + x + y + z = 50 \quad \ldots(II)$

Reemplazamos (II) en (I): $50 + x + y + z = 75$

$$x + y + z = 25$$

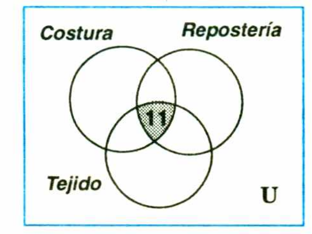
Rpta: Las personas que hablan dos de estos idiomas solamente son: 25

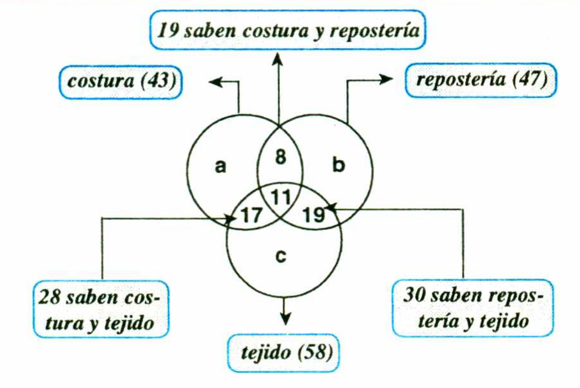
Problema 6 : Una encuesta realizada entre 82 madres de familia arroja el siguiente resultado: 43 saben costura, 47 repostería, 58 tejido, 19 costura y repostería, 28 costura y tejido, 30 repostería y tejido y 11 las tres ocupaciones. Indicar:

1.- ¿Cuántos saben solo costura?
2.- ¿Cuántos saben solo dos especialidades?
3.- ¿Cuántos no saben tejido?
4.- ¿Cuántos saben solo una de las tres especialidades?
5.- ¿Cuántos saben costura o tejido pero no repostería?

Resolución:

Lo más recomendable es atacar el problema por la intersección de los tres conjuntos; o sea: 11 saben las tres ocupaciones. (ver diagrama). Luego completamos el diagrama con los otros datos del problema.
Veamos:





Del gráfico:

i) $a + 8 + 11 + 17 = 43$ $\quad a + 36 = 43 \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{a = 7}$

ii) $b + 8 + 11 + 19 = 47$ $\quad b + 38 = 47 \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{b = 9}$

iii) $c + 17 + 11 + 19 = 58$ $\quad c + 47 = 58 \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{c = 11}$

Rptas:

1). personas que saben sólo costura son: $a = 7$
2). personas que saben sólo dos especialidades: $8 + 17 + 19 = 44$
3). personas que no saben tejido: $a + 8 + b = 7 + 8 + 9 = 24$
4). personas que saben sólo una de las tres especialidades:
$a + b + c = 7 + 9 + 11 = 27$
5). personas que saben costura o tejido pero no repostería:
$a + 17 + c = 7 + 17 + 11 = 35$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 5

Problema 1 : De un grupo de 80 personas; 30 leen la revista "A"; 70 leen la revista "B" y 25 leen las dos revistas. ¿Cuántos no leen ninguna de dichas revistas?

Resolución:

Rpta. 5

Problema 2 : De un grupo de 40 personas; se sabe que 15 de ellas no estudian ni trabajan, 10 personas estudian, 3 estudian y trabajan. ¿Cuántas de ellas realizan sólo una de las dos actividades?

Resolución:

Rpta. 22

Problema 3 : En una encuesta a 600 televidentes se supo que:

- 250 veían "24 horas"
- 220 veían "contrapunto"
- 100 veían los dos programas

¿Cuántos no veían ninguno de dichos programas?

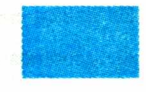
Resolución:

Rpta. 230

Problema 4 : De un grupo de 200 personas entre salseros y rockeros, a 120 no les gusta la salsa y a 130 no les gusta el rock. Si a 80 no les gusta ni la salsa ni el rock. ¿A cuántos les gusta ambos?

Resolución:

Rpta. 30



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE CONJUNTOS

NIVEL I

Problema 1 : De un grupo de 50 personas, 28 conocen Brasil y 32 conocen Argentina, además 15 personas conocen ambos países. ¿Cuántas personas no conocen ninguno de estos países?

A) 15 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 13

Problema 2 : De 60 estudiantes de un aula, 45 han aprobado la evaluación de matemática y 20 las de lenguaje y matemática. Indicar:

a) ¿cuántos aprobaron sólo matemática?
b) ¿cuántos aprobaron lenguaje?
c) ¿cuántos han aprobado sólo lenguaje?
d) ¿cuántos han aprobado un sólo curso?

A) 25, 15, 45, 40 **B)** 25, 15, 40, 45
C) 15, 25, 40, 45 **D)** 25, 45, 15, 40
E) 25, 35, 15, 40

Problema 3 : De un grupo de 22 estudiantes, hay 13 que practican natación y 10 practican atletismo, además se sabe que 2 alumnos no practican ningún deporte. ¿Cuántos practican sólo atletismo?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 10

Problema 4 : Durante el mes de julio, una señora compró 15 días carne de res, 22 días pollo y 13 días pescado, 5 días carne de res y pescado, 7 días pollo y pescado y 12 días carne de res y pollo. ¿Cuántos días compró las tres especies?

A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 12 **E)** N.A

Problema 5 : De 60 deportistas se observa que 24 de ellos practican fútbol, 26 practican básket y 25 practican vóley, 13 practican fútbol y básket; 10 practican básket y vóley, 9 practican fútbol y vóley. Si 6 practican los 3 deportes. ¿Cuántos no practican ninguno de estos deportes?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 10 **E)** 15

Problema 6 : De un grupo de 59 personas se observa lo siguiente:

a) 8 personas leen sólo el **"Comercio"**
b) 16 personas leen sólo la **"República"**
c) 20 personas leen sólo el **"Expreso"**
d) 7 personas leen el: **"Comercio y República"**
e) 8 personas leen el: **"Comercio y Expreso"**
f) 4 personas leen la: **"República y Expreso"**
g) 2 personas no leen ninguno de estos periódicos. ¿Cuántas personas leen la República y Comercio, pero no Expreso?

A) 25 **B)** 28 **C)** 29 **D)** 20 **E)** 24

Problema 7 : En una encuesta realizada a un grupo de 100 estudiantes de un Instituto de idiomas se obtuvo el siguiente resultado: Estudiaban español 28; alemán 30, francés 42, español y alemán 8; español y francés 10; alemán y francés 5; los tres idiomas 3. ¿Cuántos estudiantes toman el francés como único idioma de estudio?

A) 20 **B)** 30 **C)** 13 **D)** 32 **E)** 28

Problema 8 : En un pelea en donde intervienen, 100 hombres, 42 fueron heridos en la cabeza, 43 en el brazo, 32 en la pierna, 5 en la cabeza y brazo, 8 en el brazo y la pierna, 6 en la pierna y en la cabeza. ¿Cuántos fueron heridos en la cabeza, pierna y brazo a la vez?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Problema 9 : En un aula de 62 alumnos, 32 desaprobaron el examen de razonamiento matemático y 22 no aprobaron el de razonamiento verbal y 13 no aprobaron ninguno.

De los dos cursos, responda:

a). ¿cuántos aprobaron solo R.M?
b). ¿cuántos aprobaron solo R.V?
c). ¿cuántos aprobaron los dos cursos.
Las respuestas son respectivamente.

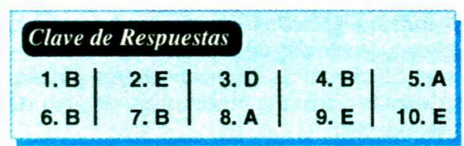
A) 9, 20, 39 **B)** 20, 9, 41 **C)** 19, 10, 20
D) 19, 9, 21 **E)** 9, 19, 21

Problema 10: De un grupo de estudiantes:

- 70 estudian inglés.
- 40 estudian química.
- 15 estudian matemática y química.
- 40 estudian matemática.
- 20 estudian matemática e inglés.
- 25 estudian inglés y química.
- 5 estudian los tres cursos.

¿Cuántos son los alumnos en total?

A) 100 **B)** 80 **C)** 85 **D)** 90 **E)** 95



Clave de Respuestas

1. B	**2. E**	**3. D**	**4. B**	**5. A**
6. B	**7. B**	**8. A**	**9. E**	**10. E**

NIVEL II

Problema 1: En una reunión 15 beben té y no beben café, y a 25 les gusta el té. Si hubieran 42 personas. ¿Cuántas personas beben café, pero no beben té?

A) 10 **B)** 27 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

Problema 2: Del conjunto de los 20 profesores del colegio "Miguel Grau", 10 enseñan matemática, 9 física y 7 química, 4 enseñan matemática y física, pero ninguno enseña matemática y química. ¿Cuántos profesores enseñan sólo Física?

A) 2 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 5 **E)** 0

Problema 3 : Un ingeniero Agrónomo hizo una encuesta a 130 agricultores para saber el número de los que cultivan arroz, algodón, verduras, obteniendo que 50 cultivan arroz, 66 cultivan algodón, 68 cultivan verduras, 23 cultivan arroz y algodón, 17 cultivan arroz y verduras, 30 algodón y verduras; 7 arroz, algodón y verduras. Se desea saber:

a). ¿Cuántos cultivan sólo arroz?
b). ¿Cuántos se dedican a un sólo cultivo?
c). ¿Cuántos no realizan ninguno de estos cultivos?

A) 71, 28, 65 **B)** 65, 49, 9 **C)** 17, 65, 9
D) 28, 65, 49 **E)** 28, 49, 64

Problema 4: En un colegio 100 alumnos han rendido 3 exámenes. De ellos 40 aprobaron el primero, 39 el segundo, y 48 el tercer examen, aprobaron 10 los 3 exámenes, 21 no aprobaron examen alguno; 9 aprobaron los dos primeros pero no el tercero, 19 no aprobaron los dos primeros exámenes pero si el tercero. ¿Calcúlese cuántos alumnos aprobaron sólo dos exámenes?

A) 27 **B)** 28 **C)** 25 **D)** 23 **E)** 22

Problema 5: En un salón de clase: 40 alumnos tenían lapiceros azules, 30 tenían lapiceros negros y 30 tenían lapiceros rojos, 8 tenían solamente lapiceros azules y negros; 6 tenían solamente negros y rojos; 12 tenían solamente lapiceros azules y rojos. Si 5 tenían los tres tipos de lapiceros y seis siempre escriben con lápices. ¿Cuántos alumnos tiene el salón?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 10 **E)** 15

Problema 6 : En un grupo de 50 personas se observó que los que sólo usan sombrero, los que sólo usan corbata y los que usan sombrero y corbata son respectivamente el doble, triple y cuádruple de los que no usan sombrero ni corbata. ¿Cuántos usan sombrero?

A) 25 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 40 **E)** 35

Problema 7 : De un total de 200 alumnos, 70

aprobaron física, 60 química, 50 biología, 75 sólo un curso, 9 física y química pero no biología, 22 sólo química y 23 física y biología. ¿Cuántos no aprobaron los 3 cursos?

A) 80 **B)** 79 **C)** 81 **D)** 60 **E)** 84

Problema 8 : En un grupo de 90 alumnos: 36 no llevan el curso de matemática, 24 no llevan el curso de lenguaje y 18 no llevan matemática ni lenguaje. ¿Cuántos alumnos llevan exactamente un sólo curso?

A) 22 **B)** 20 **C)** 26 **D)** 24 **E)** 30

Problema 9 : En una encuesta realizada a 60 alumnos, 20 tienen radio, 42 tienen televisor y 3 no tienen radio ni televisor. ¿Cuántos tienen solamente radio?

A) 5 **B)** 25 **C)** 18 **D)** 15 **E)** 12

Problema 10 : De un conjunto de 25 alumnos, se sabe que 5 no estudian ni hacen deporte, 13 personas estudian y 5 personas estudian y hacen deporte.

¿Cuántas de ellas realizan sólo una de las 2 actividades?

A) 7 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 20

Clave de Respuestas

1. E	2. B	3. C	4. B	5. C
6. B	7. C	8. D	9. D	10. D

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Dados los siguientes conjuntos: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $\wedge$ $C = \{1, 2, 3\}$. Hallar: $\{[(A \cup B) \cap (A \cup C)] - C\} \cup B'$

A) $\{1, 2, 3, 4\}$ **B)** $\{1, 2, 4, 5\}$ **C)** ϕ **D)** $\{1, 2, 3\}$ **E)** $\{3, 4, 5, 6, 7\}$

Resolución:

- Calculamos: $A \cup B$: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

- Calculamos: $A \cup C$: $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\}$

$\therefore$ $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Calculamos B' (B' significa complemento de B):

$B' = U - B \Rightarrow B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ➡ $\therefore$ $B' = \{1, 2\}$

Luego: $\{[A \cup B) \cap (A \cup C)] - C\} \cup B' = [\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\}] \cup \{1, 2\} = \{4, 5\} \cup \{1, 2\}$

$\therefore$ $\{[A \cup B) \cap (A \cup C) - C\} \cup B' = \{1, 2, 4, 5\}$ ***Rpta. B***

2. Determinar el siguiente conjunto por extensión: $A = \{2x/x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 10\}$

A) {4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20}
B) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ; 18, 20}
C) {1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
D) {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
E) {6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

Resolución:

De la expresión: $A = \{2x/x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 10\}$ → x toma los valores: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

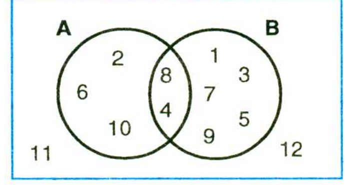
Luego, los valores que toma "x" los reemplazamos en la expresión:

A = {2x} = {2(2); 2(3); 2(4); 2(5); 2(6); 2(7), 2(8); 2(9); 2(10)}

x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

$\therefore$ A = {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} ***Rpta. D***

3. Si definimos $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
Hallar en el gráfico: $(A \Delta B)'$

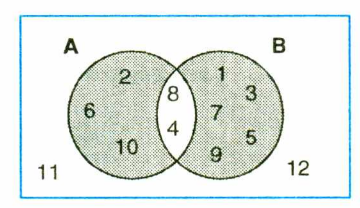


A) {2, 6, 8, 10} **B)** {8, 10, 12} **C)** {4, 8, 11, 12}
D) {4, 8} **E)** {11, 12}

Resolución:

De acuerdo al siguiente gráfico la unión de las partes achuradas representan la diferencia simétrica de los conjuntos A y B; osea:

$$[A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)]$$



Luego: $A \Delta B = \{2, 6, 10, 1, 3, 5, 7, 9\}$
Ordenamos los términos de este conjunto, obteniendo:

$A \Delta B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

Ahora, calculamos el complemento de dicha diferencia simétrica osea; calculamos; $(A \Delta B)'$, cuyos elementos de acuerdo al gráfico estará dado por los elementos que no figuran en las regiones sombreadas, veamos:

$\therefore$ $(A \Delta B)' = \{4, 8, 11, 12\}$ ***Rpta. C***

4. Sea: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ; A = {x/x ∈ U ∧ x ≤ 4} ; B = {2x/2x ∈ U ∧ x ≤ 4}.
Hallar: n [(A ∩ B)']

A) 4 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 9

Resolución:

- Calculamos los elementos del conjunto A: A = {x/x ∈ U ∧ x ≤ 4}

"x" toma los valores: 1, 2, 3, y 4

∴ A = {x} = {1, 2, 3, 4}

- Calculamos los elementos del conjunto B. B = {2x/2x ∈ U ∧ x ≤ 4}

"x" toma los valores: 1, 2, 3, y 4

B = {2x} = {2(1), 2(2), 2(3), 2(4)} ∴ B = {2x} = {2, 4, 6, 8}

- De los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4}; B = {2 , 4 , 6, 8} Hallamos: "A ∩ B" ∴ A ∩ B = {2, 4}

- Luego, calculamos: n [(A ∩ B)'].

(A ∩ B)' = U - (A ∩ B) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} - {2, 4}

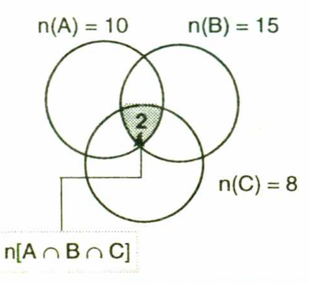
(A ∩ B)' = {1, 3, 5, 6, 7, 8, 9} ∴ **n [(A ∩ B)'] = 7 elementos** ***Rpta. B***

5. Si tenemos que: n (A) = 10; n (B) = 15; n (C) = 8
n(A ∩ B ∩ C) = 2; n(B ∩ C) = 5; n(A ∩ C) = 3; n(A ∩ B) = 4; entonces: n [(A - B) - C] = ?

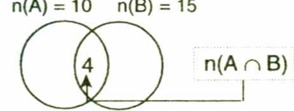
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 8

Resolución:

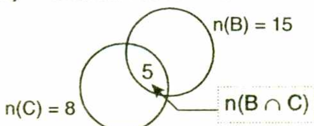
I) Graficamos los tres conjuntos.



II) Graficamos: A ∩ B



III) Graficamos: B ∩ C



IV) Graficamos: $A \cap C$

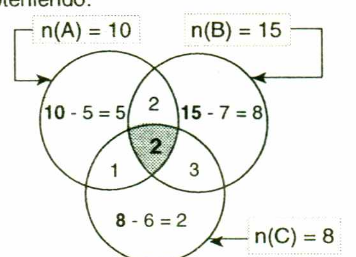
n(A) = 10

n(A ∩ C)

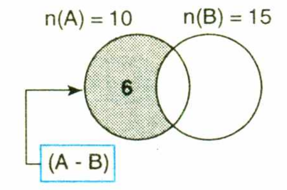
3

n(C) = 8

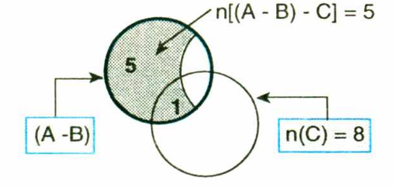
Luego llevamos (II), (III) y (IV) en (I); obteniendo:



• Calculamos: A - B:



• Calculamos [(A - B) - C]



Rpta. B

∴ n[(A - B) - C] = 5

6. Cuántos elementos tiene el conjunto: A = {x/x es un número de 2 cifras las cuales suman 5}

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Resolución:

♦ Un número de dos cifras se representa de la manera siguiente:

$\overline{d\ u}$; donde la cifra "d" (decenas), toma como valor mínimo 1 y como máximo 9 mientras la cifra "u" (unidades) toma como valor mínimo 0 y como máximo 9.

d	u
↓	↓
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

Luego, los números de 2 cifras las cuales suman 5 son: 14; 23; 32; 41 y 50.

∴ El conjunto "A" tiene 5 elementos; osea: A = {14; 23; 32; 41; 50}

Rpta. B

7. Sean: U = {1, 2, 3, 4, ...; 10} ; A = {2, 4, 5, 8, 10} ∧ B = {3, 4, 6, 8, 9}
Determinar: (A' - B) ∩ (B' - A)

A) {1, 7} **B)** {1, 6} **C)** {2, 8} **D)** {1, 8} **E)** N.A.

Resolución:

♦ Hallamos el complemento del conjunto A (A'):

A' = (U - A) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} - {2, 4, 5, 8, 10} ∴ A' = {1, 3, 6, 7, 9}

- Hallamos: (A' - B): A' - B = {1, 3, 6, 7, 9} - {3, 4, 6, 8, 9} ➠ ∴ (A' - B) = {1, 7} ...(I)

- Hallamos el complemento del conjunto B (B'):

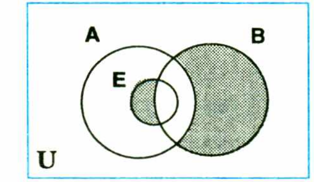
B' = (U - B) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} - {3, 4, 6, 8, 9} ∴ B' = {1, 2, 5, 7, 10}

- Hallamos; (B' - A): (B' - A) = {1, 2, 5, 7, 10} - {2, 4, 5, 8, 10} ➠ ∴ (B' - A) = {1, 7} ...(II)

Luego, reemplazamos (I) y (II), en la expresión incógnita:

(A' - B) ∩ (B' - A) = {1, 7} ∩ {1, 7} = {1, 7} ∴ (A' - B) ∩ (B' - A) = {1, 7} *Rpta. A*

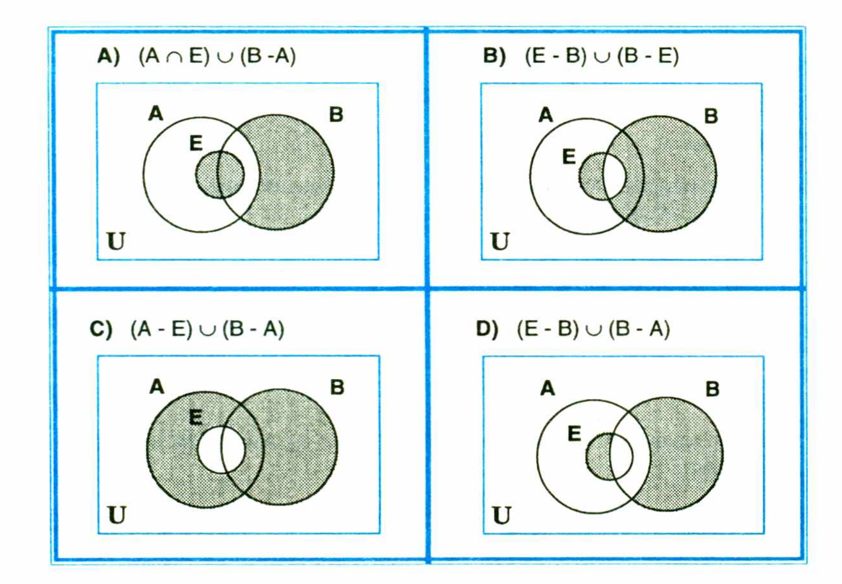
8. La zona sombreada, representa:



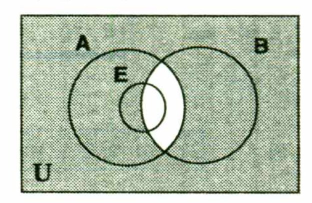
A) (A ∩ E) ∪ (B - A) **B)** (E - B) ∪ (B - E)
C) (A - E) ∪ (B - A) **D)** (E - B) ∪ (B -A)
E) (A ∩ B)'

Resolución:

- Construyendo un diagrama para cada alternativa (A, B, C, D y E), obtenemos:



E) $(A \cap B)'$

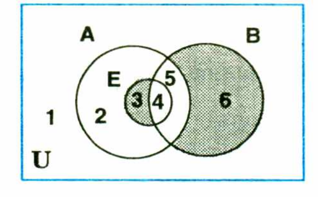


$\therefore$ La respuesta correcta es la "D". ***Rpta. D***

OTRO MÉTODO: Este método consiste en colocar una cifra a cada espacio del Diagrama, veamos:

- Del diagrama: zona sombreada = {3; 6}

  Luego, hallamos el equivalente de cada una de las alternativas.



A) $(A \cap E) \cup (B - A) = \{3, 4\} \cup \{6\} = \{3, 4, 6\}$
B) $(E - B) \cup (B - E) = \{3\} \cup \{5, 6\} = \{3, 5, 6\}$
C) $(A - E) \cup (B - A) = \{2, 5\} \cup \{6\} = \{2, 5, 6\}$
D) $(E - B) \cup (B - A) = \{3\} \cup \{6\} = \{3, 6\}$ **(Es lo correcto)**
E) $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 6\}$

9. Dado que: IN = {1, 2, 3, 4, ...} A = {x/x ∈ IN; "x" es múltiplo de 3} ; B = {x/x ∈ IN; "x" es múltiplo de 4} ; C = {x/x ∈ IN; x < 25}; Determinar: $n(A \cap B \cap C)$

A) 6 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 2 **E)** 1

Resolución:

- Del conjunto "A", obtenemos:
  A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,......}
- Del conjunto "B", obtenemos:
  B = {4, 8, 12, 16, 20, 24,......}
- Del conjunto "C", obtenemos:
  C = {1, 2, 3, 4, 5,..., 12,...24}

Luego, hallamos: $A \cap B \cap C = \{12, 24\}$ → 2 elementos

$\therefore$ $n(A \cap B \cap C) = 2$ ***Rpta. D***

10. Si se conoce que: A' = {1, 2, 3, 6, 8}; B' = {3, 6, 7, 9}, $A \cap B$ = {4, 5}; entonces el conjunto (A - B) será:

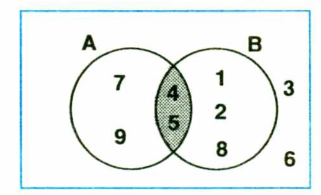
A) {6, 7, 9} **B)** {3, 6, 7, 9} **C)** {7, 9} **D)** {2, 8, 1} **E)** {9}

Resolución:

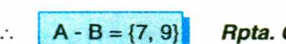
- Hallamos, $A' \cap B'$:

$A' \cap B' = \{1, 2, \underline{3}, \underline{6}, 8\} \cap \{\underline{3}, \underline{6}, 7, 9\} \Rightarrow \therefore$ $A' \cap B' = \{3, 6\}$

Luego, construimos un diagrama como se muestra a continuación:



$A' \cap B' = \{3, 6\}$; implica que los elementos 3 y 6, deben estar afuera de las circunferencias.

$\therefore$ 
$A - B = \{7, 9\}$ ***Rpta. C***

11. Determinar por comprensión: $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

A) $M = \{x/x \text{ es par}\}$ **B)** $M = \{x/x = 2n\}$ **C)** $M = \{x/x = 2n, 1 \leq x \leq 5\}$
D) $M = \{x/x < 11\}$ **E)** $M = \{x/x = 2n;\ 1 \leq n \leq 5;\ n \in \mathbb{N}\}$

Resolución:

- De la alternativa "A": $M = \{x/x \text{ es par}\}$ → Los valores que toma "x" son: 2, 4, 6, 8, 10,......

$\therefore$ $M = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

- De la alternativa "B": $M = \{x/x = 2n\}$ → "n" puede tomar cualquier valor; como: ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

$\therefore$ $M = \{......, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

- De la alternativa "C": $M = \{x/x = 2n;\ 1 \leq n \leq 5\}$ → "n" puede tomar muchos valores como: (1,1); (1,2); (2); (2,1); (2,2); ...

$\therefore$ $M = \{(2,2); (2,4); (4); (4,2); (4,4); ......\}$

- De la alternativa "D": $M = \{x/x < 11\}$ → "x" puede tomar muchos valores, como: (10,9); (10,8); (10); (9,9); (9,8); ......

$\therefore$ $M = \{(10,9); (10,8); (10); (9,9); (9,8); ......\}$

- De la alternativa "E": $M = \{x/x = 2n;\ 1 \leq n \leq 5;\ n \in \mathbb{N}\}$ → como: $n \in \mathbb{N}$, los valores que toma "n" son: 1, 2, 3, 4, y 5.

$\therefore$ $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Luego: $M = \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{x/x = 2n,\ 1 \leq n \leq 5;\ n \in \mathbb{N}\}$ ***Rpta. E***

Un grupo de personas fue entrevistado y se encontró que:

- 25 gustan de los dulces.
- 12 gustan de la televisión.
- 4 gustan del cine y la televisión.
- 2 gustan de los dulces, la televisión y el cine.
- 4 no gustan de dulces, televisión ni cine.
- 37 gustan del cine.
- 9 gustan de los dulces y el cine.
- 7 gustan de los dulces y la televisión.

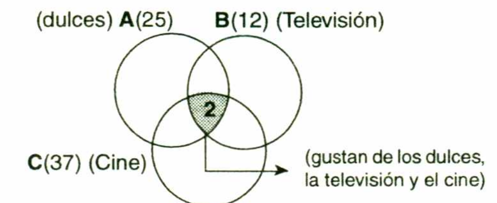
¿Cuántos fueron entrevistados?

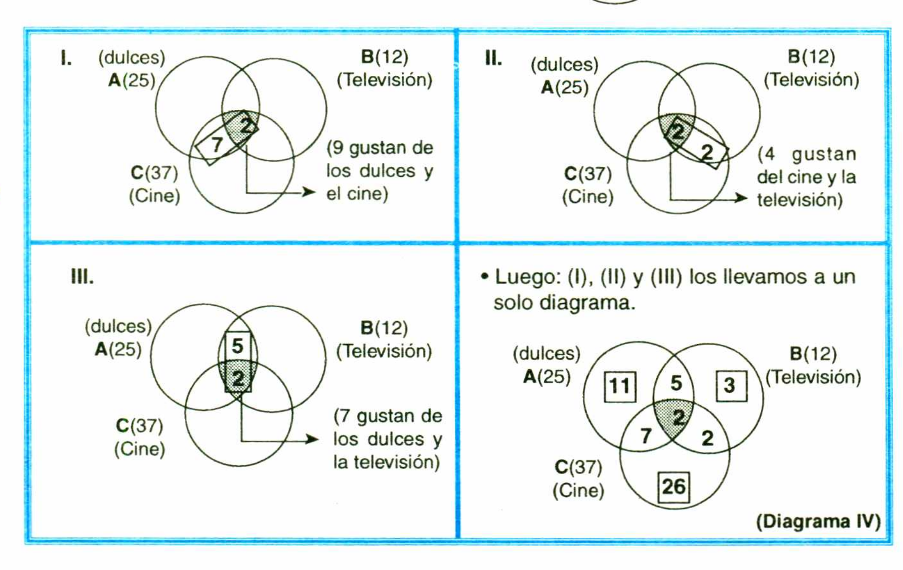
A) 50 **B)** 60 **C)** 56 **D)** 66 **E)** 70

Resolución:

- Analizamos el problema de la manera siguiente:

Sea: A = gustan de los dulces.
B = gustan de la televisión.
C = gustan del cine.





Luego, para hallar el número de personas entrevistadas, sumamos los elementos del Diagrama (IV) más las 4 personas que no gustan de dulces, televisión, ni cine; así:

Personas entrevistadas = ((11) + (3) + (26) + 7 + 5 + 2 + 2) + 4

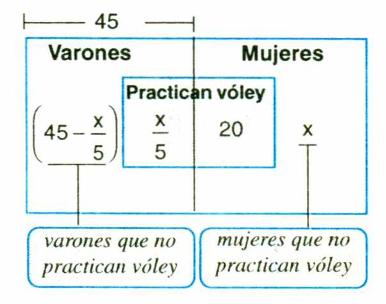
∴ **# de personas entrevistadas = 60** ***Rpta. B***

De un grupo de 80 personas, 45 son varones, 20 son mujeres que practican vóley, y el número de varones que practican vóley, es la quinta parte de las mujeres que no lo practican. ¿Cuántos varones no practican vóley?

A) 3 B) 42 C) 15 D) 5 E) 32

Resolución:

- Para su mejor entendimiento construimos el siguiente diagrama:
- Total en el grupo = 80 personas.
- De acuerdo al diagrama:



$$\left(45-\frac{x}{5}\right)+\frac{x}{5}+20+x = 80$$
$$65+x = 80$$
$$\boxed{x = 15}$$

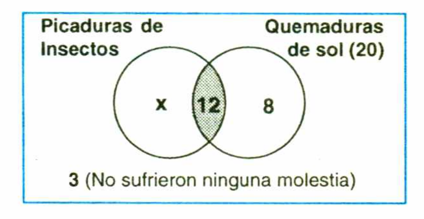
Luego, hallamos el número de varones que no practican vóley:

$\therefore$ # varones que no practican vóley $= 45 - \frac{x}{5} = 45 - \frac{15}{5} = 42$

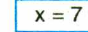
Rpta. B

Treinta estudiantes de mi colegio van a un paseo campestre, doce regresaron con quemaduras de sol y picaduras de insectos, veinte regresaron con quemaduras de sol. ¿Cuántos sufrieron picaduras de insectos si sabemos que solamente tres estudiantes no sufrieron ninguna molestia?

A) 7 B) 15 C) 17 D) 19 E) 10



Resolución:

- Para su mejor entendimiento construimos el siguiente diagrama:
- Total de estudiantes que van de paseo campestre = 30
- De acuerdo al diagrama: $x + 12 + 8 + 3 = 30$ $\therefore$  $\boxed{x = 7}$

Luego, calculamos la cantidad de alumnos que sufrieron picaduras de insectos:

$\therefore$ # de alumnos que sufrieron picaduras de insectos $= x + 12 = 7 + 12 = 19$

Rpta. D

Sean P, Q y R tres conjuntos, la intersección de los tres tiene 9 elementos y la unión de los tres tiene 90 elementos. Si la unión de P y Q tiene 50 elementos y se sabe que cada intersección de dos de ellos tiene 15 elementos; entonces el cardinal de R es:

A) 60 **B)** 61 **C)** 62 **D)** 63 **E)** 64

Resolución:

- De acuerdo al enunciado y haciendo uso de diagramas, obtenemos:

I) P Q R 9 $(P \cap Q \cap R)$

II) P Q 15 $(P \cap Q)$ $P \cup Q = 50$

III) Q R 15 $(Q \cap R)$

IV) P R 15 $P \cap R)$

- Luego, llevamos (I), (II), (III), (IV), a un solo diagrama, veamos:

P Q R a b c 6 6 6 9

• Del enunciado: obtenemos:

$P \cup Q = 50$ elementos

$a + b + 6 + 6 + 6 + 9 = 50$

$\therefore$ $\boxed{a + b = 23}$

- Además sabemos que: $P \cup Q \cup R = 90$ elementos

$a + b + c + 6 + 6 + 6 + 9 = 90 \Rightarrow 23 + c + 27 = 90 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 40}$

Luego, el cardinal de "R" es: $6 + 9 + 6 + c = 21 + 40 = 61$

$\therefore$ Cardinal de "R" = 61 ***Rpta. B***

NÚMEROS NATURALES

2.1 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES (IN)

Los números naturales, cuyo nombre interpreta la forma natural de su origen, constituye el primer conjunto de números que estudiaremos y lo haremos usando recursos simples de la teoría de conjuntos.

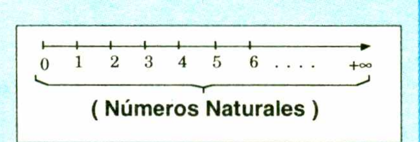
Este conjunto de números naturales se le representa así: IN = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,......}

Históricamente, el Número Natural nació conjuntamente con el hombre, quien tuvo la necesidad de saber contar las cosas que poseía; cantidad de vacas, de hijos, las dimensiones de su terreno, precisar sus intercambios comerciales etc.

Podríamos decir que el Número Natural es una idea intuitiva, una idea "Natural" que sirve para expresar "Cuánto" tenemos de algo.

Al evolucionar esta idea, las matemáticas han purificado sobre todo con el uso de la Teoría de Conjuntos.

Números Naturales: *Son los números enteros positivos, llamados también números para contar, el menor es el cero (0); pero no existe el mayor ya que todo número natural tiene uno siguiente, es que la serie natural de los números no tiene fin, pues por grande que sea, siempre podemos formar otro mayor agregándole otra unidad.*



Nota: *Recordemos que el "Cero" es un número natural.*

¡IMPORTANTE!

- Se simboliza con IN el conjunto de números naturales.

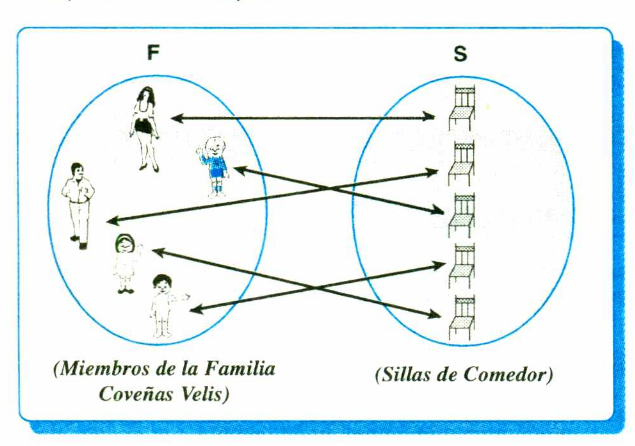
  IN = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ......}

- Se simboliza con IN_0 los números naturales sin el cero.

  IN_0 = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ......}

2.1.1 CORRESPONDENCIA BIUNÍVOCA - CONJUNTOS COORDINABLES

Imaginemos que en el comedor de la familia "Coveñas Velis" hay una mesa con 5 sillas y que al sentarse a almorzar todos los miembros de dicha familia nadie queda de pie, y que toda silla es ocupada por una de las personas, así a cada silla le corresponde una persona y a cada persona le corresponde una silla.



(Miembros de la Familia Coveñas Velis) *(Sillas de Comedor)*

Esta forma de asociar se llama una **Correspondencia Biunívoca**, o correspondencia uno a uno entre los elementos de F y S. En este caso se dice también que los conjuntos F y S son **Conjuntos Coordinables**

2.1.2 NÚMERO CARDINAL Y ORDINAL DE UN CONJUNTO:

Se llama **Número Cardinal** de un conjunto al número de elementos de dicho conjunto. El **Número Ordinal** indica el orden en que esta colocado un elemento de un conjunto, así en el conjunto:

P = { a , b , c , d , e , f }

- f → Sexto ((6 to.)
- e → Quinto ((5 to.)
- d → Cuarto ((4 to.)
- c → Tercero (3 (3 ro.)
- b → Segundo ((2 do.)
- a → Primero (1º (1 ero.)

♦ Su **CARDINAL** del conjunto "P" es 6 (por tener 6 elementos) y se indica así:

Card (P) = 6 ó también: n (P) = 6

N (P) Significa número de elementos del conjunto P

♦♦ Su **ORDINAL** del elemento "c" es (3°); Su ordinal del elemento "e" es (5°).

Ejemplo:

Ordena el conjunto: A = { Miércoles, Jueves, Lunes, Domingo, Martes, Sábado, Viernes}

a) Escribe el número cardinal de dicho conjunto.

b) Escribe el número ordinal del elemento Martes.

c) Di, si coincide el número ordinal del último elemento con el número cardinal del conjunto.

Resolución:

Ordenamos el conjunto dado de la manera siguiente:

A = { Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado}

→ ***tercer elemento***

a) El cardinal de dicho conjunto es 7 ya que el conjunto tiene 7 elementos.
b) El ordinal del elemento Martes es 3 o sea ocupa el tercer lugar.
c) El número Ordinal del último elemento (Sabado = 7° elemento) coincide con el número Cardinal (7 elementos del conjunto).

El Número Cero

*Un Conjunto Vacío no tiene elementos; por lo tanto, no se puede contar los elementos del conjunto vacío. Sin embargo, para estos conjuntos se introduce también un número Cardinal que se llama **Cero**, y que se escribe **0**.*
*El **Cero, 0**, que significa "Ninguno", se considera también como un número natural.*

Ejemplo: *¿ Cuántas monedas de siete céntimos de sol llevas en el monedero ? ___ **Cero.***
La sucesión de los números naturales es, por consiguiente,

0, 1, 2, 3, 4, ... *Sin último término.*

- *Considerar el **Cero** o no como un número natural es una cuestión de convenio.*

2.1.3 NÚMERO ABSTRACTO Y NÚMERO CONCRETO

NÚMERO ABSTRACTO: Es el que no indica la especie de sus unidades (o como dicen otros: Es un conjunto de unidades Abstractas).

Ejemplo: Cuando decimos simplemente: Cinco nos aparece la idea de un conjunto de cinco elementos; pero no sabemos de que clase de elementos se trata. Esto quiere decir que cinco es un número abstracto.

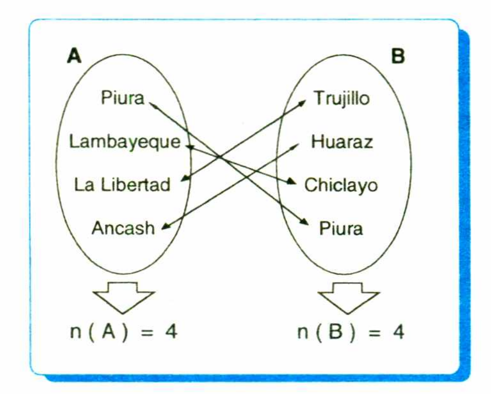
NÚMERO CONCRETO: Es el que indica la especie de sus unidades (o como dicen otros: Es un conjunto de unidades concretas).

Ejemplo: Cinco árboles, Cinco minutos, Cinco soles, etc.

Como se observará en cada ejemplo señalamos la especie de sus unidades.

2.1.4 CONJUNTOS EQUIPOTENTES O EQUIVALENTES

Dado dos conjuntos coordinables estos tendrán un mismo cardinal.



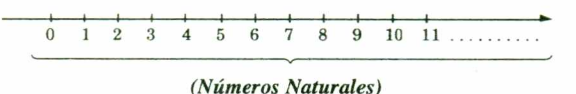
Podemos decir que ambos conjuntos tienen una misma **Propiedad Numérica**. Luego, si dos conjuntos son coordinables, entonces tienen una misma propiedad numérica; en este caso se dice que los conjuntos dados son **Equivalentes ó Equipotentes**.

DEFINICIÓN: *Dos conjuntos A y B son Equivalentes ó Equipotentes cuando entre los elementos de A y los elementos de B se puede establecer una correspondencia Biunívoca, es decir cuando A y B son conjuntos coordinables.*

2.1.5 COMPARACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Dados dos números naturales diferentes es menor aquel cuya ubicación en la recta numérica está a la izquierda del otro.

Así:



De la recta numérica notamos que: 2 es menor que 3 (El símbolo < se lee: "es menor que")

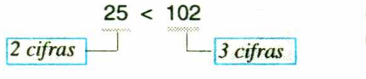
luego: $2 < 3$

Así: "5 es menor que 8" se representa por "5 < 8"

Si se invierte el sentido de < , entonces el símbolo aparece como > y se lee "es mayor que".

Así: "7 > 4" , se lee "7 es mayor que 4" ; "11 > 3" , se lee "11 es mayor que 3"

- Si dos números naturales no tienen el mismo número de cifras, es menor el que tiene menos cifras, Así:



(25 es menor que 102; pues el número 25 tiene menor cifras que el número 102)

234 < 6 327

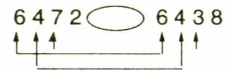
3 cifras — *4 cifras*

(234 es menor que 6 327; pues el número 234 tiene menor cifras que el número 6 327)

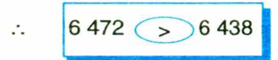
- Si dos números tienen la misma cantidad de cifras, se empieza a comparar sucesivamente desde los correspondientes órdenes superiores hasta el orden de las unidades. Así por ejemplo:

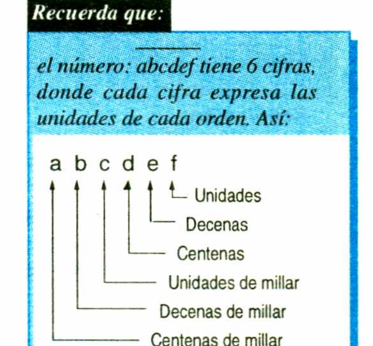
6 432 ◯ 6 438

Para saber que símbolo colocamos en ◯, comparamos la primera cifra de la izquierda (cifra de las unidades de millar), en cada uno de los números dados, hasta dar con una cifra diferente, veamos:



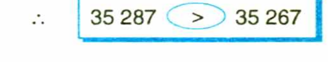
Las dos primeras cifras de la izquierda son iguales en cada uno de los números, pues las terceras cifras son diferentes (7 y 3), entonces diremos que: 7 es mayor que 3.

∴ 



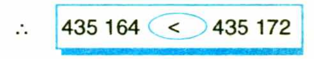
Ejemplo 2: Comparar: 3 5 2 8 7 ◯ 3 5 2 6 7

- Las tres primeras cifras de la izquierda son iguales en los dos números dados, pero la cuarta cifra de cada número son diferentes (8 y 6), entonces diremos que: 8 es mayor que 6.

∴ 

Ejemplo 3: Comparar: 4 3 5 1 6 4 ◯ 4 3 5 1 7 2

- Las cuatro primeras cifras de la izquierda son iguales en los dos numeros dados, pero la quinta cifra de cada número son diferentes (6 y 7), entonces diremos que: 6 es menor que 7.

∴ 

Ejemplo 4: Determinar por extensión el siguiente conjunto: $A = \{ x/x \in \mathbb{N};\ x < 8 \}$

Resolución:

En primer lugar veamos, como se lee la expresión dada: $A = \{ x/x \in \mathbb{N};\ x < 8 \}$

Se lee Así:

El conjunto "A" tiene como elemento x, tal que x pertenece al conjunto de los naturales, siendo estos x menores que 8; o sea "x" toma los siguientes valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

Luego: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Recuerda que:

- x/x se lee: "x tal que x"
- $\in$ se lee: pertenece a

Ejemplo 5: Determinar por extensión el siguiente conjunto: $B = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 12\}$

Resolución:

La expresión: $B = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 12\}$

Se lee Así: El conjunto "B" tiene como elemento x, tal que x pertenece al conjunto de los naturales, siendo estos x mayores que 3; pero menores que 12; o sea "x" toma los siguientes valores: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.

Luego: $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$

Ejemplo 6: Determinar por extensión el siguiente conjunto: $T = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 5 \le x < 9\}$

Resolución:

En La expresión: $T = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge \underbrace{5 \le x < 9}\}$

Se lee: x es mayor ó igual a 5; pero menor que 9, pues los valores que toma "x" son: 5, 6, 7 y 8

$\therefore$ $T = \{ 5, 6, 7, 8 \}$

Recuerda que:

$\le$ Se lee: menor ó igual que,
$\wedge$ se lee como "y"

Ejemplo 7: Determinar por extensión el siguiente conjunto: $R = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 15 < x \le 20\}$

Resolución:

En La expresión: $R = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge \underbrace{15 < x \le 20} \}$

Se lee: x es mayor que 15; pero menor ó igual que 20, pues los valores que toma "x" son: 16, 17 y 18, 19 y 20.

$\therefore$ $R = \{ 16, 17, 18, 19, 20 \}$

Ejemplo 8: Empleando la recta numérica en IN, representar: $F = \{ x/x \in \mathbb{N} \wedge 6 < x < 11\}$

Resolución:

La expresión: $6 < x < 11$, da a entender que "x" no toma los valores ni de 6 ni de 11. Veamos el Gráfico:

- Se deben considerar todos los números naturales entre 6 y 11; pero no a los extremos de 6 y 11. La forma de expresar que los extremos no son parte del conjunto de números; es con dos bolitas vacías, tal como se muestra en la figura.

  Luego, los valores naturales que toma "x" son: 7, 8, 9 y 10. $\therefore$ $F = \{ 7, 8, 9, 10 \}$

Ejemplo 9 : Empleando la recta numérica en IN, representar: $P = \{ x/x \in IN \wedge 4 \leq x \leq 13\}$

Resolución:

La expresión: $4 \leq x \leq 13$, da a entender que "x" si toma los valores de 4 y 13. Veamos el Gráfico:

- Se deben considerar todos los números naturales desde el 4 hasta el 13; (o sea sí se consideran los extremos de 4 y 13). La forma de expresar que los extremos son parte del conjunto de números; es con dos bolitas negras, tal como se muestra en la figura.

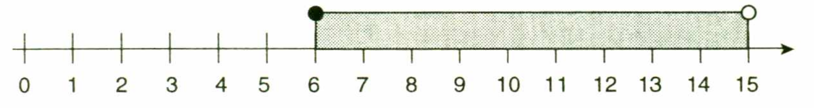
  Luego, los valores naturales que toma "x" son: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y 13.

$\therefore$ $P = \{ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \}$

Ejemplo 10 : Empleando la recta numérica en IN, representar: $T = \{ x/x \in IN \wedge 6 \leq x < 15\}$

Resolución:

La expresión: $6 \leq x < 15$, da a entender que "x" si toma los valores de 6 pero no el valor de 15. Veamos el gráfico:



- Luego, los valores naturales que toma "x" son: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

$\therefore$ $T = \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 6

Ejercicio 1 : Decir cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos:

a) A = { x/x ∈ IN ∧ x < 11 }	f) F = { x ∈ IN/x es par ∧ x < 21 } ......
b) B = { x/x ∈ IN ∧ x ≤ 23 }	g) G = { x ∈ IN/x es impar ∧ x ≤ 19 } ......
c) C = { x/x ∈ IN ∧ 6 < x < 17 }	h) H = { x/x ∈ IN ∧ 15 ≤ x < 31 } ......
d) D = { x/x ∈ IN ∧ 18 ≤ x ≤ 35 }	i) I = { x/x ∈ IN ∧ 13 < x ≤ 91 } ......
e) E = { x/x ∈ IN ∧ 27 < x ≤ 40 }	j) J = { x/x ∈ IN ∧ 52 < x < 136 } ......

Ejercicio 2 : Compara los siguientes números y escribe en cada par de ellos uno de los símbolos: > ; < ; = ; según corresponda:

a)	374	☐	368	f)	1 473 256	☐	1 473 265
b)	5 673	☐	5 682	g)	2 634 517	☐	2 645 678
c)	12 479	☐	12 458	h)	3 568 791	☐	3 564 971
d)	473 652	☐	473 649	i)	135 693	☐	135 693
e)	821 574	☐	821 538	j)	728 545	☐	728 455

Ejercicio 3 : Representar en la recta numérica cada uno de los siguientes conjuntos:

a) P = { x/x ∈ IN ∧ 5 < x < 16 } ➡ (recta: 0 — 5 — 16)

b) Q = { x/x ∈ IN ∧ 12 ≤ x < 20 } ➡ 0

c) M = { x/x ∈ IN ∧ 4 ≤ x ≤ 10 } ➡ 0

d) N = { x/x ∈ IN ∧ x < 15 } ➡ 0

e) V = { x/x ∈ IN ∧ x ≤ 8 } ➡ 0

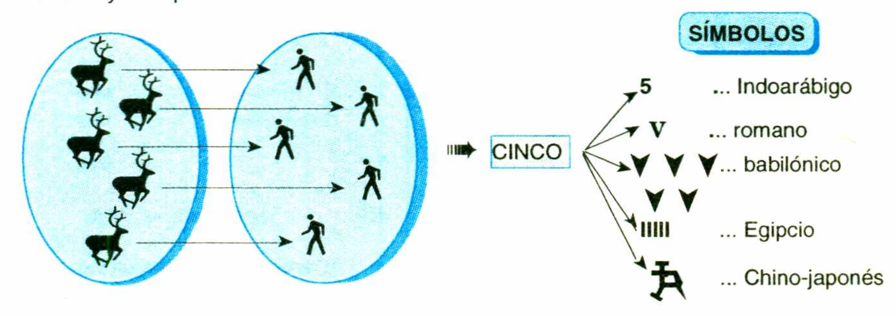
f) T = { x/x ∈ IN ∧ 31 < x ≤ 50 } ➡ 0

g) R = { x/x ∈ IN ∧ 72 ≤ x < 90 } ➡ 0

h) W = { x/x ∈ IN ∧ 84 ≤ x ≤ 131 } ➡ 0

2.2 SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En cada pueblo y en cada época los **números naturales** se nombraron de muy distintas maneras y se representaron con diferentes símbolos.



En un principio, cuando el hombre necesitaba contar pocos objetos podía representar cada número con un símbolo distinto.
Pero a medida que se fueron multiplicando los objetos que lo rodeaban tuvo que ingeniarse para agrupar los elementos y poder contar en forma más simple.
Algunos formaron grupos de diez elementos otros formaron grupos de cinco y cada uno de esos grupos constituía una unidad de orden superior.
Por otra parte aprendieron a combinar símbolos para formar otros números.

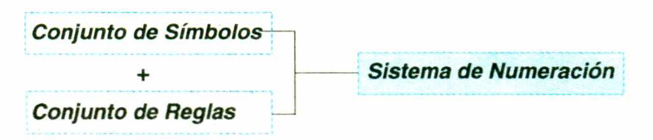
2:2.1 SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN:

El sistema de numeración que utilizamos actualmente usa diez símbolos.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Que se llaman cifras.

Estos números formados por una sola cifra se llaman **dígitos.**
Combinándolos de acuerdo con ciertas reglas se pueden representar todos los números naturales.
El conjunto de símbolos y de reglas constituyen el sistema de numeración.



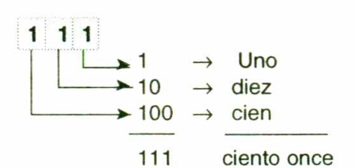
El sistema de numeración decimal usa **diez** símbolos y agrupa las unidades de **diez** en **diez.**
Por esa razón se llama **Sistema Decimal** ó **Sistema de base diez.**

10 unidades = **1 decena**
10 decenas = **1 centena**
10 centenas = **1 unidad de mil**

Diez unidades de cada orden representan una unidad del orden inmediato superior.

- **En el Sistema Decimal**

Uno → 1



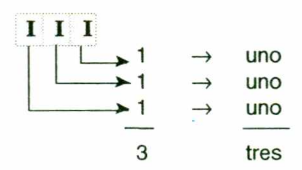
111 → representa → ciento once

Cada símbolo tiene un valor relativo que depende del lugar que ocupa.

En consecuencia, el Sistema decimal de numeración es un sistema **posicional.** En los sistemas posicionales se usa el cero que se escribe en el lugar correspondiente cuando no figuran unidades de un determinado orden.

- **En el Sistema Romano**

Uno → I



III → representa → tres

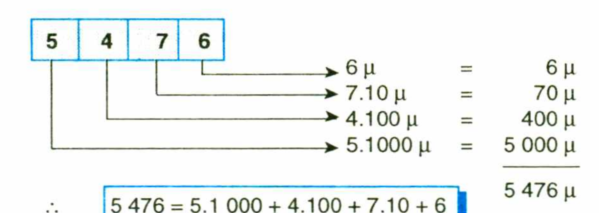
Cada símbolo tiene un valor absoluto que no depende del lugar que ocupa.

El Sistema Romano de numeración **no es posicional.**

Por eso no usa el cero.

2.2.2 DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO:

El valor relativo de cada unidad se obtiene multiplicando por 10 el valor de la unidad anterior.
De esta manera puede descomponerse un número en las unidades de los distintos órdenes.



∴ 5 476 = 5.1 000 + 4.100 + 7.10 + 6

Otros ejemplos: **(a).** 42 375 = 4. 10 000 + 2.1 000 + 3.100 + 7.10 + 5
(b). 526 374 = 5.100 000 + 2.10 000 + 6.1 000 + 3.100 + 7.10 + 4
(c). 679 = 6.100 + 7.10 + 9

2.2.3 DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA:

Teniendo en cuenta que: $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1\,000$; $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10^6 = 1\,000\,000$

podemos expresar que: 6 324 = $6.10^3 + 3.10^2 + 2.10 + 4$
275 268 = $2.10^5 + 7.10^4 + 5.10^3 + 2.10^2 + 6.10 + 8$

Esta forma se llama descomposición polinómica de un número.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

Ejercicio 1 : Expresa cada número como la suma de los valores relativos de sus cifras.

(a). 7 256 = 7 . 1 000 + 2 . 100 + 5 . 10 + 6 (f). 50 080 = ...

(b). 3 538 = ... (g). 6 408 = ...

(c). 23 561 = ... (h). 960 708 = ...

(d). 47 276 = ... (i). 2 007 009 = ...

(e). 74 200 = ... (j). 5 672 008 = ...

Ejercicio 2 : Escribe en forma polinómica los siguientes números:

(a). 238 = $2 . 10^2 + 3 . 10 + 8$ (f). 17 207 = ...

(b). 9 346 = ... (g). 300 475 = ...

(c). 6 045 = ... (h). 29 000 300 = ...

(d). 42 697 = ... (i). 85 096 = ...

(e). 2 745 = ... (j). 7 800 920 = ...

Ejercicio 3 : Indica el valor relativo de la cifra 2 en cada número.

(a). 827 → 2 . 10 = 20

(b). 6 254 →

(c). 29 586 →

(d). 1 492 →

(e). 32 706 →

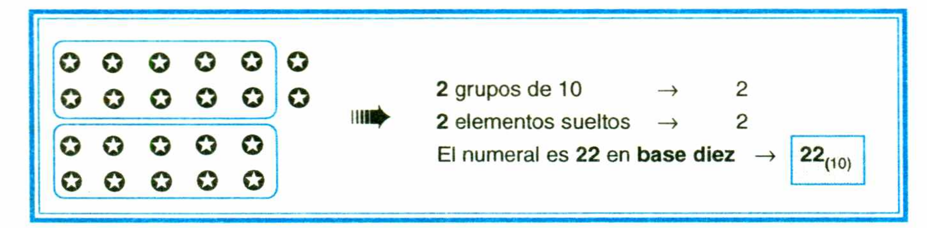
(f). 14 278 →

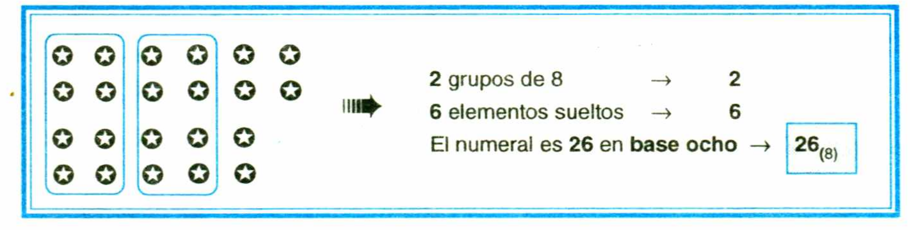
2.2.4 SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN OTRAS BASES

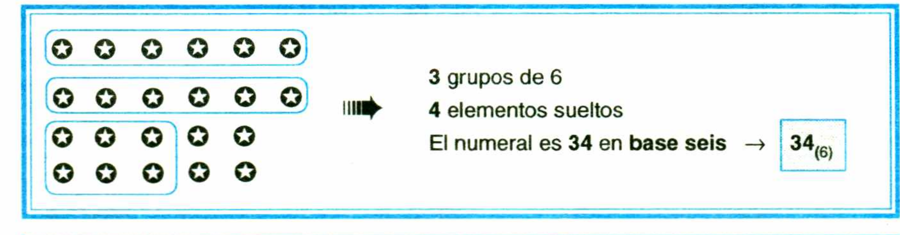
Ya has visto que la forma de agrupar los elementos es de fundamental importancia en un sistema de numeración.

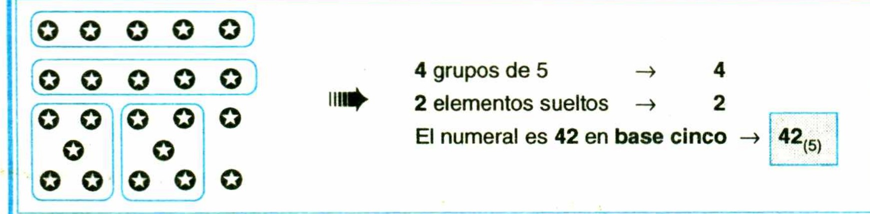
En el sistema de base 10 se usan diez símbolos y se agrupan los elementos de 10 en 10. Pero si agrupamos de 8 en 8 tendremos un sistema de base 8 que sólo necesita 8 símbolos: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.**

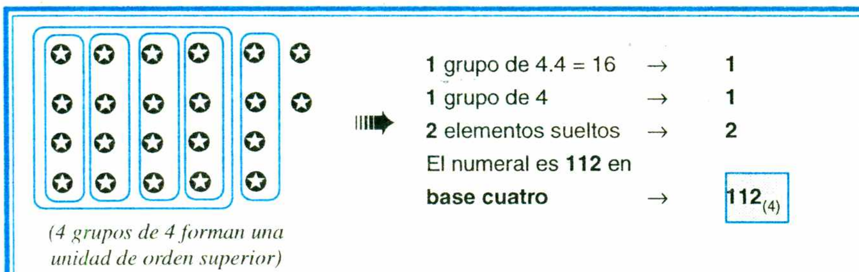
Observa: A pesar de que tenemos siempre el mismo conjunto, su numeral depende de la forma de agrupación.











En consecuencia: $22_{(10)} = 26_{(8)} = 34_{(6)} = 42_{(5)} = 112_{(4)} = 211_{(3)}$

- Observa como se descomponen los números en la suma de valores relativos según las distintas bases.

$22_{(10)} = 2.\mathbf{10} + 2 = 20 + 2 = 22$; $42_{(5)} = 4.\mathbf{5} + 2 = 22$

$26_{(8)} = 2.\mathbf{8} + 6 = 16 + 6 = 22$; $112_{(4)} = 1.\mathbf{4^2} + 1.\mathbf{4^1} + 2 = 22$

$34_{(6)} = 3.\mathbf{6} + 4 = 18 + 4 = 22$; $211_{(3)} = 2.\mathbf{3^2} + 1.\mathbf{3^1} + 1 = 22$

De esta manera se puede pasar de un numeral en cualquier base al numeral correspondiente en base 10 **(sistema decimal)**

Aclaración:

En rigor no es correcto escribir:	**Debe escribirse:**
$101_{(2)}$ porque el símbolo 2 no existe en este sistema.	$101_{(dos)}$
$201_{(3)}$ porque el símbolo 3 no existe en este sistema.	$201_{(tres)}$
	La base debe ser mayor que las cifras del numeral

Sin embargo en la práctica suelen usarse estos símbolos, que corresponden al sistema decimal, para escribir las bases.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

Ejercicio 1 : Expresa en sistema decimal.

(a). $243_{(5)}$ =	(g). $1002_{(3)}$ =
(b). $321_{(7)}$ =	(h). $2111_{(4)}$ =
(c). $523_{(6)}$ =	(i). $2020_{(6)}$ =
(d). $1212_{(3)}$ =	(j). $3240_{(5)}$ =
(e). $21002_{(4)}$ =	(k). $10101_{(2)}$ =
(f). $546_{(7)}$ =	(l). $21002_{(5)}$ =

Ejercicio 2 : Escribe en la base indicada los siguientes números dados en base decimal.

(a). 23 = $\ldots\ldots_{(5)}$	(e). 43 = $\ldots\ldots_{(7)}$	(i). 1 002 = $\ldots\ldots_{(3)}$
(b). 41 = $\ldots\ldots_{(6)}$	(f). 243 = $\ldots\ldots_{(5)}$	(j). 4 013 = $\ldots\ldots_{(2)}$
(c). 102 = $\ldots\ldots_{(3)}$	(g). 204 = $\ldots\ldots_{(6)}$	(k). 607 = $\ldots\ldots_{(5)}$
(d). 154 = $\ldots\ldots_{(6)}$	(h). 132 = $\ldots\ldots_{(4)}$	(l). 5 423 = $\ldots\ldots_{(7)}$

Ejercicio 3 : Completa sobre la línea de puntos.

(a). $23_{(5)}$ = $\ldots\ldots_{(10)}$	(e). $1\,240_{(5)}$ = $\ldots\ldots_{(3)}$	(i). $122_{(3)}$ = $\ldots\ldots_{(5)}$
(b). $1\,001_{(2)}$ = $\ldots\ldots_{(6)}$	(f). $501_{(6)}$ = $\ldots\ldots_{(7)}$	(j). $3\,435_{(6)}$ = $\ldots\ldots_{(3)}$
(c). $201_{(4)}$ = $\ldots\ldots_{(3)}$	(g). $708_{(9)}$ = $\ldots\ldots_{(6)}$	(k). $1\,372_{(8)}$ = $\ldots\ldots_{(6)}$
(d). $1\,400_{(5)}$ = $\ldots\ldots_{(6)}$	(h). $2\,003_{(4)}$ = $\ldots\ldots_{(5)}$	(l). $1\,001_{(2)}$ = $\ldots\ldots_{(6)}$

Ejercicio 4 : Critica el ejercicio que Julio dictó a sus compañeros y señala los errores; luego resuelve los que son correctos.

(a). $201_{(3)}$ =	(e). $132_{(5)}$ =	(i). $528_{(7)}$ =
(b). $101_{(2)}$ =	(f). $312_{(6)}$ =	(j). $3\,014_{(5)}$ =
(c). $324_{(5)}$ =	(g). $704_{(6)}$ =	(k). $674_{(8)}$ =
(d). $431_{(4)}$ = error en la base	(h). $1002_{(3)}$ =	(l). $10\,021_{(3)}$ =

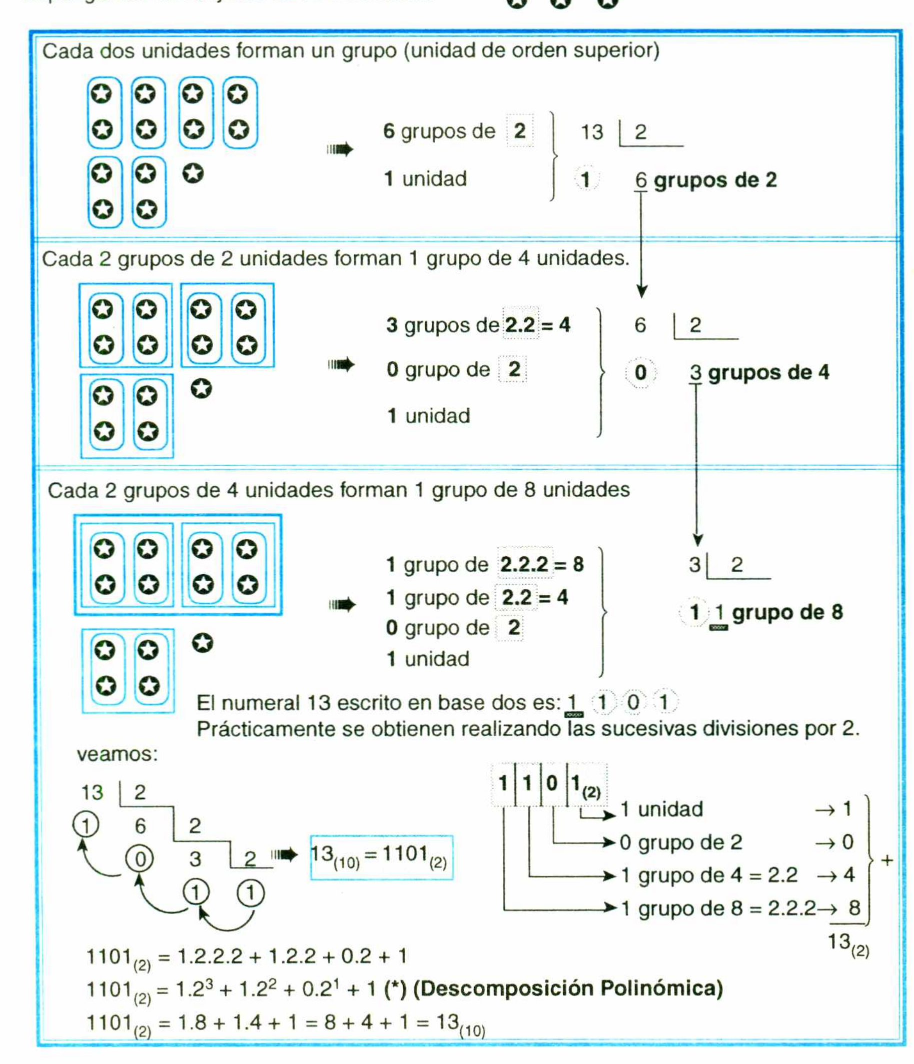
2.2.5 SISTEMA BINARIO DE NUMERACIÓN

En el sistema binario se usan dos símbolos **0** y **1**.

Los elementos se agrupan de **dos** en **dos**; dos unidades de un orden forman una unidad del orden inmediato superior.

Supongamos un conjunto de 13 elementos.

13 unidades



$1101_{(2)} = 1.2.2.2 + 1.2.2 + 0.2 + 1$

$1101_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1$ **(*) (Descomposición Polinómica)**

$1101_{(2)} = 1.8 + 1.4 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13_{(10)}$

- Consideremos ahora un conjunto de 19 elementos.

Cada 2 unidades forman 1 grupo (unidad de orden superior)

9 grupos de **2**

1 unidad

19 | 2

1 9 **grupos de 2**

Cada 2 grupos de 2 unidades forman 1 grupo de 4 unidades

4 grupos de **2.2** = **4**

1 grupo de **2**

1 unidad

9 | 2

1 4 **grupos de 2**

Cada 2 grupos de 4 unidades forman 1 grupo de 8 unidades

2 grupos de **2.2.2** = **8**

0 grupo de **2.2** = **4**

1 grupo de **2**

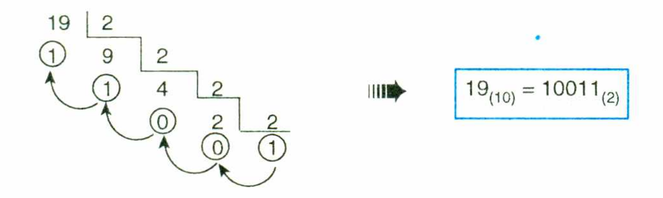
1 unidad

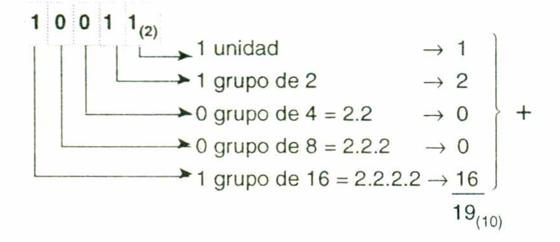
4 | 2

0 2 **grupos de 8**

Cada 2 grupos de 8 unidades forman 1 grupo de 16 unidades

El numeral 19 escrito en base 2 es: 10011





$10011_{(2)} = 1.2.2.2.2 + 0.2.2.2 + 0.2.2 + 1.2 + 1$

$10011_{(2)} = 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1$ (*) **(Descomposición Polinómica)**

$10011_{(2)} = 1.16 + 0.8 + 0.4 + 1.2 + 1 = 16 + 2 + 1 = 19_{(10)}$

b). *Si el menor figura a la **izquierda**, se resta:*

IV = 5 - 1 = 4 ; **XC** = 100 - 10 = 90
XL = 50 - 10 = 40 ; **CD** = 500 - 100 = 400

2º. **Solamente pueden restarse los tres símbolos siguientes: I ; X y C**

- **I** se resta solamente de los dos que le siguen; **V** y **X:**

IV = 5 - 1 = 4 ; **IX** = 10 - 1 = 9

- **X** se resta solamente de los dos que le siguen; **L** y **C**

XL = 50 - 10= 40 ; **XC** = 100 - 10 = 90

- **C** se resta solamente de los dos que le siguen, **D** y **M**

CD = 500 - 100 = 400 ; **CM** = 1 000 - 100 = 900

3º. **Los símbolos I, X, C y M no pueden repetirse más de tres veces seguida:** compara:

3 se escribe **III**	y	4 se escribe **IV**
30 se escribe **XXX**	y	40 se escribe **XL**
300 se escribe **CCC**	y	400 se escribe **CD**
3 000 se escribe **MMM**	y	4 000 se escribe ......¿Cómo?

4º. **Para números mayores que MMM se coloca una raya horizontal sobre el numeral.**
Cada raya equivale a multiplicar por mil (agregar tres ceros).

$\mathbf{IV} = 4$; $\overline{\mathbf{IV}} = 4\,000$; $\overline{\overline{\mathbf{IV}}} = 4\,000\,000$
$\mathbf{XII} = 12$; $\overline{\mathbf{XII}} = 12\,000$; $\overline{\overline{\mathbf{XII}}} = 12\,000\,000$

FORMA PRÁCTICA DE ESCRIBIR UN NUMERAL ROMANO

Lee el número dado, descompuesto en las unidades de los distintos órdenes.

Ejemplo (1): 5 467 = cinco **mil** cuatro cientos sesenta y siete

↓ $\overline{\mathbf{V}}$ ↓ **CD** ↓ **LX** ↓ **VII**

∴ 5 467 = $\overline{\text{V}}$CDLXVII

Ejemplo (2): 32 452 915 = treinta/y dos cuatrocientos/cincuenta/y dos novecientos/quince

millones *mil*

∴

Al leer **mil** se escribe una raya. Al leer **millón** se escribe dos rayas.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 10

Ejercicio 1 : Escribe en sistema romano, los siguientes números expresados en el sistema decimal.

a). 25 = ...	e). 1 798 = ...	i). 207 508 = ...
b). 32 = ...	f). 4 069 = ...	j). 730 029 = ...
c). 573 = ...	g). 5 003 = ...	k). 4 949 = ...
d). 274 = ...	h). 9 300 = ...	l). 5 032 005 = ...

Ejercicio 2 : Explica por qué son erróneas las siguientes escrituras en el sistema romano.

a). IC	d). CLL	g). CXCVX
b). IIV	e). $X\overline{V}$	h). XXL
c). $\overline{III}$	f). XXXX	i). $M\overline{XX}CXXII$

Ejercicio 3 : Escribe en el sistema binario los siguientes números:

a). DV = $......_{(2)}$	d). MXCIII = $......_{(2)}$	g). CDVI = $......_{(2)}$
b). CCXLV = $......_{(2)}$	e). CCCXLI = $......_{(2)}$	h). CLIX = $......_{(2)}$
c). XXXII = $......_{(2)}$	f). MDCCCXIV = $......_{(2)}$	i). CCXL = $......_{(2)}$

Ejercicio 4 : Escribe los siguientes números en el sistema romano.

a). $1010_{(2)}$ = ...	d). $100001_{(2)}$ = ...	g). $1010101_{(2)}$ = ...
b). $1101_{(2)}$ = ...	e). $1110001_{(2)}$ =......	h). $1111111_{(2)}$ = ...
c). $1001_{(2)}$ = ...	f). $1011101_{(2)}$ = ...	i). $1000010_{(2)}$ = ...

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Hallar el valor de "n", si: $102_{(n)} = 234_{(7)}$

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

Resolución:

- Por descomposición polinómica; obtenemos: $1 \cdot n^2 + 0 \cdot n + 2 = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 4$

$$n^2 + 2 = 2.7^2 + 3.7 + 4$$
$$n^2 + 2 = 98 + 21 + 4$$
$$n^2 = 121$$
$$n = \pm\sqrt{121}$$

Recuerda que:
Si: $A^2 = n$
Entonces: $A = \pm\sqrt{n}$

Nota: *Sólo tomamos el valor positivo, osea: $n = 11$; pues la base de un cierto sistema no puede ser* ***negativo.***

$\therefore$ $\boxed{n = \pm 11}$ ➡ $\boxed{n = 11}$ ***Rpta. D***

2. Hallar el valor de "n", si: $123_{(n)} = 231_{(5)}$

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Resolución:

- Por descomposición polinómica, obtenemos:

$$1 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 3 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$$
$$n^2 + 2n + 3 = 50 + 15 + 1$$
$$n^2 + 2n = 63$$

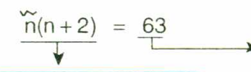
Estimado alumno, *como todavía no estás en condición de resolver una* ***ecuación de segundo grado****. Entonces para hallar el valor de "n" lo haremos por medio de una comparación de términos.*

$$n \cdot n + 2n = 63$$

$$n(n+2) = 63$$

Desdoblamos el 63 como el producto de dos números que multiplicados nos de 63 y que restados nos de 2.

Estos dos números "(n + 2)" y "n" restados nos dá 2.



Luego: $n\,(n+2) = 7\,(9)$ Por comparación de términos: $\boxed{n = 7}$ ***Rpta. B***

3. Hallar el valor de: "a + b", si: $\overline{ab}_9 = \overline{ba}_7$

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Resolución:

Recuerda que:

$5\ x$ → x: variable; 5: coeficiente

- Por descomposición polinómica, obtenemos:

$a \cdot 9 + b = b \cdot 7 + a$

$9a + b = 7b + a$, transponemos términos.

$9a - a = 7b - b \Rightarrow 8a = 6b$ ...*(Sacamos mitad a los coeficientes)*

$4a = 3b$

Por comparación de términos: $a = 3$ y $b = 4$

Luego: $a + b = 3 + 4 = 7$ ***Rpta. D***

4. Hallar el valor de: "a + b", si: $\overline{1ab}_{(7)} = \overline{ba}_{(9)} + \overline{ab}_{(8)}$

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

Resolución:

- Por descomposición polinómica, obtenemos:

$$1 \cdot 7^2 + a \cdot 7^1 + b = (b \cdot 9 + a) + (a \cdot 8 + b)$$
$$49 + 7a + b = 9b + a + 8a + b$$
$$49 + 7a + b = 10b + 9a \quad ;\text{ transponemos términos}$$
$$49 = 10b + 9a - 7a - b$$
$$49 = 9b + 2a$$

(Por tanteo "a" toma valor de 2 y "b" toma valor de 5).

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$5 \quad 2$$

$$49 = 9(5) + 2(2) \Rightarrow 49 = 49 \quad \textbf{(Cumple)}$$

$\therefore$ $a + b = 2 + 5 = 7$ ***Rpta. B***

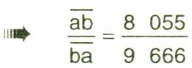
5. Si: $N \times \overline{ab} = 8\ 055$ y $N \times \overline{ba} = 9\ 666$. Hallar el valor de: b - a.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

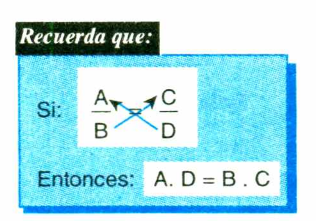
- En primer lugar, dividimos miembro a miembro las dos expresiones dadas

$$\frac{N \times \overline{ab}}{N \times \overline{ba}} = \frac{8\ 055}{9\ 666}$$



$$\Rightarrow \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{8\ 055}{9\ 666}$$

- En segundo lugar, descomponemos polinómicamente los términos de la fracción del primer miembro:



$$\frac{a\cdot 10+b}{b\cdot 10+a}=\frac{8055}{9666} \Rightarrow \frac{10a+b}{10b+a} = \frac{8055}{9666}$$

$$9666(10a+b) = 8055(10b+a)$$

$$96660a + 9666b = 80550b + 8055a$$

transponemos términos:

$$96660a - 8055a = 80550b - 9666b$$

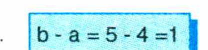
$$88605a = 70884b$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$4 \qquad 5$$

Por tanteo: $88605(4) = 70884(5)$

$354420 = 354420$ **(cumple)** $\therefore$ $b - a = 5 - 4 = 1$ ***Rpta. A***



6. Si: a + b + c=14; Halle la suma de cifras del resultado de efectuar: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

A) 9 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

Resolución:

- Descomponemos polinómicamente los términos de la expresión incógnita:

$$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab} = (a\cdot 10^2 + b\cdot 10^1 + c) + (b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + a) + (c\cdot 10^2 + a\cdot 10 + b)$$

$$= (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b)$$

$$= 111a + 111b + 111c$$

$$= 111(a+b+c)$$

Dato: $a + b + c = 14$

$$= 111(14) = 1554$$

Σ de cifras del resultado = 1+5+5+4 = 15

$\therefore$ Suma de cifras del resultado es: 15 ***Rpta. D***

7. Si: $\overline{xyzy}_{(6)} = 339$; Halle el valor de : "x + y + z"

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Resolución:

- En primer lugar; convertimos el número 339 al sistema de base 6.

339 = 339 ÷ 6 → 39, 56 ÷ 6 → residuo 3; 56 ÷ 6 → 9, residuo 2; 9 ÷ 6 → residuo 3, cociente 1

$\Rightarrow$ $339 = 1323_{(6)}$

- En segundo lugar, hacemos comparación de términos, veamos: $\overline{xyzy}_{(6)} = 339 = 1\,323_{(6)}$

Por comparación: $\boxed{x = 1}$; $\boxed{y = 3}$; $\boxed{z = 2}$

$\therefore$ $\boxed{x + y + z = 1 + 3 + 2 = 6}$ ***Rpta. E***

8. ¿Cuántos números naturales existen entre $23_{(7)}$ y $45_{(6)}$?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Resolución:

- Por descomposición polinómica, obtenemos:

$$\begin{cases} 23_{(7)} = 2.7 + 3 = \boxed{17} \\ 45_{(6)} = 4.6 + 5 = \boxed{29} \end{cases}$$

(Fórmula)

- Para saber cuántos números naturales existen entre un número y otro, se aplica la siguiente fórmula:

$$\left(\begin{array}{l}\text{\# términos que existen} \\ \text{entre uno y otro número}\end{array}\right) = (\text{último - primero}) - 1$$

Luego: # de términos que existen entre los números 17 y 29 = (29 -17) - 1 = $\boxed{11}$ ***Rpta. C***

9. ¿Cuántos números naturales hay desde el $34_{(5)}$ hasta el $52_{(6)}$?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

Resolución:

- Por descomposición polinómica, obtenemos:

$$\begin{cases} 34_{(5)} = 3\,.\,5 + 4 = 19 \\ 52_{(6)} = 5\,.\,6 + 2 = 32 \end{cases}$$

(Fórmula)

- Para saber cuántos número naturales hay desde el número $34_{(5)}$ hasta el número $52_{(6)}$, se aplica la siguiente fórmula.

$$\left(\begin{array}{l}\text{\# términos que hay desde} \\ \text{uno hasta otro número}\end{array}\right) = (\text{último - primero}) + 1$$

Luego: # de términos que hay desde el 19 hasta el 32 = (32 - 19) + 1 = $\boxed{14}$ ***Rpta. D***

10. El número 102 se escribe como 204 en base K, hallar: "K"

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

- De acuerdo al enunciado; planteamos la siguiente ecuación:

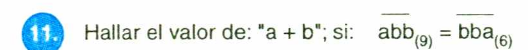
$$102 = 204_{(K)} \quad \text{; Descomponemos polinómicamente}$$

$$102 = 2 \cdot K^2 + 0 \cdot K + 4$$

$$102 = 2K^2 + 4 \quad \text{; transponemos términos}$$

$$102 - 4 = 2k^2 \Rightarrow 98 = 2K^2$$

$$\frac{98}{2} = K^2 \Rightarrow 49 = K^2 \Rightarrow \pm\sqrt{49}\ K \Rightarrow \therefore\ \boxed{7 = K}$$ **Rpta. C**



11. Hallar el valor de: "a + b"; si: $\overline{abb}_{(9)} = \overline{bba}_{(6)}$

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

- Por descomposición polinómica; obtenemos:

$$a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + b = b \cdot 6^2 + b \cdot 6 + a$$

$$81a + 9b + b = 36b + 6b + a$$

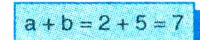
$$81a + 10b = 42b + a \quad \text{; transponemos términos;}$$

$$81a - a = 42b - 10b$$

$$80a = 32b \quad \text{; sacamos octava (dividimos} \div 8\text{) a los coeficientes.}$$

$$10a = 4b \quad \text{; sacamos mitad a los coeficientes.}$$

$$5a = 2b \quad \text{; por comparación de términos: } \boxed{a = 2} \text{ y } \boxed{b = 5}$$



$$\therefore\ \boxed{a + b = 2 + 5 = 7}$$ **Rpta. C**

12. Hallar el valor de: "a + x + y", si: $\overline{aaaa}_{(5)} = \overline{xy8}$

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Resolución:

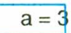
- Descomponemos polinómicamente al número del primer miembro:

$$a \cdot 5^3 + a \cdot 5^2 + a \cdot 5^1 + a = \overline{xy8}$$

$$125a + 25a + 5a + a = \overline{xy8}$$

$$156a = \overline{xy8}$$

Por tanteo: $\boxed{a = 3}$



En el primer miembro el número 156 está multiplicando con "a", pues al multiplicar 6 con "a", dicho resultado debe terminar en 8. Para que se cumpla esto "a" debe tomar valor de 3.

Luego : $\underbrace{156\,(\mathbf{3})} = \overline{xy8}$

$468 = \overline{xy8}$

Por comparación: $x = 4$; $y = 6$

$\therefore$ $a + x + y = 3 + 4 + 6 = 13$ ***Rpta. E***

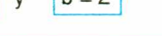
13. Un número de dos cifras de base 7 al convertirse a base 4 se representa por las dos cifras pero dispuestas en orden inverso. Dicho número en el sistema decimal es:

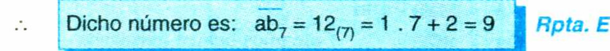
A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

Resolución:

- De acuerdo al enunciado, planteamos la ecuación: $\overline{ab}_{(7)} = \overline{ba}_{(4)}$
- Por descomposición polinómica:

$$a \cdot 7 + b = b \cdot 4 + a$$
$$7a + b = 4b + a \text{ ; transponemos términos}$$
$$7a - a = 4b - b$$
$$6a = 3b$$; **sacamos tercia a los coeficientes** de ambos miembros.
$$2a = 1b$$


Por comparación: $a = 1$ y $b = 2$


$\therefore$ Dicho número es: $\overline{ab}_7 = 12_{(7)} = 1 \,.\, 7 + 2 = 9$ ***Rpta. E***

14. Sabiendo que: $\overline{6ab} = 25 \,.\, \overline{ab}$. Luego : "a + b" es:

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

- Descomponemos polinómicamente el número del primer miembro:

$$6 \times 10^2 + a \times 10 + b = 25 \cdot \overline{ab}$$
$$600 + \overline{ab} = 25 \cdot \overline{ab} \Rightarrow 600 = 24 \cdot \overline{ab}$$
$$25 = \overline{ab}$$

Por comparación: $a = 2$ y $b = 5$

$\therefore$ $a + b = 2 + 5 = 7$ ***Rpta. C***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 11

Ejercicio 1 : Si: $\overline{aba}_{(7)} = 221$.
Hallar el valor de: "a + b".

Resolución:

Rpta. a + b = 7

Ejercicio 2 : Hallar el valor de "a" en:

$$\overline{a13}_{(5)} = 102_{(9)}$$

Resolución:

Rpta. a = 3

Ejercicio 3 : Hallar : A + B; si:

$$\overline{4AB} + \overline{2BA} = \overline{B88}$$

Resolución:

Rpta. A + B = 8

Ejercicio 4 : Hallar: "a + b"; si:

$$\overline{aaaa}_{(7)} = \overline{b000}$$

Resolución:

Rpta. a + b = 7

Ejercicio 5 : Hallar: a x b ; si: $\overline{aba}_{(5)} = \overline{2ba}_{(7)}$

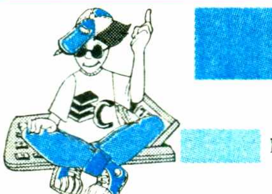
Resolución:

Rpta. a x b = 4

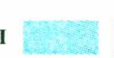
Ejercicio 6 : Hallar: "n + x"; Si: $\overline{441}_{(n)} = \overline{22x}$

Resolución:

Rpta. n + x = 12



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE SISTEMA DE NUMERACIÓN



NIVEL I

Ejercicio 1 : Hallar el valor de "n" si:

$$203_{(n)}=55_{(6)}$$

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Ejercicio 2: Hallar el valor de "n" si:

$$501_{(n)}=265_{(8)}$$

A) 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 5

Ejercicio 3: Hallar el valor de: "x + y" si:

$$\overline{xy}_{(7)} = \overline{yx}_{(4)}$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 4: Hallar el valor de: "a + x", si:

$$\overline{xxx}_{(3)} = \overline{a6}$$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ejercicio 5: Hallar: "a + y - x", si: $\overline{aaaa}_{(4)} = \overline{xyo}$

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Ejercicio 6: Hallar el valor de: "b - a"; si:

$$\overline{1ab}_{(6)} = \overline{ba}_{(8)} + \overline{ab}_{(7)}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 7: ¿Cuál de los siguientes numerales representa la mayor cantidad?

A) $237_{(9)}$ **B)** $102_{(14)}$ **C)** $143_{(12)}$
D) $124_{(13)}$ **E)** $183_{(11)}$

Ejercicio 8: Si: $\overline{xyz}_{(5)} = 89$; halle el valor de:

"x + y - z"

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Ejercicio 9 : Si: $\overline{xy(x+1)}_{(6)} = 142$. Halle el valor de: "x + y"

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

Ejercicio 10 : ¿Cuántos números naturales existen entre $62_{(8)}$ y $78_{(9)}$?

A) 21 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 23

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. B	4. B	5. C
6. B	7. E	8. A	9. C	10. C

NIVEL II

Ejercicio 1 : ¿Cuántos números naturales hay desde el $45_{(7)}$ hasta el $125_{(6)}$?

A) 19 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

Ejercicio 2: Si: a + b + c = 12; halle la suma de cifras del resultado de efectuar:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$$

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 3: Calcule: "x + n"; si: $\overline{3x7}_{(n)} = 304_{(9)}$

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Ejercicio 4 : Si: $\overline{m(m+2)(m-3)}_{(6)} = \overline{xyy}_{(7)}$

Dar el valor de: "x + y + m"

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Ejercicio 5 : Sabiendo que: $121_{(n)} = 196$.
Hallar el valor de "n".

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Ejercicio 6 : ¿Cuántas centenas enteras tiene el numeral 43 247?

A) 432 B) 43 C) 4 D) 24 E) 2

Ejercicio 7 : Sabiendo que: $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$ y $a + b = 8$. Hallar el valor de: "a . b"

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) N.A

Ejercicio 8 : Sabiendo que: $\overline{ab} + \overline{ba} = 77$ y $a - b = 1$. Hallar: $\overline{ab}_{(5)}$

A) $43_{(5)}$ B) $34_{(5)}$ C) $32_{(5)}$ D) $133_{(5)}$ E) N.A.

Ejercicio 9 : Sabiendo que: $\dfrac{\overline{ab}}{a+b} = 5$.
Hallar el valor de: "a . b".

A) 10 B) 15 C) 20 D) 30 E) 40

Ejercicio 10 : Si: $\overline{ab}_{(8)} + \overline{ba}_{(8)} = 36$ y $a - b = 2$;
Hallar el valor de "a"

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 11 : Si: $a + b + c = 23$, Hallar el valor de: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

A) 2323 B) 2553 C) 2355
D) 3333 E) Faltan Datos

Ejercicio 12 : Si: $\overline{xy}_{(6)} + \overline{yx}_{(6)} = 63$ y $(x - y) = 1$. Hallar el valor de "x . y"

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 30

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. C	4. E	5. D
6. E	7. C	8. D	9. C	10. C
11. B	12. C			

2.3 OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Observación: *Ciertamente sabes sumar, restar, multiplicar y dividir. No se pretende enseñarte lo que ya sabes; se trata de que entiendas mejor lo que haces cuando sumas, restas, multiplicas o divides.*

2.3.1 ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES.

La Adición es la más sencilla de las cuatro reglas u operaciones elementales con los números.

Sabemos ya que **Conjuntos Disjuntos** son los conjuntos que no tienen elementos comunes, o que su intersección es un conjunto vacío.

Así por ejemplo: M = { a, b, c, d } y N = { p, q }

Son conjuntos disjuntos porque: $M \cap N = \phi$

Ahora efectuamos la operación **Reunión** de estos conjuntos disjuntos, así: $M \cup N = \{ a, b, c, d, p, q \}$

- En el conjunto "M" su cardinal es igual a 4, en el conjunto "N" su cardinal es igual a 2 y el cardinal del conjunto $M \cup N$ es igual a 6, al cardinal 6 se llama **SUMA** y los cardinales 4 y 2 se les llama **SUMANDOS** de modo que podemos escribirlo así:

Cardinal del Conjunto **M** + Cardinal del Conjunto **N** = Cardinal del Conjunto **M** ∪ **N**

$$n(M) + n(N) = n(M \cup N)$$

$$\underbrace{4 + 2}_{\text{SUMANDOS}} = \underbrace{6}_{\text{SUMA}}$$

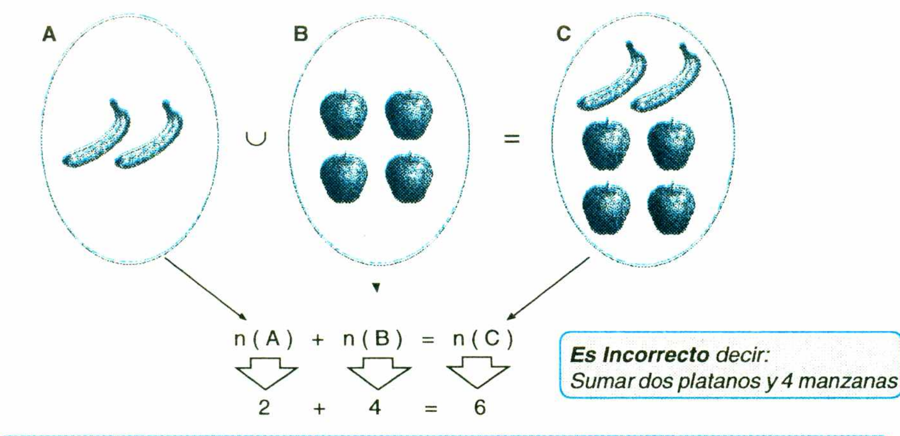
> **La Adición :** Es la operación por la cual a cada par ordenado de cardinales de dos conjuntos disjuntos se le asigna o se le hace corresponder el cardinal de su reunión.

¡IMPORTANTE!

La adición es una **operación interna** en IN, porque dos números cualesquiera siempre se puede sumar.

Ejemplo: 5 + 3 = 8 *Es natural*

*Nota: No hay que confundir **Unión de Conjuntos** con **Adición** de números, los conjuntos se reunen no se suman; solamente pueden sumarse los números naturales así:*



***Es Incorrecto** decir:*
Sumar dos platanos y 4 manzanas

Observaciones:
- *Los Cardinales o Números que se adicionan se llaman **SUMANDOS** y el resultado de la Adición es un número llamado **SUMA**.*
- *Nótese que la **suma** es un **número**, mientras la **Adición** es una **operación**.*

EJERCICIO DE COMPRENSIÓN

Nombrar los conjuntos y los números que intervienen en el siguiente problema: Dos equipos rivales Universitario (A) y Alianza (B), se enfrentan en un partido de futbol. Los hinchas de Universitario que se encuentran en el estadio son 8 000 y los del Alianza son 6 000.

¿Cuántos hinchas de estos equipos hay en el estadio?

Resolución:

a) Los conjuntos son: A = {hinchas de Universitario}

B = {hinchas de Alianza}

A ∪ B = {hinchas de estos dos equipos que se encuentran en el estadio}

b) Los cardinales son: Card (A) = n (A) = 8 000

Card. (B) = n (B) = 6 000

∴ Card (A ∪ B) = n (A ∪ B) = 8 000 + 6 000 = 14 000

TABLA DE ADICION

En el siguiente cuadro o tabla de doble entrada podemos hallar la suma de algunos pares de números:

Fila →

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

↑ Columna

EL MANEJO DE LA TABLA ES FÁCIL. Ejemplo:

Quieres sumar 2 + 3, busca dichos Sumandos: uno en la línea de las **Filas**; y el otro en la de las **Columnas.** Se sigue la **Fila** de uno y la **Columna** de otro y, donde se encuentran, está la suma. De la tabla podemos observar que al par (2,3) le corresponde el número 5, es decir: 2 + 3 = 5.

- Al par (5 , 6) le corresponde el número 11, es decir: 5 + 6 = 11
- Al par (8 , 9) le corresponde el número 17, es decir: 8 + 9 = 17

2.3.2 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Has realizado la adición de números naturales uniendo conjuntos. Así pues, las propiedades de la unión de conjuntos serán también las propiedades de la adición.

1. **PROPIEDAD CONMUTATIVA:** Vamos a considerar el mismo ejemplo que ya conocemos:

A = { Domingo , Lunes , Martes , Miércoles } ➠ ∴ Card (A) = n (A) = 4

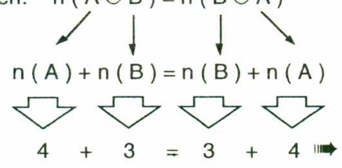
B = { Jueves , Viernes , Sábado } ➠ ∴ Card (B) = n (B) = 3

Luego: A ∪ B = {Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado}

B ∪ A = {días de la semana}

Esto quiere decir que tiene los mismos elementos que A ∪ B

De donde: A ∪ B = B ∪ A o También: n (A ∪ B) = n (B ∪ A)



Propiedad Conmutativa.

Es decir: *La suma no se altera cuando se cambia el orden de los sumandos. La adición tiene la propiedad conmutativa.*

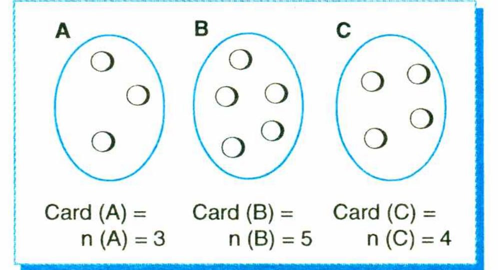
a + b = b + a

2. **PROPIEDAD ASOCIATIVA:**

- Veamos la **Unión Adición** de tres conjuntos:

Recuerda que:

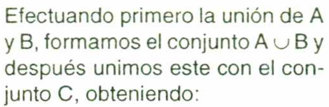
n(A): Se lee: "número de elementos del conjunto A"



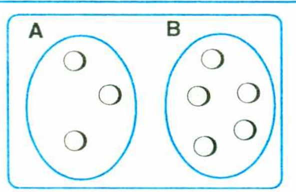
Podemos efectuar la Unión o Reunión de tres maneras:

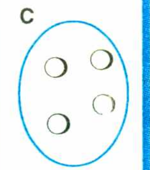
Los tres conjuntos a la vez.

Card (A ∪ B ∪ C) =12



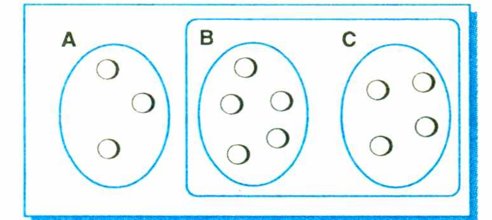
Efectuando primero la unión de A y B, formamos el conjunto A ∪ B y después unimos este con el conjunto C, obteniendo:





Card (A ∪ B) ∪ C = 12

Efectuando primero la unión de B y C, formamos el conjunto B ∪ C y después, unimos éste con el conjunto A, obteniendo:



Card (B ∪ C) ∪ A = 12

Se comprueba que: (A ∪ B) ∪ C = (B ∪ C) ∪ A = 12 ó (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

Es decir, la Adición es Asociativa y se enuncia así:

En la Adición de números naturales la suma total no se altera si se reemplazan o se asocian varios de los sumandos por sus sumas efectuadas o sea: **(a + b) + c = a + (b + c)**

Ejemplo: Efectuar: 5 + 7 + 9

Usando paréntesis para Agrupar o Asociar los Sumandos, tenemos que:

$$(5+7)+9 = 5+(7+9)$$
$$12 + 9 = 5 + 16$$
$$21 = 21$$

3. **PROPIEDAD DE IDENTIDAD ADITIVA O ELEMENTO NEUTRO** : El empleo del **Cero** como sumando es una propiedad especial, teniendo en cuenta que **Cero** sí es un número natural.

Sabemos que **0** es la propiedad numérica del conjunto vacío (ϕ) y como la unión de un conjunto cualquiera **A** con ϕ es igual al mismo conjunto **A**.

O sea : $A \cup \phi = A$ Donde: $n(A) + n(\phi) = n(A)$

Es decir: $a + 0 = a$

Cero es elemento neutro, que enunciamos así:

> *La Adición de un Número cualquiera «a» con Cero da el mismo Número «a».*
>
> *Al* ***Cero*** *se llama* ***Neutro*** *o* ***Elemento Identidad de la Adición.***

4. **PROPIEDAD DE CLAUSURA:**

> *Si "a" y "b" son dos números naturales cualesquiera su Suma es también otro número natural.*

Ejemplo: $6 + 9 = 15$; $6 \in N$; $9 \in IN$; Entonces: $15 \in IN$

$32 + 17 = 49$; $32 \in N$; $17 \in IN$; Entonces: $49 \in IN$

5. **PROPIEDAD DE MONOTOMÍA:**

> *«Si a los dos miembros de una igualdad de números naturales le sumamos un mismo número natural se obtiene otra igualdad».* **a + b = c;** *Entonces;* **a + b + d = c + d**

Ejemplo: Sí: $7 + 4 = 11$ Entonces: $(7 + 4) + 5 = 11 + 5$ ➡ $16 = 16$

6. **PROPIEDAD DE CANCELACIÓN :**

> *«Si a los miembros de una igualdad de números naturales se le suprime un mismo número, la igualdad no varía.* **a + b = b + c ;** *Entonces:* **a = c**

Ejemplo: Sí: $8 + 5 + \not{8} = 13 + \not{8}$ ➡ $8 + 5 = 13$

2.3.3 TÉCNICAS OPERATIVAS DE LA ADICIÓN

Son las formas de como hallar la suma de dos o más números naturales.

I) **Por Descomposición Según el Valor de Posición** (Descomposición Polinómica).

Ejemplo 1 : Efectuar: 627 + 345

Descomponiendo obtenemos:
$$\begin{aligned} 627 &= 600 + 20 + 7 \\ +\ 345 &= \underline{300} + \underline{40} + \underline{5} \\ &= 900 + 60 + 12 \\ &= 900 + 60 + (10 + 2) = 900 + 70 + 2 = \boxed{972} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 : Efectuar. 1 346 + 572

Descomponiendo obtenemos:
$$\begin{aligned} 1\,346 &= 1\,000 + 300 + 40 + 6 \\ +\ 572 &= \underline{500} + \underline{70} + \underline{2} \\ &= 1\,000 + 800 + 110 + 8 \\ &= 1\,000 + 800 + (100 + 10) + 8 = \boxed{1\,918} \end{aligned}$$

II) **Por Adición Directa según el valor de Posición:**

Ejemplo 1: Efectuar: 2 347 + 524 + 1473 +278 + 36 Disposición:

```
 2 347  +
   524
 1 473
   278
    36
 ------
 4 658  (Suma Total)
```

III) **Formando Grupos de Sumandos en base a la Propiedad Asociativa, sumando luego los resultados parciales.**

Ejemplos : Efectuar: 2 347 + 524 + 1 473 + 278 + 36 Disposición:

- Tomando los dos primeros sumandos: ➡ 2 347 + 524 = 2 871

Tomamos los tres últimos sumandos: ➡ 1 473 + 278 + 36 = 1 787

Luego sumamos los dos resultados parciales hallados asi: ➡ 2 871 + 1 787 = 4 658 *(Suma Total)*

SUMA DE NÚMEROS EN BASE 2. **Tabla de Sumar**. Teniendo en cuenta que en el sistema binario los números de una cifra son 0 y 1, la tabla de sumar correspondiente a ellos es la siguiente:

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2 = **2**

Donde el número 10_2 (que es el número 2 en numeración decimal) es la suma 1 + 1 de los números que encabezan la fila y columna a las que aquél pertenece.

- **Procedimiento Práctico:** Análogamente a como se procede en la suma de dos números en base 10, cuando se trata de sumar dos o más números de varias cifras en numeración binaria, es cómodo disponerlos uno debajo de otro.

Cuando en una columna el resultado supera a 1, hay que llevar la cifra correspondiente a la columna de la izquierda, como se hace en la numeración decimal.

Ejemplo: Para sumar: $101_2 + 11_2$; se dispone así:

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +\quad 11_2 \\ \hline 1\,000_2 \end{array}$$

- En la columna de la derecha, como 1 + 1 es igual a 10_2, se escribe la cifra 0 y se suma una unidad a la segunda columna; entonces, como en esta segunda columna queda 1 + 1 igual a 10_2, se escribe la cifra 0 y se lleva una unidad; en la tercera columna 1 que se lleva más 1 es igual a 10_2. En definitiva, el resultado de esta suma es: 1000_2.

Verificación: Se puede verificar el resultado efectuando la operación con numeración decimal.

Así; el número 101_2 expresado en el sistema de numeración decimal es el número 5 ($101_2 = \underbrace{1 \times 2^2}_{4} + \underbrace{0 \times 2}_{0} + 1 = \mathbf{5}$), el número 11_2 expresado en el sistema de numeración decimal es el número 3 ($11_2 = \underbrace{1 \times 2}_{2} + 1 = \mathbf{3}$); la suma **5** + **3** = 8 y el resultado $1\,000_2$ de la suma en numeración binaria, expresado en numeración decimal es el número 8 ($1\,000_2 = \underbrace{1 \times 2^3}_{8} + \underbrace{0 \times 2^2}_{0} + \underbrace{0 \times 2}_{0} + 0 = \mathbf{8}$)

Prácticamente, se dispone así:

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*	
101_2	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	= 5
+ 11_2	⟷	$1 \times 2 + 1$	= 3 (+)
$1\,000_2$	⟷	$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$	= **8**

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*	
1011_2	⟷	$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$	= 11
+ 1101_2	⟷	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	= 13 (+)
101_2	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	= 5
11101_2	⟷	$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	= **29**

Numeración Binaria		Numeración Decimal	
$1\,100_2$	⟷	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$	$= 12$
$+\ 100_2$	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$	$= 4$
101_2	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$	$= 5$
11_2	⟷	$1 \times 2 + 1$	$= 3$ (+)
$11\,000_2$	⟷	$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$	$=$ **24**

TABLA DE SUMAR EN EL SISTEMA BINARIO CON NÚMEROS DE MÁS DE UNA CIFRA

+	**0**	**1**	**10_2**	**11_2**	**100_2**
0	0	1	10_2	11_2	100_2
1	1	10_2	11_2	100_2	101_2
10_2	10_2	11_2	100_2	101_2	110_2
11_2	11_2	100_2	101_2	110_2	111_2
100_2	100_2	101_2	110_2	111_2	$1\,000_2$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 12

- Efectuar las siguientes sumas de números expresados en base 2 y verificar los resultados obtenidos, pasando a base 10.

a) $111_2 + 1001_2$ ***Resolución:***	**b)** $110_2 + 1110_2$ ***Resolución:***	**c)** $1111_2 + 111_2$ ***Resolución:***
d) $1011_2 + 1001_2 + 100_2$ ***Resolución:***	**e)** $1010_2 + 101_2 + 11_2$ ***Resolución:***	**f)** $100_2 + 111_2 + 1111_2$ ***Resolución:***
g) $11110_2 + 10001_2 + 1111_2$ ***Resolución:***	**h)** $1111_2 + 1100_2 + 1010_2$ ***Resolución:***	**i)** $1101_2 + 1000_2 + 1001_2$ ***Resolución:***

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Problema 1 : Miguel tiene 5 deudores, el primero debe S/. 3 800, el segundo S/. 2 760, el tercero S/. 4 520, el cuarto S/. 6 740 y el quinto S/. 2 670. ¿Cuánto reuniría Miguel si cobrara todas estas deudas?.

Resolución:

Deuda del primero	=	3 800 soles
Deuda del segundo	=	2 760 soles
Deuda del tercero	=	4 520 soles
Deuda del cuarto	=	6 740 soles
Deuda del quinto	=	2 670 soles
		20 490 soles

Rpta: La deuda total es de 20 490 soles

Problema 2: La edad de una madre es 12 años más que la suma de las edades de sus tres hijos. Si el tercero tiene 6 años; el segundo 2 años más que el tercero y el primero tantos años como el segundo y el tercero juntos. ¿Qué edad tiene la madre?.

Resolución:

Edad del tercero	=	6 años
Edad del segundo	=	6 años + 2 años = 8 años
Edad del primero	=	8 años + 6 años = 14 años
Edad de la madre	=	(6 años + 8 años + 14 años) + 12 años = **40 años**

Rpta: La edad de la madre es de 40 años

Problema 3: Durante un paseo, Nataly tuvo los siguientes gastos: S/. 230 en el pasaje, S/. 36 en frutas, S/.45 en golosinas y S/. 12 en galletas. ¿Cuánto le había dado su padre si aún le sobra S/. 56?

Resolución:

Gastos Realizados por Nataly:

En Pasaje	=	230 soles +
En frutas	=	36 soles
En golosinas	=	45 soles
En galletas	=	12 soles
		323 soles

Para saber cuánto dinero le dio su Padre a Nataly. Sumo lo que gastó en total osea 323 soles más lo que sobró. Osea 56 soles, veamos:

323 soles +
56 soles
379 soles

Rpta: El Padre de Nataly le dio 379 soles.

Problema 4 : Manuel nació el 25 de Mayo de 1 954. ¿En qué fecha y año cumple 50 años?

Resolución:

- Manuel nació: 25 de Mayo de: 1 954 +
- años en que deben transcurrir: 50

2 004

Rpta: Manuel cumplirá 50 años el 25 de Mayo del 2 004

Problema 5 : ¿Cuál es la suma de todos los números pares comprendidos entre 201 y 219?

Resolución:

Los números pares comprendidos entre 201 y 219 son los siguientes:

(201), 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, (219)

luego la suma será: 202 + 204 + 206 + 208 + 210 + 212 + 214 + 216 + 218 = 1 890

Rpta: Los números pares comprendidos entre 201 y 219 suman 1890

Problema 6 : ¿Cuál es la suma de todos los números de dos cifras, que son menores que 26?

Resolución:

Recordemos que el menor número de 2 cifras es el 10 y el mayor número de 2 cifras es el 99.

Luego, los números de dos cifras menores que 26 son:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, (26)

(16 términos)

Para hallar la suma de los 16 términos se aplica la Fórmula siguiente:

Nota: *Esta fórmula sólo se cumple cuando los números tienen una Razón Aritmética constante.*

$$\text{Suma} = \left(\frac{\text{Primer término} + \text{último término}}{2}\right) \text{\# de términos}$$

Aplicando la fórmula a nuestro problema se tiene:

$$S = \left(\frac{10+25}{\not{2}}\right) \times \not{16} = 35 \times 8 = 280$$

Rpta: La suma de todos los números de dos cifras que son menores que 26 es 280.

Problema 7 : ¿Cuánto se obtiene si se suman todos los números de tres cifras, cuya suma de sus digitos es cuatro?

Resolución:

Los números de tres cifras tienen la forma: $\overline{abc}$, donde la suma de sus dígitos es cuatro, osea: a + b + c = 4

Los números que cumplen con dicha condición son: $\overline{abc}$ ⇓⇓⇓

- Empezamos por el valor mínimo que toma a, b y c en este caso: a = 1, b = 1 y c = 2, luego buscamos sus combinaciones como: 121 y 211 — { 112, 121, 211
- Luego, pasamos a darle su valor consecutivo para «a» Osea: a = 2 y completamos los valores para «b» y «c» de acuerdo a la condición. Osea: b = 2 y c = 0, de igual manera se buscarán las combinaciones. — { 220, 202
- Ahora le damos el valor consecutivo para «a» osea: a = 3 y completamos los valores para «b» y «c» de acuerdo a la condición, osea: b = 0 y c = 1, de igual manera se buscarán las combinaciones. — { 301, 310, 103, 130
- Nuevamente le damos el valor consecutivo para «a» osea: a = 4 y completamos el valor para «b» y «c» de acuerdo a la condición: b = 0 y c = 0 — { 400

Luego efectuamos la suma de los números hallados, osea: 112 + 121 + 211 + 220 + 202 + 301 + 310 + 103 + 130 + 400 = 2 110

Rpta : La suma de todos los números de tres cifras cuya suma de sus dígitos es cuatro, es: 2 110

Problema 8 : ¿Cuánto se obtiene si se suman todos los números de dos cifras cuya suma de sus dígitos es 8?

Resolución:

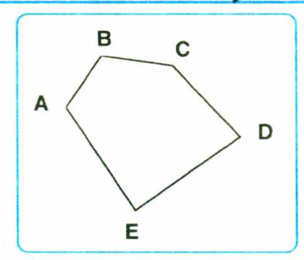
Los números de dos cifras son de la forma : $\overline{ab}$ donde: a + b = 8

Aplicando el mismo criterio que el problema anterior, obtenemos:

$\overline{ab}$
⇓⇓
17
71
26
62
35
53
44
80
388 **(Suma total)**

Rpta: La suma de todos los números de dos cifras cuya suma de sus dígitos es 8 es : 388.

Problema 9: En la figura mostrada:



El lado AB mide 6 cm, BC mide el doble de AB, CD mide 3 cm más que BC, DE mide tanto como BC y CD juntos y EA mide 4 cm menos que DE.

¿Cuánto mide el perímetro de la figura?

Esto es. ¿Cuánto vale AB + BC + CD + DE + EA?

Resolución:

Del Enunciado: AB = 6 cm ⇒ BC = 2AB = 2 (6cm) = 12 cm
CD = BC + 3 cm = 12 cm + 3 cm = 15 cm
DE = BC + CD = 12 cm + 15 cm = 27 cm
EA = DE - 4 cm = 27 cm - 4 cm = 23 cm

luego: Perímetro de la figura = AB + BC + CD + DE + EA = (6 + 12 + 15 + 27 + 23) cm = 83 cm

Rpta. El perímetro de la figura es igual a 83 cm.

Problema 10 : Percy pagó una deuda de 2 560 soles y más tarde pagó 4 342 soles, quedándole tanto como había pagado más 728 soles, ¿Cuánto dinero tenía?

Resolución:

En primer lugar, hallamos lo que pagó en total, osea: ➡

2 560 soles +
4 342 soles
―――――――
6 902 soles **(Deuda Total)**

En segundo lugar, hallamos lo que queda, osea:

Lo que le quedó = lo que había pagado + 728 soles
= 6 902 + 728 soles
= 7 630 soles

Luego, hallamos el dinero que tenía, sumando la deuda total más lo que le quedó, Así: ➡

6 902 soles +
7 630 soles
―――――――
14 532 soles

Rpta: El dinero que tenía Percy era: 14 532 soles.

TALLER DE PROBLEMAS Nº 13

Problema 1 : Manuel recibió 325 soles; Sara recibió 100 soles más que Manuel; Nataly tanto como Manuel y Sara juntos; más 200 soles. ¿Cuánto suman los soles recibidos por los tres?

Resolución:

Rpta. 1 700 soles

Problema 2 : Un obrero trabaja 3h 45 min. por la mañana y 3h 30 min. por la tarde. ¿Cuánto tiempo trabaja por día?

Resolución:

3h 45 min +
3h 30 min
6h 75 min

75 min = 60 min + 15 min
60 min = 1h

6h + 1h 15 min = 7h 15 min

Recuerda que: 1h < > 60 min.

Rpta. 7h 15 min.

Problema 3 : En un viaje a la ciudad de Ica, tres personas se turnan en el volante. Una guió durante 2h 20 min; la otra durante 50 min; y la tercera durante 2h 45 min. ¿Cuánto tiempo emplearon en recorrer el camino?

Resolución:

Rpta. 5h 55 min.

Problema 4 : ¿Cuánto se obtiene si se suman todos los números de dos cifras cuya suma de sus dígitos es 6?

Resolución:

Rpta. 225

Problema 5 : ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras que son menores que 121?

Resolución:

Rpta. 2 310

Problema 6 : a; b ; c; d y e son cinco números naturales, tales que:

a + b + c + d + e = 64 ; cuál sería el valor de:

$S = (a + 1) + (b + 2) + (c + 3) + (d + 4) + (e + 5)$

Resolución:

Rpta. 79

Problema 7 : Si: a ; b ; c y d son cuatro números naturales tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole m, probar que la suma de los dos números extremos es igual a la suma de los dos medios.

Resolución:

Problema 8 : El perímetro de un cuadrado es de 40 metros, si a cada lado le aumentamos 2 metros. ¿Cuál sería su nuevo perímetro?

Resolución:

Rpta. 48 m

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES

NIVEL I

Problema 1: Indique las Propiedades Numéricas de los siguientes conjuntos.

a) A = {x / x es mes del año}
b) B = {x / x es dedo del Pie}
c) C = {x / x es estación del año}
d) D = {x/x es departamento de la costa Peruana}

Problema 2: Si: A = {a , b , c , d , e , f} ;

B = {a , c , d , e} y C = {h , i , j , k}

Diga si es verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones.

a) $n(B) + n(C) = n(B \cup C)$
b) $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$
c) $n(A) + n(C) = n(A \cup C)$

Problema 3: ¿La Reunión de dos conjuntos es lo mismo que la Adición de dos números Naturales? ¿Porqué?

Problema 4: ¿Es lo mismo Suma de números Naturales que Adición de números Naturales? ¿Porqué?

Problema 5: Indica o anota la propiedad de la Adición que se usa en cada proposición siguiente:

a) $6 + 3 + 4 = (6 + 3) + 4 = 6 + (3 + 4)$: **Propiedad........**

b) $7 + 8 = 8 + 7$: **Propiedad.........**

Problema 6: Usando la técnica por Descomposición Polinómica, encontrar las siguientes sumas:

a) 637 + 572 **b)** 3 476 + 263 + 49
c) 7 472 + 328 **d)** 2 378 + 574 + 16

Problema 7: Un camión realiza tres viajes: En el primero lleva 1 746 ladrillos, en el segundo 3 645 y en el tercero 5 728. ¿Cuántos ladrillos condujo?

Problema 8: Mi hermano Víctor vendió su casa en 15 400 dólares es decir 2 670 dólares menos de lo que le costó. ¿Cuánto le costó la casa?

Problema 9: ¿Cuál es la suma de todos los números de dos cifras, que son menores que 30?

Problema 10: Las dimensiones de una cancha de fútbol son: 95 metros de largo y 36 metros de ancho. ¿Cuánto mide su perímetro?

Problema 11: ¿Cuál es la suma de todos los números impares comprendidos entre 200 y 248?

Clave de Respuestas

3. No es lo mismo porque la reunión es una operación entre conjuntos y la adición es una operación entre números o propiedades numéricas de conjuntos.

4. No es lo mismo; porque suma es el resultado de la operación y adición es la operación.

5. **a)** Asociativa **b)** Conmutativa

7. 11 119 ladrillos

8. 18 070 dólares **9.** 390

10. 262 metros **11.** 5 376

NIVEL II

Problema 1 : Manuel terminó la secundaria a los 16 años, se graduó de Ingeniero 5 años después, se casó 8 años más tarde, luego viajó a España 4 años después y 12 años más tarde fue nombrado Catedrático. ¿A qué edad fue nombrado Catedrático?

Problema 2 : Vanessa pagó una Deuda de 2 040 dólares y más tarde pagó 368 dólares, quedándole tanto como había pagado, más 528 dólares. ¿Cuánto dinero tenía?

Problema 3 : El menor de cuatro hermanos tiene 15 años y cada uno le lleva 2 años al que sigue. ¿Cuál es la edad de los tres primeros y cuál es la suma de las cuatro edades?

Problema 4 : Un comerciante ha comprado tela por 5 460 soles. ¿En cuánto debe vender estas telas para ganar 1 320 soles?

Problema 5 : Sara nació en 1 960 se casó a los 20 años, tres años después nació su hija y viajó a Japón cuándo su hija tenía 9 años. ¿En que año viajó a Japón?

Problema 6 : Un comerciante ha comprado cuatro reses por S/. 360, S/. 475, S/. 520 y S/. 628 respectivamente, si al venderlas gana en cada una S/. 120, S/. 156, S/ .210 y S/. 236 ¿Cuánto ha recibido en total?

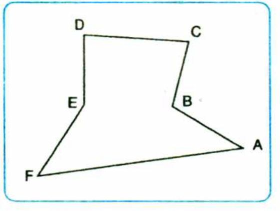
Problema 7 : Walter, después de cobrar su sueldo mensual ha comprado una camisa por S/. 38, un sacón por S/. 80, un par de zapatos por S/. 45, ha pagado su pensión de almuerzo S/. 270 y lleva a su casa S/. 120. ¿Cuál es el sueldo mensual de Walter?

Problema 8 : ¿Cuánto se obtiene si se suman todos los números de dos cifras cuya suma de sus dígitos es diez?

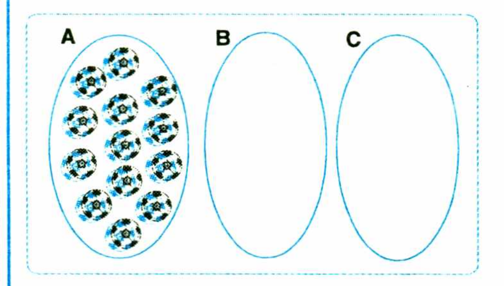
Problema 9 : César tiene tres libretas que suman 10 325 soles. ¿Cuál sería la suma si la primera libreta se aumenta en 389 soles, la segunda se aumenta en 472 soles más que la tercera y ésta tiene 1 340 soles?

Problema 10 : En la figura mostrada:

El lado AB mide 5 cm, BC mide el triple de AB, CD mide 6 cm. más que BC, DE mide el doble que AB, EF mide tanto como DE y AB juntos, y FA mide tanto como BC, CD y EF juntos. ¿Cuánto mide el perímetro de la figura? esto es, ¿Cuánto vale AB + BC + CD + DE + EF + FA?



Problema 11 : En la figura, el Conjunto "A" tiene 13 pelotas, "B" tiene el doble de pelotas que "A", y "C" tiene tantas pelotas como A y B juntos. Calcular el número de pelotas del conjunto: $A \cup B \cup C$.



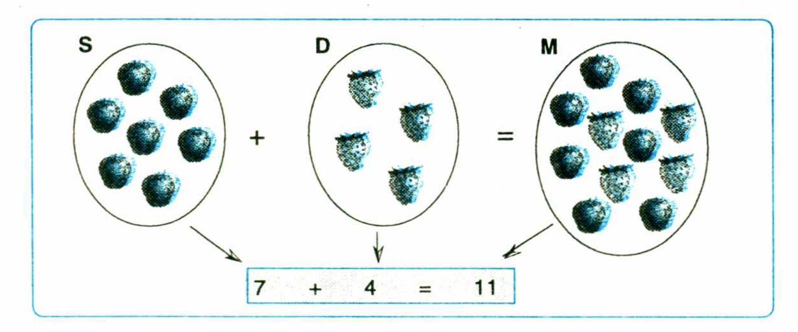
Clave de Respuestas

1. 45 años
2. 5 344 dólares
3. 21, 19 y 17 años, la suma de las edades de los cuatro es 72 años.
4. 6 780 soles
5. 1 992
6. S/. 2 705
7. 553 soles
8. 495
9. 13 866 soles
10. 117 cm
11. 78 pelotas

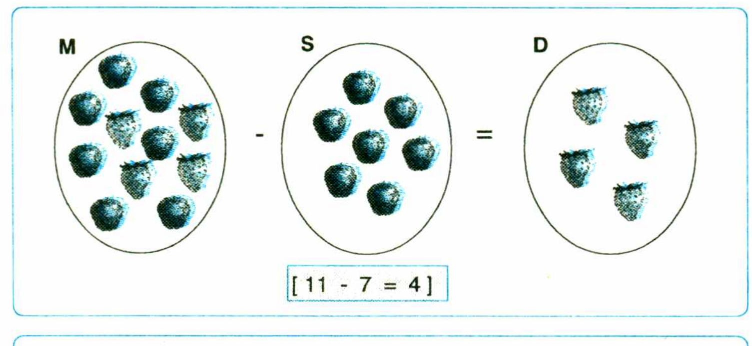
2.4 SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

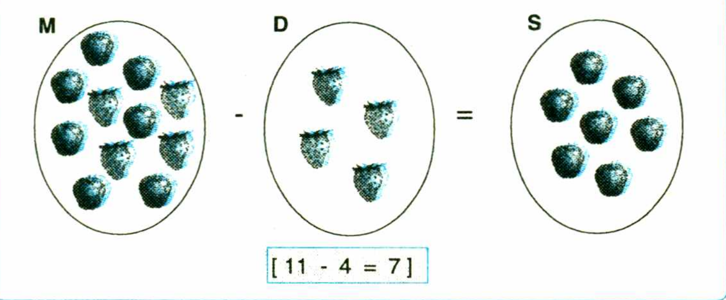
Es una operación inversa a la adición.

Observa los siguientes ejemplos y lo verás muy claro:



Por simple deducción:





Fíjate que primero reunimos los conjuntos y hallamos el conjunto **suma**. Después del conjunto suma separábamos los sumandos, al revés, ¿verdad? por eso decimos que la **sustracción** es una operación inversa a la **adición**.

¡IMPORTANTE!

La sustración no es una **operacion interna** en IN, porque dos número cualesquiera no siempre se pueden restar.

Ejemplo: 5 - 8 = -3 ⟶ ***no es natural***

Términos de la sustracción:

Del ejemplo anterior diremos que:

11	➠	Se llama **minuendo**, es el conjunto suma.
- 7	➠	Se llama **sustraendo**, es el conjunto sumando conocido.
4	➠	Recibe el nombre de **diferencia**, es el conjunto sumando que se busca.

Las igualdades que van colocadas al lado de los conjuntos las vamos a representar por sus símbolos osea:

11 - 7 = 4 ➠ M - S = D ; minuendo menos sustraendo, igual diferencia.

11 - 4 = 7 ➠ M - D = S ; minuendo menos diferencia, igual sustraendo.

11 = 7 + 4 ➠ M = S + D ; minuendo igual a sustraendo más diferencia.

Comúnmente se considera esta igualdad como la prueba de la sustracción.

ATENCIÓN: La sustración no es conmutativa ni asociativa

2.4.1 PROPIEDADES DE LA SUSTRACCIÓN:

1. **PROPIEDAD:** *Si se aumenta o disminuye el minuendo en un número aumenta o disminuye respectivamente la diferencia en ese número.*

Ejemplo 1:

$\underset{\text{Minuendo}}{13} - \underset{\text{Sustraendo}}{8} = \underset{\text{Diferencia}}{5}$; le aumentamos **6** al minuendo, obteniendo:

(13 + 6) - 8 = 11 ➠ la diferencia aumento en **6**.

Ejemplo 2:

20 - 7 = 13 ; si se disminuye al minuendo en **5**, se obtiene:

(20 - 5) - 7 = 8 como se observará la diferencia, también disminuye en 5.

2. **PROPIEDAD:** *Si se aumenta o disminuye el sustraendo en un número, disminuye o aumenta, respectivamente, la diferencia en ese mismo número.*

Ejemplo 1 :

15 - 9 = 6 ; si se aumenta el sustraendo en **3**, se obtiene:

(15: **Minuendo**; 9: **Sustraendo**; 6: **Diferencia**)

15 - (9 + 3) = 3 ➠ la diferencia disminuye en **3**

Ejemplo 2 :

15 - 9 = 6 ; si se disminuye el sustraendo en **4**; se obtiene:

15 - (9 - 4) = 10 ➠ la diferencia aumenta en **4**

3. **PROPIEDAD:** *Si al minuendo y sustraendo se les añade o se les resta un mismo número, la diferencia no varía.*

Ejemplo 1 :

15 - 9 = 6 ; al minuendo y al sustraendo les añadimos 7; obtenemos:

(15 + 7) - (9 + 7) = 6 ➠ la diferencia **no varia.**

Ejemplo 2 :

15 - 9 = 6 ; al minuendo y al sustraendo les restamos **8**; obtenemos:

(15 - 8) - (9 - 8) = 6 ➠ la diferencia **no varia.**

REFLEXIONA: *Hasta ahora hemos considerado sustracciones en las que el minuendo era mayor que el sustraendo, con los números naturales que son los números enteros positivos osea: 15 - 11 = 4, esta sustracción sí tiene sentido en el campo de los números naturales, pero si fuese: 11 - 15 = -4 esta sustracción no tiene sentido en el campo de los números naturales pero sí en el campo de los números enteros. Estas operaciones con números negativos, las realizarás cuando el profesor te lo indique.*

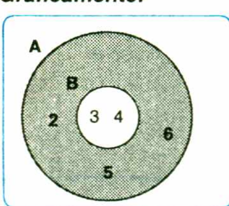
2.4.2 RELACIÓN ENTRE SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES Y LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Si: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{3, 4\}$

de acuerdo a estos conjuntos vemos que: $B \subset A$, es decir B es un subconjunto de A.

Luego: $A - B = \{2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4\} = \{2, 5, 6\} = C$

Gráficamente:



$A - B = \{2, 5, 6\}$

$A - B = C$

Luego: Card (A) - Card (B) = Card (C)

5 - 2 = 3

2.4.3 TÉCNICAS OPERATIVAS DE LAS SUSTRACCIONES

I) Por Descomposición Según el Valor de Posición. (Descomposición Polinómica).

Ejemplos: Efectuar: 784 - 345 Disposición:

$$\begin{array}{rcl} 784 = & 700 + 80 + 4 & = 700 + 80 + 4 \\ -345 = & -(300 + 40 + 5) & = -300 - 40 - 5 \end{array}$$

- Como se observará 4 no se puede restar con 5, esto indica que 80 se puede escribir asi: 80 = 70 + 10

Luego:
$$\begin{array}{rcl} 784 = & 700 + (70 + 10) + 4 & = 700 + 70 + 14 \\ -345 = & -300 - 40 - 5 & = -300 - 40 - 5 \\ & & = 400 + 30 + 9 = \boxed{439} \end{array}$$

II) Por Técnica Abreviatura:

Ejemplo: Efectuar: 976 - 549 Disposición:

$$\begin{array}{r} 976 \\ -\ 549 \\ \hline 427 \end{array}$$

➡ Aquí (6 - 9) no se puede restar, "prestamos" 1 decena de 7 que convertida en unidades es 10, le agregamos al 6 y queda (16 - 9) y (7 - 4) se convierte en (6 - 4).

*Nota: Este procedimiento de **"Prestar"** se realiza cada vez que a una cifra del minuendo no se puede **"Restar"** la correspondiente del sustraendo.*

2.4.4 PRUEBA DE LA SUSTRACCIÓN

Para estar seguro del resultado obtenido se prueba la operación añadiendo la diferencia o resultado al sustraendo y debe obtenerse EL MINUENDO.

Asi en:

$$\begin{array}{r} 726 \\ -\ 478 \\ \hline 248 \end{array} \quad \textbf{Se prueba} \quad \begin{array}{r} 248 \\ +\ 478 \\ \hline 726 \end{array}$$

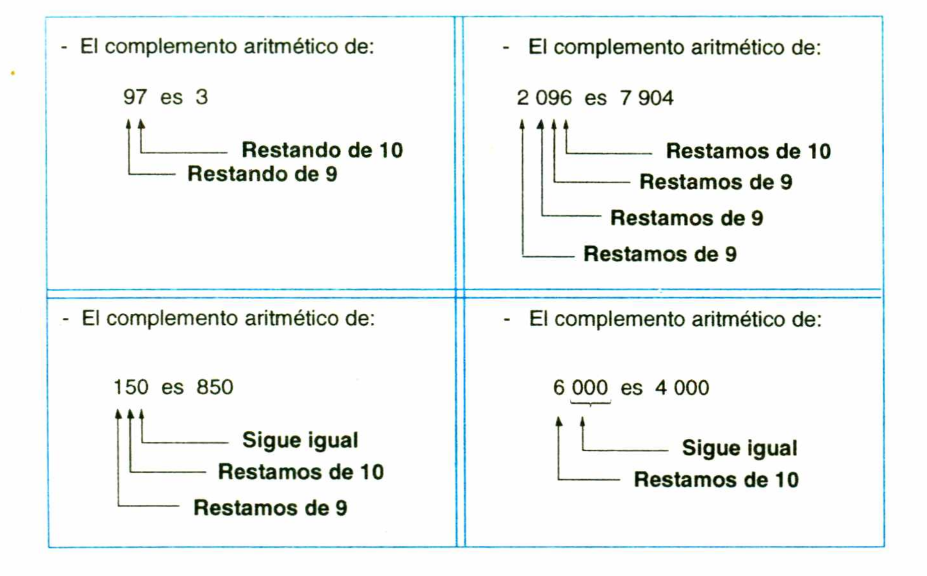
2.4.5 COMPLEMENTO ARITMÉTICO

El complemento aritmético de un número es lo que le falta a este número para igualar a la unidad de orden inmediato superior.

Ejemplos:
- El complemento aritmético de 7 es: 10 - 7 = 3
- El complemento aritmético de 32 es: 100 - 32 = 68
- El complemento aritmético de 538 es: 1 000 - 538 = 462

REGLA PRACTICA: El complemento aritmético de un número se obtiene con rapidez restando de 10 la primera cifra significativa de la derecha y las demás de 9. Si el número termina en ceros, estos se escriben primero.

Ejemplos:



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Ejercicio 1 : Si: C.A. $(\overline{ab}) = \overline{(2a)\,b}$. Hallar el valor de: "a + b"

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

- Como $\overline{ab}$; representa un número de 2 cifras; para hallar su complemento aritmético (C.A) de $\overline{ab}$; se resta de 100; veamos:

$100 - \overline{ab} = \overline{(2a)\,b}$; descomponiendo polinómicamente; obtenemos:

$$100 - (10a + b) = 10\,(2a) + b$$

$$100 = 30\,\underset{\substack{\Downarrow\\3}}{a} + 2\underset{\substack{\Downarrow\\5}}{b}$$; **por tanteo:** $a = 3$ y $b = 5$

Verificación: $100 = 30\,(3) + 2\,(5) = 90 + 10$ ***(Cumple)***

$\therefore$ $a + b = 3 + 5 = 8$ **Rpta. D**

Ejercicio 2: El mayor número de 2 cifras de la base 7 es la mitad del número N. Hallar el complemento aritmético de N.

A) 8 **B)** 16 **C)** 4 **D)** 34 **E)** 12

Resolución:

- El mayor número de 2 cifras en base 7; es: $66_{(7)}$

- **Del enunciado:** $66_{(7)} = \frac{1}{2}\,N$

Recuerda que:

- *El mayor número de 2 cifras en base "n" es: $\overline{(n-1)\,(n-1)}_n$*
  Ejemplo: *El mayor número de 2 cifras en base 5 es: $44_{(5)}$*
- *El menor número de 2 cifras en base "n" es: 10_n*
  Ejemplo: *El menor número de 2 cifras en base 5 es: $10_{(5)}$*

convertimos el número $66_{(7)}$ a base decimal (base 10); obteniendo:

$$6 \times 7 + 6 = \frac{1}{2} N$$

$$48 = \frac{1}{2} N \Rightarrow 96 = N$$

Luego, hallamos el complemento aritmético de N.

$$C.A.(N) = C.A.(96) = 100 - 96 = 4$$

∴ El complemento aritmético de N es: 4 **Rpta. C**

Ejercicio 3 : Existe un número de 2 cifras que excede en 74 a su complemento aritmético. Entonces la suma de sus cifras es:

A) 18 **B)** 21 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 24

Resolución:

- Sea el número de 2 cifras: $\overline{ab}$
- Complemento aritmético de $\overline{ab}$: $(100 - \overline{ab})$
  - **Del enunciado:** $\overline{ab} - (100 - \overline{ab}) = 74$
  $\overline{ab} - 100 + \overline{ab} = 74 \Rightarrow 2\overline{ab} = 174 \Rightarrow \overline{ab} = 87$

Por comparación: $a = 8$ y $b = 7$

∴ La suma de las cifras "a" y "b" es: 15 **Rpta. C**

Ejercicio 4 : El C.A. de un número de 3 cifras es igual a la suma de sus cifras. Dar la cifra central del número.

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 3

Resolución:

- Sea el número de 3 cifras: $\overline{abc}$
- Complemento aritmético de $\overline{abc}$: $(1\,000 - \overline{abc})$
  - **Del enunciado:** $(1\,000 - \overline{abc}) = (a + b + c)$

$1\,000 = \overline{abc} + (a + b + c)$; descomponemos polinómicamente el número abc.

$1\,000 = (100a + 10b + c) + (a + b + c)$

$1\,000 = 101a + 11b + 2c$; **Por tanteo:** $a = 9$; $b = 7$; $c = 7$

9 7 7

Verificación: $1\,000 = 101(9) + 11(7) + 2(7) = 909 + 77 + 14 = 1\,000$ (cumple)

∴ La cifra central del número $\overline{abc}$; es: $b = 7$ **Rpta. B**

Ejercicio 5 : Hallar un número de 2 cifras, sabiendo que al escribirle un cero a su derecha, aumenta en 333 unidades. (Dar como respuesta el C.A. de dicho número de 2 cifras).

A) 69 **B)** 57 **C)** 61 **D)** 48 **E)** 63

Resolución:

- Sea el número de 2 cifras: $\overline{ab}$
- Número que resulta de escribirle un cero a su derecha: $\overline{ab0}$

• **Del enunciado:** $\overline{ab0} - \overline{ab} = 333$

$$(100a + 10b + 0) - (10a + b) = 333 \Rightarrow 90a + 9b = 333$$

$$9\underbrace{(10a + b)} = 333$$

$$9\overline{ab} = 333 \Rightarrow \therefore\ \overline{ab} = 37$$

Por comparación: $a = 3$ y $b = 7$

Luego; hallamos el complemento aritmético de dicho número de 2 cifras, veamos:

$$\text{C.A. }(\overline{ab}) = \text{C.A }(\overline{37}) = 100 - 37 = 63$$

$\therefore$ Complemento aritmético de ab es: 63 **Rpta. E**

Ejercicio 6 : La suma de cifras del C.A. de $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4$; es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

Resolución:

- La expresión: $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4$; se puede escribir de la manera siguiente:

$5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 \cdot 10$; factorizamos: 10^3

$= 10^3 (5 + 7 \cdot 10)$

$= 10^3 (75)$; Ahora hallamos el C.A. de este número restándolo de 10^5.

Veamos:

C.A. de $(5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4) = 10^5 - 10^3 (75)$; factorizamos 10^3.

$= 10^3 (10^2 - (75)) = 10^3 (25) = 25\,000$

$\therefore$ Suma de cifras = 2 + 5 + 0 + 0 + 0 = 7 **Rpta. D**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 14

Ejercicio 1: Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{3xy}$.

Calcular el C.A. de $\overline{xy}$.

Resolución:

Rpta. 4

Ejercicio 2: Hallar: "a + b + c"

Si: C.A. $(\overline{abc}) = \overline{ca}$

Resolución:

Rpta. 18

Ejercicio 3: Hallar el C.A. de (a + b + c + d)

Si: $\overline{abcd} \times 3 = \overline{bcd1}$

Resolución:

Rpta. 78

Ejercicio 4: Hallar un número de 2 cifras sabiendo que es igual a 6 veces la suma de sus cifras. (Dar como respuesta su complemento aritmético).

Resolución:

Rpta. 46

2.4.6 OPERACIONES COMBINADAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN EN IN CON PARÉNTESIS

Recordemos que una expresión entre paréntesis está considerada como efectuada.

Así: 25 + (12 - 7) tiene el mismo significado que: 25 + 5

40 - (15 + 8) tiene el mismo significado que: 40 - 23

Como se habrá observado las operaciones dentro del paréntesis se han efectuado primero para suprimir dicho paréntesis.

Ejemplo 1

Efectuar: 65 + (35 - 18) - 12

65 + 17 - 12 = 70

65 + 17 = 82

82 - 12 = 70

Ejemplo 2

Efectuar : 38 - 15 + (8 + 12 - 4)

38 - 15 + 16 = 39

38 - 15 = 23

23 + 16 = 39

• En caso que no hubieran paréntesis, se procede a operar de izquierda a derecha asi :

Ejemplo 1

Efectuar: 43 - 16 + 24 - 6 = 45

43 - 16 = 27

27 + 24 = 51

51 - 6 = 45

Ejemplo 2

Efectuar: 18 + 7 - 2 - 10 + 13 - 5 = 21

18 + 7 = 25

25 - 2 = 23

23 - 10 = 13

13 + 13 = 26

26 - 5 = 21

2.4.7 APLICACIONES PRÁCTICAS CON LA SUMA Y DIFERENCIA DE NÚMEROS NATURALES

Dados la suma (S) y la diferencia (D) de dos números naturales "a" y "b" donde a > b, el número mayor "a" se calcula como la semisuma de S y D, es decir:

$$a = \frac{S + D}{2}$$

(**Semisuma** significa mitad de la suma)

El número menor "b" se calcula como la semidiferencia de S y D, es decir:

$$b = \frac{S - D}{2}$$

(**Semidiferencia** significa mitad de la diferencia.)

Ejemplo 1 : La suma de dos números es 16 y su diferencia es 10. Hallar dichos números.

Resolución:

Del enunciado, sabemos que: $S = 16$ y $D = 10$

Donde el número mayor sería: $a = \dfrac{S+D}{2} \Rightarrow a = \dfrac{16+10}{2} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{a = 13}$

Y el número menor sería: $b = \dfrac{S-D}{2} \Rightarrow a = \dfrac{16-10}{2} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{b = 3}$

Rpta: Los números pedidos son: 13 y 3

Ejemplo 2 : Las edades de Nataly y Vanessa suman 28 años. Si la edad de Nataly excede a la de Vanessa en 12 años.¿Cuántos años tuvo Nataly hace 3 años?. y ¿Cuántos años tendrá Vanessa dentro de 5 años?

Resolución:

Sean las edades actuales: Edad de Nataly = N ;
Edad de Vanessa = V

Del enunciado obtenemos: $S = 28$ y $D = 12$

Volviendo al problema se tiene que:

$$N = \frac{S+D}{2} = \frac{28+12}{2} = 20$$

$\boxed{N = 20 \text{ años}}$ (Edad actual de Nataly)

Recuerda que:

El exceso que existe entre dos cantidades es lo mismo que se diga diferencia entre dos cantidades. Veamos un ejemplo:

- *El número 4 es la **diferencia** entre los dos números 11 - 7, o el número 4 es el **exceso** de 11 con respecto a 7.*

$V = \dfrac{S-D}{2} = \dfrac{28-12}{2} = 8 \Rightarrow$ $\boxed{V = 8 \text{ años}}$ (Edad actual de Vanessa)

Luego: **a)** Nataly hace 3 años tuvo: $20 - 3 =$ $\boxed{17 \text{ años}}$

b) Vanessa dentro de 5 años tendrá: $8 + 5 =$ $\boxed{13 \text{ años}}$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 15

Problema 1 : Las edades de Manuel y Sara suman 78 años. Si la edad de Sara es excedida por la edad de Manuel en 6 años. ¿Hace cuántos años Sara cumplió 15 años?

Resolución:

Rpta. 21 años

Problema 2 : Si al minuendo se le resta 100 y al sustraendo se le suma 100. ¿En cuánto se ha aumentado o disminuido el resultado?

Resolución:

Rpta. ha aumentado en 200

Problema 3 : En un cierto número, la cifra de las centenas es 4 y la de las decenas 5. ¿En cuánto varía dicho número si se permutan estas dos cifras?

Resolución:

Rpta. 90

Problema 4 : La suma de los términos de una sustracción es 120. Si el sustraendo excede a la diferencia en 40. Hallar el valor de la diferencia.

Resolución:

Rpta. 10

Problema 5 :Una lámpara encendida a las 19h 45 min; ha sido apagada a medianoche. ¿Cuánto tiempo estuvo encendida?

Resolución:

media noche: 24 h	23 h 60 min -
apagado:	19 h 45 min
(Tiempo que estuvo encendida)	4 h 15 min

Recueda Que:

24 h < > 23 h + 1h → **60 min.**

Rpta. 4h 15min

Problema 6 : Para abrir un surco un obrero calcula emplear 5h 30 min. Trabajó durante 1h 20 min y más tarde durante 2h 50 min. ¿Cuánto tiempo debe trabajar aún para terminar su tarea?

Resolución:

Rpta. 1h 20 min

Problema 7 : Al efectuar una suma, se ha puesto el número 3 en vez del 8, en la cifra de las decenas, y 7 en vez del 6, en la de las centenas. ¿En cuánto ha sido aumentada la suma?

Resolución:

Rpta. En 150

Problema 8 : Probar que si dos diferencias son iguales, la suma del minuendo de la primera más el sustraendo de la segunda es igual a la suma del sustraendo de la primera más el minuendo de la segunda.

Resolución:

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Problema 1: Jorge está sobre una balanza y ésta marca 34 kilos. Entonces sube también su hermanita y la balanza marca 62 kilos. ¿cuanto pesa su hermanita?

Resolución:

Jorge sólo pesa = 34 kilos

Pero: Jorge + su hermanita pesan = 62 kilos

⇩

34 kilos + hermanita = 62 kilos

Luego: La hermanita pesa: 62 kilos - 34 kilos = 28 kilos ***Rpta***

Problema 2: Un aparato de radio cuesta 376 soles. Pero por pagar al contado me lo dan en 294 soles. ¿Cuál ha sido el descuento?

Resolución:

Sabemos que: Descuento = Lo que cuesta - Lo que se paga

Descuento = 376 soles - 294 soles

∴ Descuento = 82 soles ***Rpta***

Problema 3: La suma de dos números es 204 y uno de ellos es 93. ¿Cuál es el otro número?

Resolución:

Sean los números: "a" y "b"

Del enunciado: $a + b = 204$; pero uno de ellos es 93, supongamos que $a = 93$.

⇩

$93 + b = 204$

de donde: $b = 204 - 93$ ➡ $b = 111$

∴ El otro número es 111 ***Rpta***

Problema 4: Nataly acaba de comprar en la tienda 2 soles de pan y 12 soles en arroz y azúcar. Si ha dado un billete de 50 soles. ¿Cuánto tiene de vuelto?

Resolución:

Lo que gasta = 2 soles + 12 soles = 14 soles.

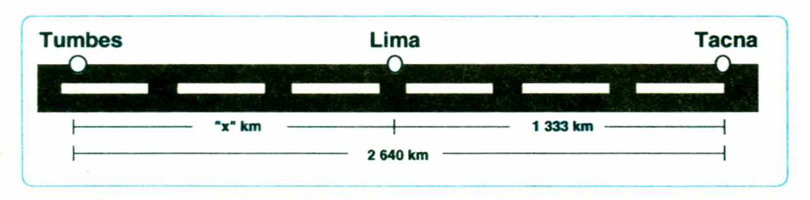
Vuelto que recibe = billete con que paga - lo que gasta

= 50 soles - 14 soles = 36 soles

∴ Nataly tiene de vuelto 36 soles. ***Rpta***

Problema 5: La distancia de Tacna a Tumbes es de 2 640 km y de Tacna a Lima 1 333 km ¿Cuál es la distancia de Lima a Tumbes?.

Resolución:



Del gráfico: x + 1 333 km = 2 640 km

x = 2 640 km - 1 333 km = 1 307 km

∴ La distancia de Lima a Tumbes es de 1 307 km. ***Rpta***.

Problema 6: Franklin tiene un sueldo de 850 soles. El presente mes ha gastado 300 soles en alimentación, 130 soles en ropa, 190 soles en vivienda, 40 soles en pasajes, 75 soles en pago de letras y con el resto ha comprado un radio. ¿Cuánto cuesta el radio?

Resolución:

Lo que gasta en total = 300 + 130 + 190 + 40 + 75 = 735 soles.

Costo del radio = lo que gana (sueldo) - lo que gasta en total.

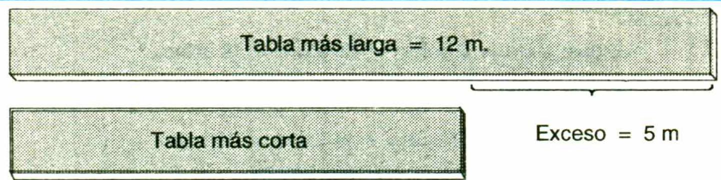
Costo del radio = 850 - 735 = 115 soles

∴ El radio cuesta 115 soles ***Rpta***.

Problema 7: El exceso del largo de una tabla sobre otra es de 5 metros, si la tabla más larga mide 12 metros. ¿Cuánto mide la otra tabla?

Resolución:

Para su mejor comprensión, construimos el siguiente gráfico:



Del gráfico: Tabla más corta = Tabla más larga - Exceso = 12 m - 5 m = 7 m

∴ **La otra tabla mide 7 m.** ***Rpta.***

Problema 8: La diferencia de dos números es 43 y el mayor excede a la diferencia en 72. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean los dos números a y b.

De donde: $a - b = 43$........ (En este caso "a" es el mayor y 43 la diferencia)

Adémas, el mayor excede a la diferencia en 72 ➨ $a - 43 = 72$

De donde: $a = 72 + 43 = 115$ ➨ ∴ $a = 115$

Luego, reemplazamos el valor de "a" en la expresión:

$a - b = 43$ ➨ $115 - b = 43$

$115 - 43 = b$ De donde: $72 = b$

∴ **Los números pedidos son: 115 y 72** ***Rpta.***

Problema 9: La suma de los términos de una sustracción es 480. ¿Cuál es minuendo?

Resolución:

Recordemos que los términos de una sustracción son: Minuendo, Sustraendo y Diferencia.

Del enunciado: $M + S + D = 480$ ... (1)

Por propiedad: $M - S = D$ ➨ $M = S + D$ ... (2)

Reemplazamos (2) en (1): $M + M = 480$

$$2M = 480 \Rightarrow M = \frac{480}{2} = 240$$

∴ **El minuendo es igual a 240** ***Rpta.***

Problema 10: El minuendo de una sustracción es 483 y el sustraendo es el doble de la diferencia. ¿Hallar el sustraendo y la diferencia?

Resolución:

Del enunciado: * Minuendo (M) = 483

* Sustraendo (S) = doble de la diferencia (D) ➨ S = 2D

Por Propiedad: M - S = D

De donde: 483 - 2D = D ➨ 483 = D + 2D ➨ 483 = 3D

$\frac{483}{3} = D$ ➨ **D = 161**

Luego, reemplazamos el valor de "D" en la expresión: S = 2D ➨ S = 2 (161) = 322 ➨ **S = 322**

∴ El valor del sustraendo y la diferencia son respectivamente de 322 y 161. ***Rpta.***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

NIVEL I

Problema 1: Si en una sustracción se aumenta el minuendo en 12 y el sustraendo en 7. ¿Qué le pasa al resultado?

Problema 2: Si el sustraendo disminuye en 8 unidades y el minuendo en 20, ¿Qué alteración sufre la diferencia?

Problema 3: Si a 138 - 67 restamos 23 tanto al minuendo como al sustraendo. ¿Qué pasa con la diferencia? y si sumamos 25 al minuendo. ¿Qué pasa con la diferencia? y si sumamos 12 al sustraendo. ¿Qué pasa con la diferencia?

Problema 4: La diferencia de edad entre un padre y un hijo es de 26 años; al cabo de 10 años. ¿Qué diferencia de edad habrá?

Problema 5: Cuándo Nataly nació su madre tenía 28 años. Ahora la madre tiene 39 años. ¿Qué edad tiene Nataly?

Problema 6: Si a la suma de dos números se añade la diferencia de los mismos ¿Qué resulta en el total?

Problema 7: Un padre tiene 43 años y su hijo 9 años. ¿Qué edad tendrá el padre cuando el hijo cumpla 43 años?

Problema 8: Si el minuendo y el sustraendo de una sustracción se duplican ¿Qué pasa con la diferencia?

Problema 9: Si en una sustracción al minuendo se le resta 7 y al sustraendo se le resta 9. ¿Qué alteración sufre la diferencia?

Problema 10: Quiero comprar un terreno de 6 500 dólares, pero sólo tengo 5 700 dólares. ¿Cuánto me falta?

Clave de Respuestas

1. Aumenta en 5.
2. Disminuye en 12.
3. No altera; aumenta en 25; disminuye en 12.
4. La diferencia también será de 26 años.
5. 11 años
6. 2 veces el número mayor.
7. 77 años
8. También se duplica
9. aumenta en 2
10. 800 dólares

NIVEL II

Problema 1 : Nataly ha ahorrado 573 soles y Vanessa 862 soles. ¿Cuánto más ha ahorrado Vanessa que Nataly?

Problema 2 : Si recibiera 372 soles podría comprar un televisor que cuesta 685 soles. ¿Cuánto tengo?

Problema 3 : Si me faltan 128 soles para comprar un objeto que cuesta 764 soles. ¿Cuánto es lo que tengo?

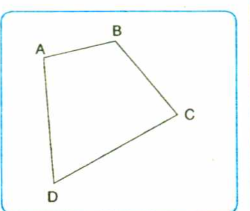
Problema 4 : La suma de los términos de una sustracción es 400. ¿Cuáles son esos números si la diferencia excede en 80 al sustraendo?

Problema 5 : Cuatro obreros han recibido 5 000 soles por un trabajo. Al primero le toca 960 soles, al segundo 220 soles más que al primero, al tercero 135 soles menos que a los primeros juntos, y al cuarto el resto. ¿Cuánto ha recibido cada uno ?

Problema 6 : En el cuadrilátero:

Su perímetro, o sea: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$,

mide 116 cm, el lado AB mide 10 cm, BC mide el triple de AB, CD mide tanto como AB y BC juntos. ¿Cuánto mide el lado DA?



Problema 7 : María dispone de 700 soles para comprar regalos a sus hijos Walter, Nora y Percy. Si el de Walter cuesta 225 soles, el de Nora 42 soles menos que el de Walter. ¿De cuánto dispone para comprar el regalo de Percy?

Problema 8 : La Edad de Eduardo es de 63 años y supera en un año a la suma de las edades de sus cuatro hijos. El primero tiene 26 años, el segundo es 9 años menor que el primero y 3 años mayor que el tercero. ¿Qué edad tiene el cuarto?

Problema 9 : ¿Cuánto valen las letras a y b en cada una de las siguientes operaciones?

a)	b)	c)	d)
809 -	7 589 -	9 4a7 -	3a 004 -
3a5	b9a	4 b65	b 46b
444	6 793	4 662	2b 53b

Problema 10 : Un granjero compra 131 598 pollos bebé, mueren 2 546 pollos antes de cumplir un mes, al segundo mes mueren 1 497. sí al tercer mes me quedan 123 540 pollos vivos para vender. ¿Cuántos pollos más murieron?

Problema 11 : Hallar el complemento aritmético de los siguientes números:

a) 53	**d)** 126	**g)** 3 472	**j)** 5 200
b) 76	**e)** 324	**h)** 5 863	**k)** 7 040
c) 98	**f)** 573	**i)** 7 935	**l)** 36 000

Clave de Respuestas

1. 289 soles **2.** 313 soles
3. 636 soles **4.** M = 200 ; S = 60 y D = 140
5. 855 soles **6.** 36 cm
7. 292 soles **8.** 5 años
10. 4 015 pollos

MULTIPLICACIÓN Y POTENCIACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

2.5 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES:

Sean los conjuntos A y B, siendo: A = { a , e , i } ➡ Card (A) = 3

B = { a , b , c , d } ➡ Card (B) = 4

Ahora, hallamos el producto cartesiano de estos dos conjuntos:

$$A \times B = \{a, e, i\} \times \{a, b, c, d\}$$

$$A \times B = \{ \underbrace{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (e,a), (e,b), (e,c), (e,d), (i,a), (i,b), (i,c), (i,d)} \}$$

Se han formado 12 pares ordenados

Luego: Card (A) × Card (B) = Card (A × B)

3 × 4 = 12

Quiero que te fijes en que la multiplicación es una Suma Abreviada de sumandos iguales.

3 × 4 = 12

4 + 4 + 4

La Expresión: 3 × (4) ; significa que el número 4 se repite 3 veces como sumando.

¡IMPORTANTE!

La multiplicación es una **operación interna** con los números naturales (IN); porque dos números cualesquiera siempre se pueden multiplicar.
Ejemplo: 8 x 4 = 32 ***es natural.***

ELEMENTOS DE LA MULTIPLICACIÓN.

Se llaman factores ⬅ { 3 × ➡ (Multiplicando); 4 ➡ (Multiplicador) }

12 ➡ (Se llama producto)

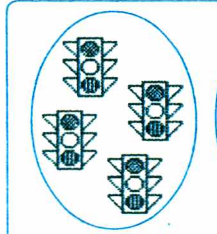
- La Operación se llama **Multiplicación** y el resultado se llama **Producto**.
- El signo de la operación de multiplicar es un aspa "X" que se lee "por"o también se usa el punto "•" ; o sea 3 × 4 = 3 • 4

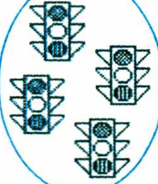
2.5.1 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

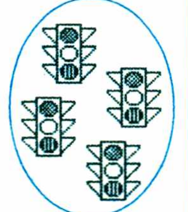
I) Propiedad Conmutativa*: Esta propiedad se enuncia diciendo que el orden de los factores no altera el producto, o sea:*

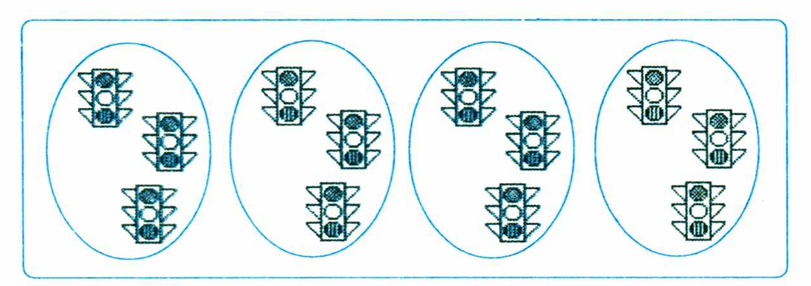
$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo: Si en lugar de tener 3 conjuntos de 4 elementos cada uno, tienes 4 conjuntos de 3 elementos cada uno.









La adición de los mismos, o la multiplicación (suma abreviada), da el mismo resultado. $4 \times 3 = 3 \times 4$

***II) Propiedad Asociativa**: Esta propiedad se enuncia diciendo que varios factores se puede sustituir por su producto y el resultado final no varia, o sea:*

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo: Si quieres averiguar cuántos alumnos hay en la clase y sabes:

- Que la clase tiene 4 filas de carpetas
- Que cada fila tiene 7 carpetas
- Que en cada carpeta se colocan 2 alumnos.

La operación que harias sería: $4 \times 7 \times 2 = (4 \times 7) \times 2 = 4 \times (7 \times 2) = 56$

$$28 \times 2 = 4 \times 14 = 56$$

***III) Propiedad Distributiva**: Esta propiedad se enuncia diciendo que, para multiplicar, una suma por un número se multiplica cada sumando por dicho número y, al final se suman los resultados parciales, o sea:*

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Ejemplo: Imagínate que vas a un colegio mixto, donde hay 6 salones de niños y 8 salones de niñas. En cada salón hay 40 alumnos, te pregunto ¿Cuántos alumnos hay en el colegio?

Harías lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 6 \times 40 = 240 + \\ 8 \times 40 = \underline{320} \\ 560 \text{ alumnos} \end{array}$$

También podrías hacer lo siguiente:

Sumar el número de salones y multiplicar dicha suma por el número de alumnos que tiene cada salón, así: $(6 + 8) \times 40 = 14 \times 40 = 560$

Pero también puedes:

Distribuir los dos sumandos para que hagan parejas con el número 40 y dirás:

$$(6 \times 40) + (8 \times 40) = 240 + 320 = \boxed{560}$$

SACAR FACTOR COMÚN:

Fíjate en la siguiente igualdad: $\underbrace{3 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 4 = 56}$

Todos los términos del primer miembro contienen el factor "4" siendo éste un **Factor Común** a todos los términos.

Pues bien:

$$3 \times \underline{\mathbf{4}} + 5 \times \underline{\mathbf{4}} + 6 \times \underline{\mathbf{4}} = 56$$

$$\underline{\mathbf{4}}\,\underbrace{(3 + 5 + 6)} = 56$$

$$\underline{\mathbf{4}}\,(14) = 56$$

; Lo que hemos realizado se llama sacar **Factor Común**:

> ***IV) Propiedad de Multiplicar del Uno o Elemento Neutro*** *: LLamamos elemento* ***Neutro*** *de la multiplicación al número que multiplicado por cualquier otro no lo varía.*
>
> *El elemento* ***Neutro*** *o elemento* ***Idéntico*** *de la multiplicación es el 1.*
>
> *Así:* $\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$

Ejemplo. **a)** $4 \times 1 = 4$; **b)** $4 \times 5 = 20 \Rightarrow (4 \times 1) \times 5 = 20$

> ***V) Propiedad Multiplicativa del Cero o Propiedad Absorvente****: El* ***Cero*** *se considera como uno de los números cardinales y se usa este número según las mismas reglas de los números naturales.*

En la multiplicación: ¿Que significa 5×0 ?

Expliquemos: Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \phi$

(El conjunto vacío no tiene ningún elemento, numéricamente es igual a cero)

Luego: $A \times B = \phi$; porque no se pueden formar pares ordenados.

Si : $\left.\begin{array}{r} Card(A) = n(A) = 5 \\ Card(B) = n(B) = 0 \\ Card(A \times B) = n(A \times B) = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{ccccc} n(A) & \times & n(B) & = & n(A \times B) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ 5 & \times & 0 & = & 0 \end{array}$

VI) *Propiedad de Monotomía* : *Si a los dos miembros de una igualdad se les multiplica por un mismo número natural se obtiene otra igualdad.*

Ejemplo: Si: $5 + 3 = 8$, multiplico "x2" los dos miembros:

Entonces: $\begin{array}{ccc} 2(5+3) & = & 2(8) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ 16 & = & 16 \end{array}$

VII) *Propiedad de Cancelación*: *Si en los dos miembros de una igualdad aparece un mismo factor diferente de cero, éste factor puede suprimirse o cancelarse.*

Ejemplo: $\cancel{6} \times 3 = \cancel{6}(5 - 2)$, cancelando o suprimiendo el factor 6 en ambos miembros, tenemos:

$3 = 5 - 2$

VIII) *Propiedad de Clausura*: *Dados dos números naturales* ***a*** *y* ***b*** *cualesquiera, su producto* ***c****, es siempre otro número natural.*

Ejemplo: $3 \times 5 = 15$; Donde 3 y 5 son números naturales, entonces el producto 15 también es natural.

TABLA DE LA MULTIPLICACIÓN

En el siguiente cuadro o "TABLA" de doble entrada podemos hallar el "Producto" de algunos "pares" de números.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fila

Columna

- El manejo de la tabla es fácil.

Ejemplo:

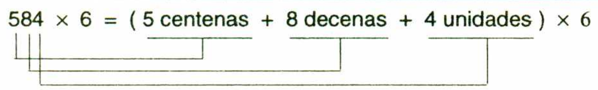
Quieres multiplicar 2×3. Busca dichos factores, uno en la línea de las FILAS y el otro, en la de las COLUMNAS, se sigue la fila de uno y la columna del otro y donde se encuentran, está la solución. En este caso: $2 \times 3 = 6$.

Observa que el par (4 , 4) la multiplicación le hace corresponder en la tabla el número 16, es decir: $4 \times 4 = 16$.

Así mismo al par (6 , 7) le hace corresponder el número 42, es decir: $6 \times 7 = 42$.

2.5.2 TÉCNICAS OPERATIVAS DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Ejemplo: Efectuar: 584×6, descomponemos 584 según el valor de posición:



Aplicando la propiedad distributiva, se tiene:

= 6 (5centenas) + 6 (8 decenas) + 6 (4 unidades)

= 30 centenas + 48 decenas + 24 unidades

convertimos las centenas y las decenas a unidades.

= 30 (100 unidades) + 48 (10 unidades) + 24 unidades.

= 3 000 + 480 + 24 = **3 504**

Otra Disposición:

```
 584  →  5c + 8d + 4u
x  6  →  x          6
      = 30c + 48d + 24u
      = 30 ( 100u ) + 48 ( 10u ) + 24u
      = 3000u + 480u + 24u = 3504
```

TÉCNICA ABREVIADA: Si observas la técnica operativa y disposición del ejemplo anterior, te darás cuenta que es la misma forma; pero abreviada de las que has aprendido ha multiplicar.

Ejemplo 1: Efectuar: 584 × 6 Disposición:

```
  584
×   6
-----
  24u  →     24 +
 48d   →    480
30c    →  3 000
          -----
          3 504
```

Ejemplo 2: Efectuar: 342 × 657 Disposición:

```
                     342 ×
                     657
                    -----
Productos    7 × 342  →    2394
Parciales   5 × 342   →   1710
           6 × 342    →  2052   +
                        ------
                        224694
```

2.5.3 MULTIPLICACIONES ABREVIADAS DE NÚMEROS NATURALES

1. Cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros.

Para multiplicar un número natural por la unidad seguida de ceros, se agrega a la derecha del número natural, tantos ceros, como sigan a la unidad. Así:

- 17 × 10 = 170
- 23 × 1 000 = 23 000
- 24 × 100 = 2 400
- 149 × 10 000 = 1 490 000
- 35 × 1 000 = 35 000
- 328 × 100 000 = 32 800 000

2. Cuando uno de los dos factores terminan en ceros.

Se efectúa la multiplicación de los dos números sin tener en cuenta los ceros, pero en el resultado o producto se agregan tantos ceros como ceros tenga el factor o los dos factores.

Ejemplo 1 :

Efectuar: 274 × 1 400

Disposición:

```
  274   ×
   14[00]
 --------
 1096
 274
 --------
 3836[00]
```

Ejemplo 2 :

Efectuar: 35 200 × 16 000

Disposición:

```
  352[00]  ×
   16[000]
 ----------
 2112
 352
 ----------
 5632[00000]
```

3. Producto de un Número Natural por 5.

Para multiplicar un número natural por 5; se le multiplica por 10 y el producto se divide entre 2.

Ejemplos:

$$36 \times 5 = \frac{36 \times 10}{2} = 180 \quad ; \quad 124 \times 5 = \frac{124 \times 10}{2} = 620$$

4. Producto de un Número Natural por 15.

Para multiplicar un número natural por 15 se le aumenta un cero a la derecha del número y se le suma la mitad de éste número. Así:

Ejemplos:

```
36 × 15 = 360 +    ;   26 × 15 = 260 +
          180                    130
          ---                    ---
          540                    390
```

5. Producto de un Número Natural Por 25.

Para multiplicar un número natural por 25, se le añade al número dos ceros a su derecha y se divide entre cuatro.

Ejemplos:

$$42 \times 25 = \frac{4\,200}{4} = 1\,050 \quad ; \quad 76 \times 25 = \frac{7\,600}{4} = 1\,900$$

6. Producto de un Número Natural por Otro formado sólo por cifras 9.

Se escribe a la derecha del número tantos ceros como nueves tenga el otro, a éste número obtenido le restamos el número original.

Ejemplo: Multiplicar: 273 × 99

Como el segundo número está formado por 2 nueves, al número 273 le agregamos 2 ceros a su derecha, obteniendo 27 300 luego al número obtenido le restamos el número original 273. Así:

$$\begin{array}{r} 27\,\mathbf{300}\ - \\ 273 \\ \hline 27\,027 \end{array}$$

$\therefore\quad 273 \times 99 = 27\,027$

Otro Ejemplo: Multiplicar: 3674 x 999

Como el segundo número está formado por tres nueves, al número 3 674 le agregamos tres ceros a su derecha, obteniendo 3 674 000 , luego al número obtenido 3 674 000, le restamos el número original 3 674. Así:

$$\begin{array}{r} 3\,674\,\mathbf{000}\ - \\ 3\,674 \\ \hline 3\,670\,326 \end{array}$$

$\therefore\quad 3\,674 \times 999 = 3\,670\,326$

7. Producto de un Número Natural por otro de dos cifras uno de los cuales es la Unidad.

Para multiplicar un número natural por otro de dos cifras, uno de los cuales es la unidad, basta multiplicarlo por la cifra que acompaña a la unidad, se escribe este producto parcial debajo del multiplicando corriendo un lugar hacia el lado que está dicha cifra respecto a la **unidad**. La suma del multiplicando con este producto parcial así dispuesto es el resultado final.

Ejemplo 1:

Multiplicar: 2 374 × 16

Resolución:

$$\begin{array}{r} 2374 \times 16 \\ 14244 \\ \hline 37984 \end{array}$$

Ejemplo 2.

Multiplicar: 5 672 × 31

Resolución:

$$\begin{array}{r} 5672 \times 31 \\ 17\,016 \\ \hline 17\,5832 \end{array}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 16

Ejercicio 1 : Calcule los siguientes productos:

a) 603 × 57 =	**d)** 523 × 407 =	**g)** 5 263 × 607 =
b) 809 × 34 =	**e)** 612 × 528 =	**h)** 36 498 × 275 =
c) 752 × 76 =	**f)** 328 × 973 =	**i)** 37 064 × 576 =

Ejercicio 2 : Halle abreviadamente los resultados de:

a) 27 × 10 =	**j)** 87 × 5 =	**r)** 473 × 99 =
b) 49 × 10 =	**k)** 983 × 5 =	**s)** 3 246 × 999 =
c) 13 × 100 =	**l)** 3 562 × 5 =	**t)** 128 × 9 999 =
d) 374 × 100 =	**m)** 142 × 25 =	**u)** 37 × 99 999 =
e) 36 × 1 000 =	**n)** 346 × 25 =	**v)** 2 576 × 14 =
f) 526 × 1 000 =	**ñ)** 2 543 × 25 =	**w)** 438 × 81 =
g) 3 875 × 1 000 =	**o)** 326 × 15 =	**x)** 3 608 × 16 =
h) 278 × 10 000 =	**p)** 49 × 15 =	**y)** 35 342 × 71 =
i) 5 342 × 100 000 =	**q)** 1 243 × 15 =	**z)** 473 × 13 =

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS EN BASE 2. **Tabla de Multiplicar.** Teniendo en cuenta que en el sistema binario los números de una cifra son 0 y 1, la tabla de multiplicar correspondiente a ellos es la siguiente:

x	0	1
0	0	0
1	0	1

- En la numeración binaria, para multiplicar números de varias cifras se procede igual que en la multiplicación decimal.

♦ **Ejemplo:**

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ \times\ 11_2 \\ \hline 101_2 \\ 101_2\ \ \\ \hline 1111_2 \end{array}$$

Verificación: Se verifica el resultado mediante la numeración decimal.

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*
101_2	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 5$
$\times\ 11_2$	⟷	$1 \times 2 + 1 = 3$ (x)
1111_2	⟷	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 15$

♦♦ **Ejemplo:**

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*
100_2	⟷	$1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 = 4$
$\times\ 111_2$	⟷	$1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 7$ (x)
100_2		28
100_2		
100_2		
11100_2	⟷	$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 = 28$

♦♦♦ **Ejemplo:**

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*
1101_2	⟷	13
$\times\ 110_2$	⟷	6
0000		78
1101_2		
1101_2		
1011110_2	⟷	78

♦♦♦♦ **Ejemplo:**

Numeración Binaria		*Numeración Decimal*
111_2	⟷	$1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 7$
$\times\ 10_2$	⟷	$1 \times 2 + 0 = 2$ (x)
000		14
111_2		
1110_2	⟷	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 14$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 17

- Efectuar las siguientes multiplicaciones expresados en base 2 y verificar los resultados obtenidos; pasando a base 10.

Ejercicio 1 : $101_2 \times 1111_2$

Resolución:

Rpta 75

Ejercicio 4 : $1100_2 \times 1010_2$

Resolución:

Rpta 120

Ejercicio 2 : $1010_2 \times 110_2$

Resolución:

Rpta 60

Ejercicio 5 : $100111_2 \times 11001_2$

Resolución:

Rpta 975

Ejercicio 3 : $11111_2 \times 1111_2$

Resolución:

Rpta 465

Ejercicio 6 : $11011_2 \times 1110_2$

Resolución:

Rpta 378

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Problema 1 : La frutería "El Naranjal" ha recibido 5 cajones de 100 manzanas cada uno, si ha vendido 346 manzanas y se han malogrado 53, ¿Cuántas quedan por vender?

Resolución:

En los 5 cajones hay: $5 \times 100 = 500$ manzanas.

Entre vendidas y malogradas: $346 + 53 = 399$ manzanas.

Quedan por vender: $500 - 399 = 101$ manzanas.

$\therefore$ Quedan por vender 101 manzanas. ***Rpta.***

Problema 2 : La familia "Coveñas" residentes en Lima compuesta por el Padre, la Madre y dos hijas, salen de viaje al cuzco,donde permanecen 5 días. Si durante cada uno de estos días han gastado 25 soles por persona y los gastos de viaje ascienden a 50 soles por cada uno. ¿Cuánto costó el paseo?

Resolución:

Estando en el Cuzco, cada persona gasta 25 soles diario como son 4 personas:

Gastarán: $4 \times 25 = 100$ soles por día.

En 5 días gastarán: $5 \times 100 = 500$ soles.

En el viaje gastan: $4 \times 50 = 200$ soles.

Gasto total: 500 soles + 200 soles = 700 soles

$\therefore$ El paseo costó 700 soles. ***Rpta.***

Problema 3 : Manuel compra 35 objetos a 27 soles cada uno y los vende a 42 soles cada uno. ¿Cuánto ha ganado en el negocio?

Resolución:

Producto de la compra: $35 \times 27 = 945$ soles. Producto de la venta: $35 \times 42 = 1\,470$ soles

Ganancia = Producto de la Venta - Producto de la Compra

Luego: Ganancia = S/. 1 470 - S/. 945 = S/. 525

$\therefore$ En el negocio ha ganado 525 soles. **Rpta.**

Problema 4 : Un reloj se atrasa 2 minutos cada hora ¿Cuántos minutos se atrasará en 30 días?

Resolución:

- El reloj se atraza 2 minutos por cada hora que transcurre.
- Los 30 días lo llevamos a horas; sabiendo que 1 día = 24 horas

Luego: 30 días = 30 × 24 horas = 720 horas.

En 30 días se atrasará: 720 × 2 minutos = 1 440 minutos

∴ **En 30 días se atrasará 1 440 minutos** **Rpta.**

Problema 5 : ¿Qué sucede con el producto de dos factores 6 x 8, si se agrega 1 a cada uno de los factores?

Resolución:

Producto inicial: 6 × 8 = 48

Si se agrega 1 a cada uno de los factores, éstos nuevos factores serían:
(6 + 1) × (8 + 1) = 7 × 9 = 63

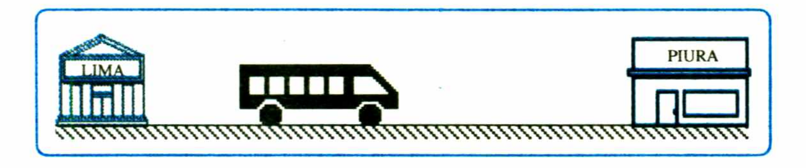
Cómo se observará el producto aumenta en: 63 - 48 = 15

∴ **Al agregar 1 a cada uno de los factores 6 × 8, el producto aumenta en 15.** ***Rpta.***

Problema 6 : Un ómnibus hace tres viajes semanales de ida y vuelta Lima - Piura - Lima, transportando 48 pasajeros en cada salida.

Si cobra 18 soles por pasajero y gasta un promedio de 300 soles en combustible y 150 en accesorios, por viaje de ida y vuelta. ¿Cuánto gana semanalmente el dueño de éste ómnibus?

Resolución:



- Número de pasajeros en cada viaje = 2 × 48 = 96.

  en tres viajes = 3 × 96 = 288 pasajeros
- Recaudación en los tres viajes = 288 × S/. 18 = S/. 5 184.

  Lo que se gasta en cada viaje en combustible y accesorios = S/. 300 + S/. 150 = S/. 450.

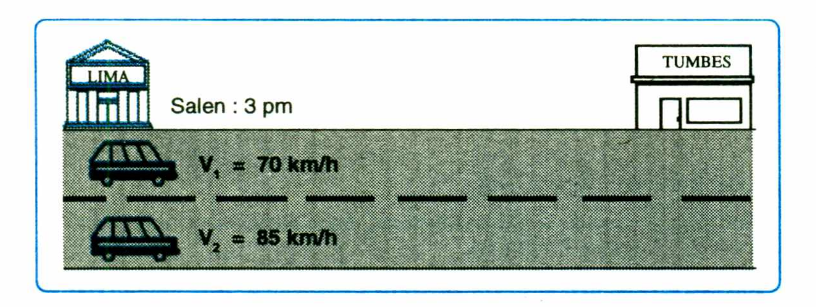
En los 3 viajes gastará: 3 × S/. 450 = S/. 1 350

Ganancia = S/. 5 184 - S/. 1 350 = S/. 3 834.

∴ **Lo que gana semanalmente el dueño de este ómnibus es de S/. 3 834.** *Rpta.*

Problema 7 : Dos automóviles salen a las 3pm. de Lima con dirección a Tumbes a 70 km/h y 85 km/h ¿Qué distancia los separa a las 10 pm del mismo día?

Resolución:



Desde las 3 pm a la 10 pm, han transcurrido 7 horas, de acuerdo a las velocidades de 70 km/h y 85 km/h, esto nos da a entender que en 1 hora la distancia que los separa es de 15km.

Luego: Si en una hora la separación es de 15km.

En 7 horas la separación será de: 7 x 15km = 105km.

∴ **La distancia que los separa a las 10pm. del mismo día es de 105 km.** *Rpta.*

TALLER DE PROBLEMAS Nº 18

Problema 1 : Si Juan tiene 220 soles; Jorge el duplo del dinero que tiene Juan y Enrique el triple del dinero que tiene Juan y Jorge juntos. ¿Qué suma de dinero tienen entre los tres?

Resolución:

Rpta. S/. 2 640

Problema 2 : La cola de un pescado es de 5 cm; la cabeza es el doble de la cola, el cuerpo tiene una longitud igual a la cabeza más el triple de la cola. ¿Cuál es el largo total del pescado?

Resolución:

Rpta. 40 cm

Problema 3 : Un tapicero ha trabajado desde las 9h 30 min hasta las 12 horas, y desde las 14 horas hasta las 17 h 30 min. ¿Cuánto debe cobrar si se le paga a razón de 10 soles la hora?

Resolución:

Rpta. S/. 60

Problema 4 : Manuel es un agricultor muy ordenado para sus siembras. En esta temporada plantó:
7 hileras de 5 naranjas cada una.
9 hileras de 3 manzanas cada una.
5 hileras de 5 duraznos cada una.
¿Cuántos frutales podrán crecer gracias a sus cuidados?

Resolución:

Rpta. 87

Problema 5 : Un reloj se adelanta 3 minutos cada hora. ¿Cuántos minutos se adelantará en 15 días?

Resolución:

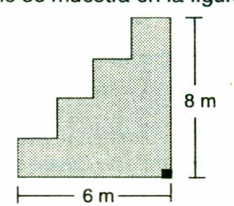
Rpta. 1 080 min.

Problema 6 : María compra 28 pares de medias a 5 soles cada par y los vende a 7 soles cada par.
¿Cuánto ha gando en el negocio?

Resolución:

Rpta. S/. 56

Problema 7 : Si un metro de alfombra cuesta 20 soles. ¿Cuánto costaría alfombrar la escalera como se muestra en la figura?



Resolución:

Rpta. S/. 280

Problema 8 : ¿Qué sucede con el producto de dos factores 10 x 12, si se quita 2 unidades a cada uno de sus factores?

Resolución:

Rpta. Disminuye en 40.

2.5.4 CÁLCULO MENTAL APLICADO A LA MULTIPLICACIÓN

Varios procedimientos de cálculo mental utilizan las propiedades de la multiplicación

I) PRIMER PROCEDIMIENTO

Se descompone uno de los factores en una **SUMA**, se multiplica el otro factor por cada uno de los sumandos y se suman los resultados. Veamos:

a) $27 \times 24 = 27 \times (20 + 4) = 540 + 108 = 648$

b) $46 \times 4 = (40 + 6) \times 4 = 160 + 24 = 184$

c) $101 \times 32 = (100 + 1) \times 32 = 3\,200 + 32 = 3\,232$

d) $28 \times 73 = 28 \times (70 + 3) = 1\,960 + 84 = 2\,044$

Observación: Se recomienda este procedimiento, que es aplicación de ***la Propiedad Ditributiva,*** *cuando a un factor se puede descomponer en un número redondo y un número pequeño .*

II) SEGUNDO PROCEDIMIENTO

Se descompone a uno de los factores en una diferencia, se multiplican separadamente y se restan los resultados.

Ejemplos:

a) $39 \times 7 = (40 - 1) \times 7 = 280 - 7 = 273$

b) $46 \times 9 = 46 \times (10 - 1) = 460 - 46 = 414$

Observación: Se recomienda este procedimiento que es aplicación también de la ***Propiedad Distributiva****, cuando a uno de los factores le falta 1 ó 2 unidades para ser un número redondo, y el otro factor es un número pequeño.*

Nota: Entiéndase por número ***Redondo****, aquellos números que terminan en cero*

III) TERCER PROCEDIMIENTO

Se descompone a uno de los factores en un producto y se asocian convenientemente los factores para facilitar los cálculos.

Ejemplos**:** **a)** $25 \times 12 = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3 = 300$

b) $125 \times 72 = (125 \times 8) \times 9 = 1\,000 \times 9 = 9\,000$

c) $25 \times 9 \times 3 \times 4 = (25 \times 4) \times (9 \times 3) = 100 \times 27 = 2\,700.$

2.5.5 OPERACIONES COMBINADAS DE MULTIPLICACIÓN, ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN EN $\mathbb{N}$

Cuando aparecen operaciones combinadas de Adición, Sustracción y Multiplicación, se sigue el siguiente orden.

1) Primero se efectúan las operaciones encerradas en paréntesis, si es que las hay.

2) Luego se efectúan las multiplicaciones .

3) Por último se efectúan las adiciones y sustracciones en el orden en que aparecen.

Ejemplo 1: Efectuar: $8 + 3 \times 4 - 16 + 5$

Resolución:

$8 + 3 \times 4 - 16 + 5 = 8 + 12 - 16 + 5 = \boxed{9}$

20

4

9

Ejemplo 2: Efectuar: $18 - 5 \times 3 + 14 - 2 \times 6$

Resolución:

$18 - 5 \times 3 + 14 - 2 \times 6 = 18 - 15 + 14 - 12 = \boxed{5}$

3

17

5

Ejemplo 3: Efectuar: $15 - 2 + (7 + 2 \times 8 - 9) + 4(11 - 8)$

Resolución $15 - 2 + (7 + 2 \times 8 - 9) + 4(11 - 8) = 15 - 2 + (7 + 16 - 9) + 4(3)$

$= 15 - 2 + 14 + 12$

$= 13 + 14 + 12 = 27 + 12 = \boxed{39}$

Ejemplo 4: Efectuar: $81 - (7 \times 3 + 6) + (9 \times 8 - 13 \times 4) - 2(9 + 3)$

Resolución: $81 - (7 \times 3 + 6) + (9 \times 8 - 13 \times 4) - 2(9 + 3)$

$= 81 - (21 + 6) + (72 - 52) - 2(12)$

$= 81 - 27 + 20 - 24 = 54 + 20 - 24 = 74 - 24 = \boxed{50}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE MULTIPLICACIÓN, ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

NIVEL I

Si por un libro se paga 15 soles. ¿Cuánto se pagará por una docena de ellos?

Si en un determinado lugar el metro cuadrado de terreno cuesta 25 dólares. ¿Cuánto vale el lote de 400 metros cuadrados?

A una casa de ventas de repuestos de automóvil han llegado 10 cajas que contienen 12 paquetes de 9 bujías cada una. ¿Cuántas bujías ha recibido?

En la carpintería de don Lucho, trabajan 6 operarios que ganan 12 soles diarios incluyendo dominical. ¿Cuánto paga semanalmente don Lucho a sus operarios?

El vendedor de un puesto de mercado recibe dos cajones con 100 manzanas cada uno. Si pagó S/. 30 por cajón y vende a S/. 0,4 cada manzana, habiéndose malogrado 15. ¿ Cuánto gana en este negocio?

La bodega "Mi Pollo" ha recibido 8 cajones de 50 huevos cada uno. Si de estos ha vendido 224 huevos. ¿Cuántos huevos quedan?

Un empresario ocupa los servicios de 18 obreros durante una semana pagándole dominical. Si a 6 de ellos paga S/. 15 diarios y S/. 12 a cada uno de los restantes. ¿Cuánto desembolsa el día de pago?

Para 120 internos de un colegio militar se han comprado igual número de camas, colchones y almohadas. Si cada cama cuesta S/. 125, cada colchón S/. 95 y cada almohada S/. 20. ¿Cuánto importa la compra?

Clave de Respuestas

1. 180 soles	**2.** 10 000 dólares
3. 1 080 bujías	**4.** 504 soles
5. 14 soles	**6.** 176 huevos
7. 1 638 soles	**8.** 28 800 soles

NIVEL II

Dos barcos salen del puerto del Callao al mismo tiempo y siguen el mismo rumbo. Si navegan a 20 km/h y 18 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de cinco días, a la misma hora de salida?

Nataly vende 50 docenas de platos y hace dos entregas. La primera de 170 y de 180 la segunda. ¿Cuántos platos le falta entregar?

Un albañil cobra S/. 8 por metro cuadrado de un determinado tipo de pared. Trabajando con sus ayudantes hacen 8 metros cuadrados diarios y terminan la pared en 10 días. ¿Cuánto recibe el albañil por este trabajo?

Cuatro amigos, aprovechando sus vacaciones hacen una excursión a Cajamarca donde permanecen 5 días. Si en éstos días gastan 30 soles diarios cada uno y los gastos de viaje ascienden a 220 soles por persona. ¿Cuánto costó la excursión de los cuatro?

Haciendo movilidad escolar la señora Sara gasta un promedio de 15 soles diarios en gasolina y 10 soles en arreglos de su carro. ¿Cuánto gasta semanalmente en su vehículo?

En una caja hay 80 paquetes de tuercas, cada paquete pesa 2 kg y la caja vacía, 10 kg, el transporte de Lima a Piura cuesta a razón de 3 soles el kg. ¿Cuánto cuesta transportar esta caja?

Cuatro amigos para iniciar un negocio reúnen S/. 5 000, el primero aporta S/. 700, el segundo el triple del primero menos S/. 300; el tercero el doble del primero más S/. 100 y el cuarto el resto. ¿Cuánto aportó cada uno?

Teniendo en cuenta el orden operativo escriba el resultado de:

a) $7 + 4 \times 5 - 8 + 3 \times 6 =$

b) $8 \times 9 - 3 + 7 \times 2 - 16 =$

c) $19 - 3 + 13 \times 2 - 7 \times 4 =$

d) $6 \times 8 - 9 \times 3 + 5 - 17 =$

e) $15 + (27 - 19)3 + (6 + 7)(13 - 8) =$

f) $34 \times 16 - 13(48 - 16) + 17 \times 12 =$

g) $12(2 + 7) - 8(11 - 8) + (5 - 1)(7 + 2) =$

h) $312 - 24 \times 11 + 19(22 - 6) - 13 \times 6 =$

i) $27 - 3 + (14 + 6 \times 7 - 30) + 9(7 - 4) =$

j) $4 \times 9 + (13 \times 4 - 7 \times 2 + 41) - 14 \times 6 =$

k) $36(15 - 12 + 4) - 18 \times 12 + 26 \times 5 =$

l) $(43 - 26)(18 - 3) + 3(4 + 7 \times 5) =$

m) $14 \times 6 + 4 \times 14 + 3(5 \times 6 - 6 \times 4) =$

n) $36 - 4 + (15 + 7 \times 8 - 50) - 3[4 + 3(5 - 2)]$

o) $15 \times 3 + 17 \times 15 - (12 + 1)(12 - 1) + 3[5 + 4(6 - 2)] =$

p) $525 + 25 \times 13 - 12 \times 25 - (10 + 3)(12 \times 3 - 6) =$

q) $(52 - 18)(15 - 4) + 11(12 + 8 \times 3) =$

r) $32 \times 11 - 4(5 + 3)(13 - 4) + 5(37 - 6 \times 4) + 16 \times 4 - 8 \times 6$

Clave de Respuestas

1. 240 Km | **2.** 250 platos
3. 640 soles | **4.** S/. 1 480
5. 175 soles | **6.** 510 soles
7. S/. 700 ; S/. 1 800; S/. 1 500 ; S/. 1 000
8.

a) 37	**b)** 67	**c)** 14
d) 9	**e)** 104	**f)** 332
g) 120	**h)** 274	**i)** 77
j) 31	**k)** 166	**l)** 372
m) 158	**n)** 14	**o)** 220
p) 160	**q)** 770	**r)** 145

2.6 POTENCIACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

2.6.1 POTENCIACIÓN DE UN NÚMERO

Se llama potenciación de un número natural al producto de dos o más factores iguales a dicho número.

Ejemplos:

a) $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$; **c)** $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

b) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$; **d)** $15^2 = 15 \times 15 = 225$

Base, Exponente y Potencia:

Sea:

$b^n = p$

Donde:
- **b:** **Es la Base** (Que se debe multiplicar entre si "n" veces)
- **n:** **Es el Exponente** (Indica la cantidad de veces que se multiplica b).
- **p:** **Es la Potencia** o resultado de dicha multiplicación de "n" veces b.

Es decir : $b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \ldots\ldots \times b}_{n\ factores}$

- Cuando el exponente "n" es igual a 2 se da el nombre especial de cuadrado así:

5^2 se lee: "cinco al cuadrado"
o "cinco elevado al cuadrado"
o "cinco elevado al exponente dos"

Significa que: $5^2 = 5 \times 5 = 25$

•• Cuando el exponente "n" es igual a 3 se da el nombre especial de cubo. Así:

4^3 se lee: "cuatro al cubo"
o "cuatro elevado al cubo"
o "cuatro elevado al exponente tres"

Significa que: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

Nota: Para cualquier otro exponente la denominación es la del mismo número del exponente. Así:

2^4 se lee: "dos elevado al exponente cuatro" *6^5 se lee: "seis elevado al exponente cinco"*

2.6.2 EXPONENTE 0 Y EXPONENTE 1

- Cualquier número natural, elevado al exponente cero, es igual a 1. ➠ Así: $b^0 = 1$; si: $b \neq 0$

Ejemplos: $5^0 = 1$; $13^0 = 1$; $126^0 = 1$

- Cualquier número natural, elevado al exponente 1, es igual al mismo número. ➠ Así: $b^1 = b$

Ejemplos: $3^1 = 3$; $18^1 = 18$; $123^1 = 123$

2.6.3 ORDEN OPERATIVO EN LAS OPERACIONES COMBINADAS EN IN

Cuando aparecen operaciones combinadas de Adición, Sustracción, Multiplicación y Potenciación, se sigue el siguiente orden:

1. Se obtienen primero las potencias directamente indicadas.
2. Luego se realizan las operaciones encerradas en paréntesis, si es que las hay.
3. Si aparecen nuevas potencias indicadas, se efectúan.
4. Las demás operaciones siguen el orden ya establecido.

Ejemplo 1 : Efectuar: $4 \times (7-2)^2 + 6 \times 3$

Resolución:

$$4 \times (7-2)^2 + 6 \times 3 = 4 \times (5)^2 + 6 \times 3 = 4 \times (25) + 6 \times 3$$

$$= 100 + 18 = \boxed{118}$$

Ejemplo 2 : Efectuar: $6^2 + (5+3)^2 - 7 \times 2^3$

Resolución:

$$6^2 + (5+3)^2 - 7 \times 2^3 = 6^2 + (8)^2 - 7 \times 2^3$$

$$= 36 + 64 - 7 \times 8$$

$$= 36 + 64 - 56 = \boxed{44}$$

Ejemplo 3 : Efectuar: $2(7^2 - 28) + 3^2(2^4 - 9)$

Resolución:

$$2(7^2 - 28) + 3^2(2^4 - 9) = 2(49 - 28) + 3^2(16 - 9)$$

$$= 2(21) + 3^2(7)$$

$$= 2(21) + 9(7) = 42 + 63 = \boxed{105}$$

2.6.4 CÁLCULO MENTAL Y CÁLCULO RÁPIDO APLICADOS A LA POTENCIACIÓN

1. **POTENCIACIÓN DE 10.** Las potencias de 10 son:

$10^1 = 10 \quad = 10$

$10^2 = 10 \times 10 \quad = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 \quad = 1\,000$

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \quad = 10\,000$

$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \quad = 100\,000$, etc.

REGLA: *Para obtener una Potencia de 10, se escribe la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.*

***Inversamente**:* Para representar abreviadamente la unidad seguida de muchos ceros, se escribe 10 con un exponente que corresponda al número total de ceros.

***Ejemplos**:* **a)** $1\,000\,000 = 10^6$; **b)** $100\,000\,000 = 10^8$

2. Cuadrados de Números muy Cercanos a Números Redondos:

***Ejemplos**:* 29^2 ; 36^2 ; 51^2 y 102^2

Unas veces será más oportuno utilizar el cuadrado de la Suma o de la Diferencia de otros dos. Así:

* $29^2 = (30 - 1)^2 = 30^2 + 1^2 - \underbrace{2 \times 30 \times 1}$ $= 900 + 1 - 60 = \boxed{841}$	* $36^2 = (40 - 4)^2 = 40^2 + 4^2 - \underbrace{2 \times 40 \times 4}$ $= 1\,600 + 16 - 320 = \boxed{1\,296}$
* $51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 1^2 + \underbrace{2 \times 50 \times 1}$ $= 2\,500 + 1 + 100 = \boxed{2\,601}$	* $102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2^2 + \underbrace{2 \times 100 \times 2}$ $= 10\,000 + 4 + 400 = \boxed{10\,404}$

3. Elevación al Cuadrado de Números Terminados en Ceros

***Ejemplos**:* 40^2 ; $1\,500^2$; $31\,000^2$; $6\,000^2$; 120^2

Se elevará al cuadrado en primer lugar,la parte compuesta de cifras significativas, y se agregará a la derecha una cantidad de Ceros **Dobles** de las que tenía el número base.

a) $40^2 = 4^2 \times 10^2 = 16 \times 100 = 1\,600$

b) $1\,500^2 = 15^2 \times 100^2 = 225 \times 10\,000 = 2\,250\,000$

c) $31\,000^2 = 31^2 \times 1\,000^2 = 961 \times 1\,000\,000 = 961\,000\,000$

d) $6\,000^2 = 6^2 \times 1\,000^2 = 36 \times 1\,000\,000 = 36\,000\,000$

e) $120^2 = 12^2 \times 10^2 = 144 \times 100 = 14\,400$

Ejercicio 1 : Halla las potencias siguientes:

a) $7^2 =$	**d)** $3^6 =$	**g)** $9^2 =$	**j)** $4^7 =$
b) $8^2 =$	**e)** $2^7 =$	**h)** $5^3 =$	**k)** $2^6 =$
c) $6^2 =$	**f)** $3^5 =$	**i)** $2^8 =$	**l)** $5^4 =$

Ejercicio 2 : Halla las potencias siguientes:

a) $2^3 \times 6 =$	**d)** $5^2 \times 2^5 =$	**g)** $3^2 \times 4^3 \times 16 =$
b) $12 \times 5^2 =$	**e)** $2^6 \times 3^4 =$	**h)** $6^2 \times 3^2 \times 14 \times 3^4 =$
c) $3^2 \times 4 =$	**f)** $4^3 \times 2^2 =$	**i)** $5^3 \times 2^3 \times 5^4 \times 6 =$

Rpta. **a)** 48 **b)** 300 **c)** 36 **d)** 800 **e)** 5 184 **f)** 256 **g)** 9 216 **h)** 367 416 **i)** 3 750 000

Ejercicio 3 : Compara los siguientes números y escribe en cada par de ellos uno de los símbolos: > , < , = , según corresponda.

a) 5^2 ☐ 2^5	**d)** 4^2 ☐ 2^4	**g)** 13^2 2^9
b) 6^3 ☐ 4^5	**e)** 3^6 ☐ 9^3	**h)** 10^3 ☐ 3^{10}
c) 7^4 ☐ 8^3	**f)** 8^4 ☐ 4^6	**i)** $3^2 \times 6^0$ ☐ $2^3 \times 7^0$

Ejercicio 4 : Completa el siguiente cuadro:

Número	Al cuadrado	Al cubo	Al exponente 4	Al exponente 5
0	0			
1				
2			16	
3	9			243
4				
5		125		
6				
7				

Ejercicio 5 : Efectuar las Operaciones Indicadas:

a) $3 \times 4^2 - (2+4)^2 + 5\,(7-4)^2 =$	**b)** $7^4 - 6^3 + 2 \times 4^2 - 8\,(9-5)^2 =$
c) $13\,(11-5)^3 - 7^2\,(9-2^3) =$	**d)** $4\,(9^2 - 72) + (5^4 - 128) \times 2^3 =$
e) $(12^2 - 3 \times 5^2) + 3\,(8+3^4) =$	**f)** $7 \times 4^2 - 3 \times 7^2 + 2^6(5^2 - 18) =$
g) $10^4 \times 14 \times 3 - 6^2 - 8 \times 2^3 + 13 \times 6^0 =$	**h)** $12 \times 10^3 - 23^2 - 128^0 \times 5^2 + 3 \times 10^2 =$

Rpta. **a)** 57 **b)** 2 089 **c)** 2 759 **d)** 4 012 **e)** 336 **f)** 413 **g)** 419 913 **h)** 11 746

Ejercicio 6 : Efectuar las Operaciones Indicadas:

a) $17^2 =$	**b)** $29^2 =$	**c)** $46^2 =$	**d)** $83^2 =$
e) $74^2 =$	**f)** $68^2 =$	**g)** $61^2 =$	**h)** $52^2 =$
i) $33^2 =$	**j)** $103^2 =$	**k)** $121^2 =$	**l)** $163^2 =$

2.7 DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Así como la **Sustracción** es una operación **inversa** de la **Adición** de igual manera la **División** es una operación **inversa** de la **Multiplicación**.

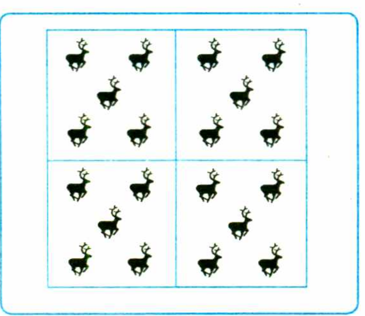
En efecto, si: 4 x 7 = 28 (**operación directa**)

Decimos entonces: 28 : 7 = 4 (**operación inversa**)

La expresión: 28 : 7 = 4 se lee: "Veintiocho Dividido por siete, es igual a 4"

Recuerda que: *Dividir es Repartir en partes iguales.*

Observa el siguiente ejemplo.

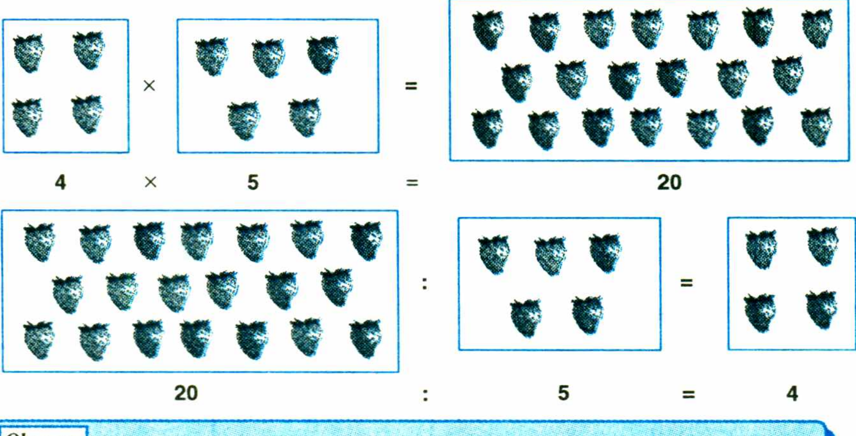


Sea un conjunto con 20 elementos. Dividir por 4 es hacer 4 subconjuntos en lo que entren 5 elementos.

Por ello decimos que dividir es repartir en partes iguales.

La División es una Operación inversa a la Multiplicación.

Fíjate en los siguientes ejemplos:



Observa:

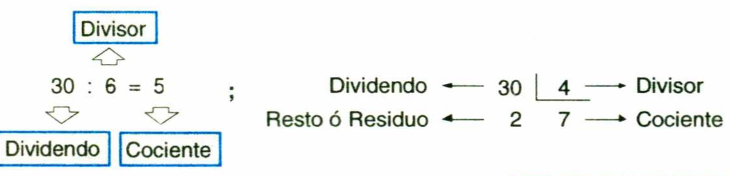
1° Hemos multiplicado los factores 4 x 5 y hemos obtenido el producto 20.

2° Del resultado producto 20, hemos separado los factores, 4 y 5, haciendo una División.

Por ello decimos que la División es una Operación inversa a la multiplicación.

2.7.1 DATOS DE LA DIVISIÓN: DIVISIÓN EXACTA E INEXACTA

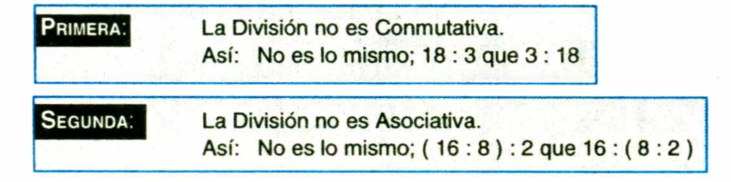
El signo de dividir consiste en dos puntos (:), o en un (└─), que se lee **dividido por**.



- Si al hacer una división no hay Resto, como 30 : 6 = 5, la división se llama **Exacta**.
- Si al hacer división, como 30 : 4 = 7 y sobran 2, la división se llama **Inexacta**.

¡ATENCIÓN!
La división no es conmutativa ni asociativa.

2.7.2 PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN EXACTA



PRIMERA: La División no es Conmutativa.
Así: No es lo mismo; 18 : 3 que 3 : 18

SEGUNDA: La División no es Asociativa.
Así: No es lo mismo; (16 : 8) : 2 que 16 : (8 : 2)

TERCERA: Todo número natural, distinto a cero, dividido entre si mismo es igual a 1.

Asi: 13 : 13 = 1 ; 126 : 126 = 1

CUARTA: Todo número natural dividido entre 1, es igual al mismo número.

12 : 1 = 12 ; 473 : 1 = 473

QUINTA: **Propiedad Distributiva** ,la división tiene la propiedad distributiva a la derecha con respecto a la adición y a la sustracción.

Así: **a)** (16 + 8 +12) : 2 = (16 : 2) + (8 : 2) + (12 : 2)

b) (85 -25 -15) : 5 = (85 : 5) - (25 : 5) - (15 : 5)

c) (24 + 15 -18) : 3 = (24 : 3) + (15 : 3) - (18 : 3)

SEXTA: Si el divisor se multiplica por un número sin que varíe el dividendo, el cociente queda dividido por ese mismo número.

Ejemplo:

- Haz la División: 240 | 6 ➡ 240 | 6 ; 0 40

  * multiplica por 2 al divisor.

- Haz ahora la División: 240 | 12 ; 0 20

El cociente queda dividido por 2

SÉTIMA: Si el divisor se divide por un número sin que varie el dividendo el cociente queda multiplicado por ese mismo número.

Ejemplo:

- Haz la división: 384 | 12 ➡ 384 | 12 ; 24 32 ; 0

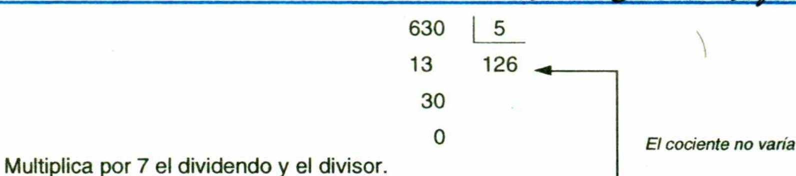
  * Divide por 3 el divisor.

- Haz ahora la división: 384 | 4 ; 24 96 ; 0

El cociente queda multiplicando por 3

OCTAVA: Si el dividendo y el divisor se multiplican o se dividen por un mismo número, el cociente no varía.

Ejemplo 1 : Haz la división:



* Multiplica por 7 el dividendo y el divisor.

- Haz la división:

```
4410 | 35
  91   126
  210
    0
```

El cociente no varía

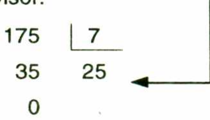
Ejemplo 2: Haz la división:

```
525 | 21
105   25
  0
```

El cociente no varía

* Divide por 3 el dividendo y el divisor:

- Haz la divisón:



2.7.3 DIVISIÓN INEXACTA O EUCLIDIANA

Se quiere repartir 26 caramelos entre 8 niños. Si damos 3 caramelos a cada niño, sobran 2 caramelos. Esta es lo que indica la división:

```
26 | 8
 2   3
```

Si damos 4 caramelos a cada niño, faltan 6 caramelos, esto es lo que indica la división:

```
26 | 8
 6   4
```

La primera división se llama **INEXACTA** por **DEFECTO**, y la segunda, **INEXACTA** por **EXCESO**.

```
26 | 8                          26 | 8
 2   3  → Cociente por exceso    6   4  → Cociente por exceso
 ↑                               ↑
 └ Resto por defecto             └ Resto por exceso
```

División Inexacta por defecto ***División Inexacta por exceso***

Observa estas divisiones:

```
23 | 4        23 | 4
 3   5         1   6
```

- ¿Cuál es el Cociente por Defecto? ¿Y el Resto por Defecto?
- ¿Cuál es el Cociente por Exceso? ¿Y el Resto por Exceso?

Sean de nuevo las divisiones enteras:

$$\begin{array}{r|l} 26 & 8 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 8 \\ \hline 6 & 4 \end{array}$$

Observa que:

- ***El Resto por Defecto + el Resto por Exceso = Divisor***
- *El cociente por exceso es una unidad mayor que el cociente por defecto.*
- *Resto por defecto es siempre menor que el divisor.*

Resuelve las siguientes divisiones por Defecto y Exceso. **a)** $43 \,\underline{|\;6\;}$; **b)** $34 \,\underline{|\;5\;}$

Comprueba que: Resto por defecto + resto por exceso = divisor

Resolución:

a) $\begin{array}{r|l} 43 & 6 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 43 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$ ➡ Residuo por Defecto + Residuo por Exceso = Divisor

1 + 5 = 6

b) $\begin{array}{r|l} 34 & 5 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 34 & 5 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$ ➡ Residuo por Defecto + Residuo por Exceso = Divisor

4 + 1 = 5

Llamaremos :

D = *Dividendo* ; ***r*** = *Resto por defecto* ; ***d*** = *Divisor*

C + 1 = *Cociente por exceso* ; ***C*** = *Cociente por defecto* ; ***r'*** = *Resto por exceso*

Sean las divisiones Inexactas :

Por defecto :

$$\begin{array}{r|l} 57 & 8 \\ \hline 1 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & C \end{array}$$

Por Exceso :

$$\begin{array}{r|l} 57 & 8 \\ \hline 7 & 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r' & C+1 \end{array}$$

Observa que : $57 = 8 \times 7 + 1$

$\therefore$ $\boxed{D = d \times C + r}$

Observa que: $57 = 8 \times 8 - 7$

$\therefore$ $\boxed{D = d \times (C + 1) - r'}$

De donde : $\boxed{r + r' = 1 + 7 = 8 = d}$

En toda división inexacta se verifica que :

Dividendo = *Divisor por cociente por defecto + Resto por defecto*

Dividendo = *Divisor por cociente por exceso - Resto por exceso*

Resto por defecto + Resto por exceso = ***Divisor***

El resto es siempre menor que el divisor

2.7.4 EL CERO EN LA DIVISIÓN :

Pensemos en la división 9 : 0 = n, puesto que la multiplicación y la división son operaciones inversas, la división 9 : 0 = n, se puede indicar como : n × 0 = 9, pero sabemos que cuando uno de los factores es **Cero**, el producto es cero por tanto no existe un número **"n"** tal que: n × 0 = 9, es decir: 9:0 no tiene respuesta.

En General cualquier número natural que es dividido por **Cero** no tiene respuesta, por eso se dice que en matemática **No Hay o no Existe la División por Cero**.

¡IMPORTANTE!

- La división es una operación parcialmente definida en IN.
- La división no es una operación interna en IN, porque de dos números cualesquiera no siempre su cociente es un número natural.

• $\frac{13}{0}$ *no definido* • $\frac{0}{0}$ *indeterminado*

2.7.5 TÉCNICAS OPERATIVAS DE LA DIVISIÓN:

I. División por Restas Sucesivas.

Ejemplo 1: Dividir: 58 : 13

(58 : 13) es lo mismo que pensemos en. ¿Cuántas veces 13 esta contenido en 58?

Asi:

```
          58
        - 13   ⇐ 1 vez
          45
        - 13   ⇐ 1 vez más
          32
        - 13   ⇐ 1 vez más
          19
        - 13   ⇐ 1 vez más
Sobrando ⇒ 6
```

= 4 veces 13 ; sobrando 6

Es decir:

58 = 4 veces 13, sobrando 6

58 = 4 x 13 + 6

Que es lo mismo que:

Dividendo = (Divisor × Cociente) + Residuo

Luego: **El cociente es 4**

- Como puedes comprender dividir así sería muy largo o laborioso; sobre todo cuando el dividendo es un número muy grande y el divisor un número pequeño, pues las **"Restas Sucesivas"** serían muchas. Para ello, se abrevia la operación tomando en cada **"Resta"** un mayor "Número de veces" el divisor, (En especial 10 ; 100 ; 1 000 ; etc. veces), según sea posible.

Ejemplo: dividir ; 346 : 15

```
          346
        - 150  ⇐ 10 veces 15
          196
        - 150  ⇐ 10 veces 15
           46
        -  15  ⇐ 1 vez 15
           31
        -  15  ⇐ 1 vez 15
           16
        -  15  ⇐ 1 vez 15
Sobrando ⇒  1
```

= 23 veces 15 ; sobrando 1

23 ↓ Cociente; 1 ↓ Residuo

Luego: 346 = 23 veces 15, sobrando 1

346 = 23 x 15 + 1

∴ **El cociente es 23**

¿Se podrá abreviar aún más? si es posible; sí en lugar de tomar 1 vez en cada paso, lo hacemos 2, 3, 4,.....veces el divisor.

Así por Ejemplo con la división anterior: 346 : 15 sería:

```
 346
-150   ➡  10 veces 15
 196
-150   ➡  10 veces 15      = 23 veces 15 ; sobrando 1
  46                            ↓               ↓
 -45   ➡  3 veces 15         Cociente        Residuo
Sobrando ➡ 1
```

II) División de un número natural entre 10, 100, 1 000, ... etc.

Para dividir un número natural entre la unidad seguida de ceros se separan tantas cifras decimales como ceros tiene el divisor:

Ejemplos : **a)** 3 472 : 100 = 34,72 **c)** 476 : 10 000 = 0,0476

b) 63 471 : 1 000 = 63,471 **d)** 23 : 10 000 = 0,0023

III) División de un número natural entre 5

Para dividir un número natural entre 5, se le multiplica por 2 y el producto se divide entre 10

Ejemplos : **a)** $75 : 5 = \frac{75 \times 2}{10} = \frac{150}{10} = 15$ **b)** $325 : 5 = \frac{325 \times 2}{10} = \frac{650}{10} = 65$

IV) División de un número natural entre 25

Para dividir un número natural entre 25, se le multiplica por 4 y el producto se divide entre 100

Ejemplos : **a)** $575 : 25 = \frac{575 \times 4}{100} = \frac{2300}{100} = 23$ **b)** $1050 : 25 = \frac{1050 \times 4}{100} = \frac{4200}{100} = 42$

2.7.6 OPERACIONES COMBINADAS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Cuando una expresión tiene combinaciones de multiplicación y división, sin que haya paréntesis las operaciones se realizan en el orden en que aparecen o sea de izquierda a derecha.

Ejemplos :

a) $8 \times 6 : 6 \times 2 = (8 \times 6) : 6 \times 2 = (48 : 6) \times 2 = 8 \times 2 = \boxed{16}$

b) $24 : 6 \times 5 : 4 = (24 : 6) \times 5 : 4 = 4 \times 5 : 4 = 20 : 4 = \boxed{5}$

c) $6 \times 3 \times 4 : 12 = (6 \times 3) \times 4 : 12 = (18 \times 4) : 12 = 72 : 12 = \boxed{6}$

d) $18 : 3 : 2 \times 7 = (18 : 3) : 2 \times 7 = (6 : 2) \times 7 = 3 \times 7 = \boxed{21}$

2.7.7 EXPRESIONES CON VARIAS DIVISIONES

Cuando hay varias divisiones sucesivas, y no existen paréntesis las divisiones se deben efectuar en el orden en que aparecen, osea de izquierda a derecha.

Ejemplo:

a) $60 : 4 : 5 = (60 : 4) : 5 = 15 : 5 = \boxed{3}$ **b)** $144 : 12 : 6 = (144 : 12) : 6 = 12 : 6 = \boxed{2}$

2.7.8 PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES COMBINADAS

Cuando en una expresión aparecen las operaciones de Adición, Sustracción, Multiplicación, Potenciación y División, hay **Prioridades** establecidas por acuerdos matemáticos y que son los siguientes:

1. Las operaciones dentro de los signos colectores paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { }, son las que se efectúan primero.
2. Si hay signos colectores unos dentro de otros se comienzan por aquellos que están más al interior.
3. El orden de las operaciones en forma general, es el siguiente: primero las potencias, segundo las divisiones, tercero las multiplicaciones, cuarto las adiciones o sustracciones.

Ejemplo 1: Simplificar: $4 \times (3^3 - 2^4) : (3^2 + 2)$

Resolución: $4 \times (3^3 - 2^4) : (3^2 + 2)$

$4 \times (27 - 16) : (9 + 2) = 4 (11) : (11) = 44 : 11 = \boxed{4}$

Ejemplo 2: Simplificar: $[(6^2 - 1) : 7] + (3^4 - 4^3)$

Resolución: $[(6^2 - 1) : 7] + (3^4 - 4^3)$

$[(36 - 1) : 7] + (81 - 64) = 35 : 7 + (17) = 5 + 17 = \boxed{22}$

Ejemplo 3: Simplificar: $(3^5 + 4^2) - [(6^3 - 1) : 5]$

Resolución: $(3^5 + 4^2) - [(6^3 - 1) : 5]$

$(243 + 16) - [(216 - 1) : 5] = (259) - [215 : 5] = 259 - 43 = \boxed{216}$

Ejemplo 4: Efectuar: $4^2 \times 5 - 2(5^2 - 18)^3 + 2^3(6^2 - 2^4)^2$

Resolución: $4^2 \times 5 - 2(5^2 - 18)^3 + 2^3(6^2 - 2^4)^2$

$16 \times 5 - 2(25 - 18)^3 + 8(36 - 16)^2 = 16 \times 5 - 2(7)^3 + 8(20)^2$

$= 16 \times 5 - 2(343) + 8(400)$

$= 80 - 686 + 3\,200 = \boxed{2\,594}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 20

Ejercicio 1 : Efectuar en forma abreviada las siguientes divisiones:

a) 525 : 5 =………	**d)** 623 : 100 =………	**g)** 48 : 100 000 =………
b) 1 235 : 5 =………	**e)** 2 304 : 100 =………	**h)** 3 000 : 25 =………
c) 8 325 : 5 =………	**f)** 387 : 10 000 = ……	**i)** 1 575 : 25 =………

Ejercicio 2 : Calcule el resultado de:

a) 236 + 124 : 4 = …………	**f)** 684 : 4 : 3 : 19 = …………
b) 67 - 132 : 12 = …………	**g)** $(6^2+8^2):100+(3^2+4^2):5^2=$ …………
c) 597 - 125 : 5 = …………	**h)** $5^4:5^2+4^3:4^2-3^5:3^2=$ …………
d) 130 : 5 : 2 + 38 = …………	**i)** $(10^2-5^2)^2:(3^2-2^2)^2+6\times5^0=$ …………
e) 132 : 6 : 11 = …………	**j)** $(2^3+2)^2:(2^2\times5+3^3+3)=$ …………

Rpta. **a)** 267 **b)** 56 **c)** 572 **d)** 51 **e)** 2 **f)** 3 **g)** 2 **h)** 2 **i)** 231 **j)** 2

Ejercicio 3 : Efectuar y simplificar el resultado:

a) 15 + 20 : 4 - 4 + 7 = …………	**e)** $25-(7\times3)+63:7+3^2\times16^0=$ …………
b) 8 × 3 : (4 + 2) - 3 = …………	**f)** (26 : 2) - 9 × (24 : 4) + 6 × 8 = …………
c) 54 : 3 + 7 × (9 - 3) = …………	**g)** 6 : 3 - 3 × (27 : 9) + 5 × (6 + 2) = …………
d) 5 + 7 × (30 : 6 - 3) - 12 =………	**h)** 17 - (9 × 3 - 13) + 6 × (7 - 36 : 9) = ………

Rpta. **a)** 23 **b)** 1 **c)** 60 **d)** 7 **e)** 22 **f)** 7 **g)** 33 **h)** 21

Ejercicio 4 : Efectuar y simplificar el resultado:

a) 8 × 6 × 4 : 12 = …………	**e)** 64 : 2 × 3 × 4 = …………	**i)** $4^3\times6^2:3^2=$ …………
b) 50 : 5 × 3 : 6 = …………	**f)** 32 × 6 : 3 : 8 = …………	**j)** $7^2\times3^3:21^2=$ …………
c) 84 : 2 : 3 : 7 = …………	**g)** 7 × 8 : 2 × 4 = …………	**k)** $6^4\times7^4:21^2=$ …………
d) 60 : 3 : 5 : 2 = …………	**h)** 56 : 7 × 3 : 4 = …………	**l)** $8^5:4^6+4^4:8^2=$………

Rpta. **a)** 16 **b)** 5 **c)** 2 **d)** 2 **e)** 384 **f)** 8 **g)** 112 **h)** 6 **i)** 256 **j)** 3 **k)** 7 056 **l)** 12

Ejercicio 5 : Calcule el resultado de:

a) $6^3 : 3^2 + 15^3 : 5^3 =$ ....
b) $5 \times (3^3 - 2^4) : (3^2 + 2) - 3 \times 7^0 =$ ....
c) $(8^2 + 6^2)^2 : 10^2 : 2^2 =$ ....
d) $(2^3 \times 4^2 \times 3^2)^2 : 24^3 + 5^2 \times 13^0 =$ ....
e) $2 \times 7^2 - 6 (5^3 - 3^4) + 16^2 \times 12 - 6^3 - 3^4 =$ ....
f) $\{ [150 : (4^3 - 14)] : 3 \} + (3^2 - 2^3) \times 7 =$ ....
g) $\{ [(7^3 - 6^3) + 2^4 : 8 \times 3^2] - 9^3 \} + 10^3 =$ ....
h) $12^3 - \{ [(2^3 - 5)^4 - (5^3 - 6^2)^2 + 15] - (8^3 : 2^4 \times 7) \} =$ ....
i) $5 \times 9^2 - 6(4^3 - 5^2) + 17^2 \times 13 - 7^3 - 4^4 =$ ....
j) $10^3 - \{ [(2^5 : 8) \times 3^4 : 18] + (3^5 - 5^3) \} =$ ....

Rpta. **a)** 51 **b)** 2 **c)** 400 **d)** 121 **e)** 2 609 **f)** 8 **g)** 416 **h)** 9 777 **i)** 3 329 **j)** 864

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICANDO LAS TÉCNICAS OPERATIVAS Y LAS PROPIEDADES DE LA ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES

Problema 1 : ¿Por qué número debe multiplicarse 385 para obtener 479 325?

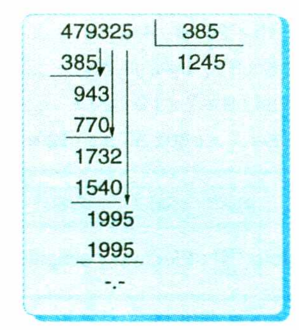
Resolución:

Sea "n" el número por el que debe multiplicarse 385 para obtener 479 325.

De donde: $385 \cdot n = 479\,325$

$$n = \frac{479\,325}{385}$$

$\therefore$ $\boxed{n = 1\,245}$



Rpta: El número pedido es 1 245

Problema 2 : ¿Entre qué número hay que dividir 164 636 para obtener 316 de cociente?

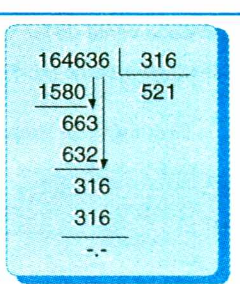
Resolución:

Sea "N" el número por el que debe dividirse 164 636 para obtener 316 de cociente:

$$\frac{164\ 636}{N} = 316$$

De donde: $$\frac{164\ 636}{316} = N$$

$\therefore$ $\boxed{521 = N}$



Rpta: El número pedido es 521

Problema 3: Un tren ha recorrido 720 Km. en 9 horas, ¿Cuál fue su velocidad promedio?

Resolución:

Sabemos que: Espacio = 720 km ; Tiempo = 9 horas

De donde: $\text{Velocidad} = \dfrac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}}$ ➡ $\text{Velocidad} = \dfrac{720\text{ km}}{9\text{h}} = \boxed{80\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}}$

Rpta: La velocidad promedio del tren es 80 km/h.

Problema 4 : La familia "Coveñas" gasta 280 soles semanales. ¿Cuál es su gasto promedio diario?

Resolución:

El gasto semanal es de 280 soles o mejor dicho en 7 días gasta 280 soles.

$$\text{En 1 día gastará} = \frac{280\text{ soles}}{7} = \boxed{40\text{ soles}}$$

Rpta: Su gasto promedio diario es 40 soles

Problema 5: ¿Cuántas docenas hay en 3 096 lapiceros?

Resolución:

Sabemos que: 1 docena = 12 unidades

Luego: El número de docenas que hay en 3 096 lapiceros son:

```
3096 | 12
24     258 docenas
 69
 60
  96
  96
  -.-
```

Rpta: En 3 096 lapiceros hay 258 docenas

Problema 6: Un comerciante ha comprado cierto número de vacas por 43 200 soles y los vende por 52 800 soles, ganando 400 soles en cada uno. ¿Cuántas vacas compró?

Resolución:

Lo que se pagó en la compra de las vacas: 43 200 soles

Lo que se obtuvo de la venta de las vacas: 52 800 soles

Ganancia que se obtiene como producto de la venta = 52 800 - 43 200 = 9 600 soles

Luego: El número de vacas compradas $= \frac{9\,600}{400} = \boxed{24}$

Rpta: El comerciante compró 24 vacas

Problema 7: Al dividir un número A entre un número B el cociente exacto es 8 ¿Cuánto vale A y B si A es el triple del cociente exacto?

Resolución:

Del enunciado, tenemos que: $\frac{A}{B} = 8$ .....(I)

(8: Cociente exacto)

Además: A = triple de 8 ➨ $A = 3 \times 8 = 24$ ➨ $\boxed{A = 24}$

Luego, reemplazamos el valor de A en (I) $\frac{24}{B} = 8$ ➨ $\frac{24}{8} = B$ ➨ ∴ $\boxed{3 = B}$

Rpta: Los valores de A y B son 24 y 3 respectivamente

Problema 8: Un comerciante, tiene 30 metros de tela que desea vender por 1 192 soles. Si ha vendido 14 metros a 44 soles el metro. ¿A cómo debe vender el metro del resto?

Resolución:

Por la venta de 14 m de tela recibe: 14×44 soles = 616 soles; para obtener 1 192 soles falta: 1 192 - 616 = 576 soles.

Como ya vendió 14 metros, faltan por vender: 30 m - 14 m = 16 m

Luego: El metro del resto de tela lo debe vender en: $\frac{576 \text{ soles}}{16} = \boxed{36 \text{ soles}}$

Rpta: El metro del resto de la tela lo debe vender a 36 soles

Problema 9: En una división el divisor es 25 y el resto 15. ¿Qué número hay que añadir al dividendo para que la división sea exacta?

Resolución:

División Inicial: $\begin{array}{l|l} D & 25 \\ \hline 15 & C \end{array}$ ➨ $\boxed{D = 25\,C + 15}$ ...(1)

Ahora al añadir un número "X" al dividendo para que la división sea exacta, el cociente "C" debe aumentar en 1, donde la nueva división sería: $\begin{array}{l|l} D + X & 25 \\ \hline 0 & C + 1 \end{array}$ ➨ $\boxed{D + X = 25\,(C + 1)}$ ...(2)

Reemplazamos la ecuación (1) en (2), obteniendo:

$$D + X = 25(C + 1)$$

$$(25C + 15) + X = 25C + 25 \Rightarrow \cancel{25C} + 15 + X = \cancel{25C} + 25$$

De donde: $X = 25 - 15 = 10 \Rightarrow \quad \therefore \boxed{X = 10}$

Rpta: El número que hay que añadir al dividendo para que la división sea exacta es 10

Problema 10 : Por un artefacto cuyo costo es de 960 dólares se da 204 dólares de inicial y por el saldo se firman 9 letras ¿Qué valor en dólares tiene cada letra?

Resolución:

- Costo del artefacto = 960 dólares
- Lo que da de inicial = 204 dólares
- Quedando de saldo = (960 - 204) dólares = 756 dólares; este saldo tiene que pagarse en 9 letras, siendo el valor de cada letra :

$$\frac{756}{9} = \boxed{84 \text{ dólares}}$$

Rpta. El valor en dólares que tiene cada letra es 84

Problema 11 : ¿Porqué número hay que dividir 208 479 para hallar 367 de cociente y 23 de residuo?

Resolución:

Sabemos que en toda división **INEXACTA**, se cumple que

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Residuo}$$

De donde: $\text{Dividendo} - \text{Residuo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente}$

$$208\,479 - 23 = \text{Divisor} \times 367$$

$$208\,456 = 367 \times \text{Divisor} \Rightarrow \frac{208\,456}{367} = \text{Divisor} \Rightarrow \quad \therefore \boxed{568 = \text{divisor}}$$

Rpta: El número que buscamos es 568

Problema 12 : Para pagar una deuda de 1 090 dólares, Arturo da 7 billetes de 50 dólares y 12 billetes de 10 dólares. ¿Cuántos billetes de 5 dólares debe dar para cancelar esta deuda?

Resolución:

En billetes de 50 dólares da: 7 × 50 dólares = 350 dólares

En billetes de 10 dólares da: 12 × 10 dólares = 120 dólares

En billetes de 50 y 10 dólares da: 350 + 120 = 470 dólares

Como la deuda es de 1 090 dólares, falta por pagar: 1 090 - 470 = 620 dólares

* Estos 620 dólares se deben pagar con billetes de 5 dólares, siendo estos: ➠ Número de billetes de 5 dólares = $\frac{620}{5}$ = **124 dólares**

Rpta: Arturo cancela su deuda con 124 billetes de 5 dólares

Problema 13 : Para rifar un auto se hicieron 500 números y se pensó ganar 1 200 soles; pero solamente se vendieron 340 números, lo que originó una pérdida de 240 soles. ¿Cuánto costó cada número y cuánto costo el auto?

Resolución:

♦ Números de rifas que no se vendieron: 500 - 340 = 160; estos 160 boletos no vendidos representan a los que se pensó ganar más lo que se perdió. El valor de los 160 números no vendidos es de: (1 200 + 240) soles = 1 440 soles

♦ El valor de un número (boleto) = $\frac{1\,440 \text{ soles}}{160}$ = **9 soles**

♦ Valor de los 500 números (boletos) = 500 × 9 soles = 4 500 soles

Luego: Costo del auto = Venta de los 500 números - Ganancia pensada

Costo del auto = 4 500 soles - 1 200 soles = **3 300 soles**

Rpta: Cada número (boleto) costó 9 soles y el auto costó 3 300 soles

Problema 14 : Dos automóviles parten a las 8 a.m. de una ciudad a otra que se encuentra a 1 800 kilómetros de distancia. Si el primero recorre a 90 kilómetros por hora y el segundo a 75 kilómetros por hora. ¿A qué hora llegarán a la otra ciudad?

Resolución:

a) El primero recorre en 1 hora 90 kilómetros, para recorrer 1 800 kilómetros, emplearía: ➠ $\frac{1\,800}{90}$ = 20 horas

Como salió a las 8 am y emplea 20 horas en recorrer 1 800 kilómetros.

Luego: 8 am + 20 horas = 8 am + (4h + 12h + 4h) = **4 a.m.**

(8 am + 4h → 12 m; 12 m + 12h → Cero horas; 4h → 4 a.m.)

b) El segundo recorre en 1 hora 75 kilómetros, para recorrer 1 800 kilómetros, emplearía: ➠ $\frac{1\,800}{75}$ = 24 horas

Como también salió a las 8 a.m. este llegaría al día siguiente ya que:

8 a.m. + 24 horas = 8 a.m. + 1 día = 8 a.m. del otro día

Rpta: El primero llegará a las 4 a.m. y el segundo a las 8 a.m.

Problema 15 : Cuando han transcurrido 1 245 minutos de un día. ¿Qué hora es?

Resolución:

Si: 60 minutos = 1 hora, en 1 245 minutos, el número de horas sería:

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 1245 & 60 \\ \underline{120} & 20 \\ 45 & \end{array} \Rightarrow 20\,\frac{45}{60}\text{ h} \Rightarrow 20\,\frac{3}{4}\text{ horas}$$

Luego: El tiempo transcurrido con respecto al día es:

$$20\text{h} + \frac{3}{4}\text{h} \Rightarrow 8\text{ p.m.} + 45\text{ minutos}$$

Rpta: La hora pedida es: 8 y 45 p.m.

Problema 16 : Una persona reparte a cada uno de sus hijos S/. 170 000, pero como fallece uno de ellos se reparte entre los que quedan recibiendo entonces cada uno S/. 212 500. ¿Cuál fue la suma repartida y cuál el número de hijos que quedan?

Resolución:

A cada hijo vivo le toca demás: 212 500 - 170 000 = 42 500 soles. Si la parte que le correspondía al hijo fallecido 170 000 soles, se divide entre el número de hijos vivos, el cociente es naturalmente 42 500 soles.

Recíprocamente: si 170 000 se divide entre 42 500 el cociente es el número de hijos vivos.

Luego: $\frac{170\,000}{42\,500} = 4$ (hijos vivos)

Rpta: El número de hijos es: 4 + 1 = 5, osea 4 vivos más el fallecido.
Y la herencia es de: $5 \times$ S/. 170 000 = S/. 850 000

Problema 17 : La división de un número natural entre otro da 25 por cociente y 13 de residuo. Calcular ambos números, sabiendo que la suma de ellos es 1 261.

Resolución:

Sean los dos números pedidos: A y B

Del enunciado, tenemos que: A + B = 1 261 ...(1) Además: $\begin{array}{r|l} A & B \\ 13 & 25 \end{array} \Rightarrow$ A = 25 B + 13 ...(2)

Reemplazando la expresión (2) en (1):

$$A + B = 1\,261$$

$$(25B + 13) + B = 1\,261 \Rightarrow 26B = 1\,261 - 13 \Rightarrow 26B = 1\,248 \Rightarrow B = \frac{1\,248}{26} = 48 \Rightarrow B = 48$$

Luego reemplazamos el valor de "B" en (2): A = 25 (48) + 13 = 1 200 + 13 = 1 213 ∴ A = 1 213

Rpta. Los números naturales pedidos son: 1 213 y 48

TALLER DE PROBLEMAS Nº 21

Problema 1 : Comprobar en varios ejemplos que; si una división tiene resto, el mayor número que se puede aumentar al dividendo sin que varíe el cociente, es igual a la diferencia entre el divisor y el resto aumentado en una unidad.

Resolución:

Problema 2 : Comprobar que si dos números se dividen por la diferencia entre los mismos se obtienen restos iguales.

Resolución:

Problema 3 : Si al dividendo de una división se le suma el divisor. ¿Cómo varían el cociente y el resto?

Resolución:

Problema 4 : El resto de una división es 4; el divisor 9 y el cociente 10. ¿Cuál es el dividendo?

Resolución:

Rpta. 94

Problema 5 : Un comerciante paga S/. 308 por 7 piezas de cinta. ¿Cuánto le cuesta cada pieza? Sabiendo que el metro vale S/. 2. ¿Cuántos metros tiene cada pieza?

Resolución:

Rpta. S/. 44 y 22m

Problema 6 : Al dividir un número A entre un número B el cociente exacto es 12. ¿Cuánto vale A y B, si "B" es la cuarta parte del cociente exacto?

Resolución:

Rpta. 36 y 3

Problema 7 : Tres obreros que ganan igual jornal han trabajado, respectivamente 8 ; 10 y 16 días. Sabiendo que el segundo cobró 360 soles. ¿Cuánto han cobrado entre los tres?

Resolución:

Rpta. S/. 1 224

Problema 8 : Se dan para multiplicar los números 123 y 37; si en el multiplicando se intercambian las cifras de las decenas y de las unidades, y se duplica el multiplicador. ¿En cuántas decenas aumenta el resultado?

Resolución:

Rpta. En 521

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN, MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES

NIVEL I

1. En la división: 72 : 4 ¿Qué sucede con el cociente si el dividendo se multiplica por 5?

2. En la división: 56 : 7 ¿Qué sucede con el cociente si el dividendo se divide por 2?

3. En la división: 63 : 9 ¿Qué sucede con el cociente si el divisor se multiplica por 6?

4. En la división: 48 : 6 ¿Qué sucede con el cociente si el dividendo se multiplica por 3?

5. En la división: 64 : 16 ¿Qué sucede con el cociente si el dividendo y el divisor se multiplican por 4? ¿Si el divisor se duplica?

6. En la división: 78 : 6 ¿Qué sucede con el cociente si el dividendo y el divisor se dividen entre 5? ¿Si el dividendo se triplica?

7. Un tren lleva 14 vagones iguales cargados con ovejas. El tren transporta 644 ovejas. ¿Cuántas ovejas lleva en cada vagón?

8. Fíjate en estas divisiones:

45	7	;	19	6
12	5		7	2

Están equivocadas. Explica brevemente porqué.

9. Efectúa bien las divisiones anteriores.

10. Halla el cociente y el resto por defecto de estas divisiones:

a) 14 : 3 **c)** 25 : 8 **e)** 49 : 6 **g)** 128 : 7
b) 15 : 4 **d)** 62 : 6 **f)** 65 : 4 **h)** 324 : 9

11. En las mismas divisiones (divisiones del ejercicio 10). Calcula el cociente y el resto por exceso.

12. Un número debía dividirse por $4 \times 5 \times 7 \times 6$. ¿Qué alteración sufrió el cociente al omitir el 7?

13. Obtener el cociente y el resto por exceso de las divisiones siguientes:

a) 23 : 8 **c)** 49 : 9 **e)** 72 : 5 **g)** 273 : 12
b) 19 : 5 **d)** 84 : 11 **f)** 96 : 7 **h)** 1 346 : 23

14. Manuel tiene que hacer la división de 430 entre 80. Decide quitar un cero del dividendo y otro del divisor; al dar los valores del cociente y del resto, dice que el cociente es 5 y el resto 3. ¿Te parece correcta la respuesta? Escribe la división de MANUEL y dí qué es lo que no ha tenido en cuenta.

15. ¿Qué división INEXACTA te sugiere esta figura?

16. Tengo que dividir un número por 3, luego por 5 y finalmente por 9. ¿Cómo podré ejecutar la operación con una sola división?

17. Con 20 galones de gasolina un coche ha recorrido 500 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 1 galón de gasolina, y cuántos galones consume cada 100 kilómetros?

18. Un frutero ha comprado 200 cajas de naranjas; dispone de un camión en el que sólo puede transportar 36 cajas. ¿Cuántos viajes ha de hacer? ¿Cuántas cajas lleva en el último viaje?

19. En una división el divisor es 31 y el resto 24. ¿Qué número hay que añadir al dividendo para que la división sea exacta?

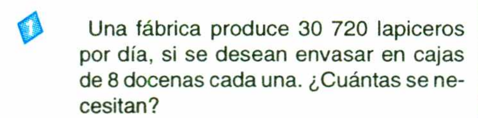
20. Ahorrando mensualmente la misma suma de dinero; Nataly ha logrado reunir en 11 meses 1 353 soles. ¿Cuál ha sido su ahorro mensual?

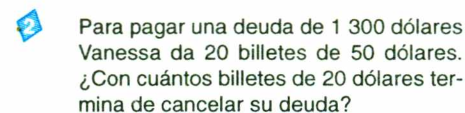
Clave de Respuestas

1. El cociente queda multiplicado por 5.
2. El cociente queda dividido por 2
3. El cociente queda dividido por 6
4. El cociente queda multiplicado por 3
5. El cociente no varía; el cociente queda dividido por 2
6. El cociente no se altera, el cociente se triplica.
7. 46 ovejas

17. 25 Km; 4 galones	**18.** 6 viajes; 20 cajas
19. 7	**20.** 123 soles

NIVEL I


1. Una fábrica produce 30 720 lapiceros por día, si se desean envasar en cajas de 8 docenas cada una. ¿Cuántas se necesitan?


2. Para pagar una deuda de 1 300 dólares Vanessa da 20 billetes de 50 dólares. ¿Con cuántos billetes de 20 dólares termina de cancelar su deuda?

3. Un auto corre a 60 km por hora; si inicia su carrera a las 10 a.m. ¿A qué distancia del punto de partida estará a las 5 p.m?

4. ¿Entre qué número debe dividirse 8 626 para hallar 319 de cociente y 13 de residuo?

5. Se tienen 325 libros ¿A qué precio deben venderse cada uno para obtener 8 125 soles?.

6. El residuo de una división es 7. El dividendo 384 y el cociente 29. ¿Cuál es el divisor?

7. Don Vicente ha vendido 10 pollos y 5 pavos en 270 soles. Si por cada pollo cobró 12 soles. ¿Cuánto cobró por cada pavo?

8. Un comerciante compra 30 docenas de camisas en S/.5 400. Vende 80 a S/.20 cada una. ¿A cómo debe vender cada una de las que quedan para obtener una ganancia de S/.2 360?.

9. Catorce obreros juntos han recibido la semana pasada S/.1 120. Si 6 de ellos reciben S/.72 cada uno y los demás deben distribuirse el resto en partes iguales. ¿Cuánto recibe cada uno de estos últimos?.

10. Un comerciante compra cierto número de lámparas por S/. 900 y los vende por S/. 1 500 ganando S/. 12 en cada una. ¿Cuántas lámparas fueron negociadas?

11. Si después de repartir 423 cuadernos entre cierto número de alumnos a cada uno le corresponde 7 cuadernos y todavía le sobran 3. ¿Cuál es el número de alumnos?

12. ¿Entre qué número hay que dividir 2 100 para que el cociente sea 36 y su residuo 12?

13. El residuo de una división es 8, el dividendo 1 616 y su cociente 24. ¿Cuál es el divisor?

La diferencia de dos números es 347, su cociente 17 y su residuo 11. ¿Cuáles son esos números?

Una persona deja a cada uno de sus hijos S/. 2 360, pero como falleciera uno de ellos se reparten la herencia entre los que quedan recibiendo entonces cada uno S/.2 950.¿Cuál fue la herencia dejada y cuál el número de hijos?

Cuando han transcurrido 123 horas de una semana. ¿Qué día y hora es?

El chofer de un comité que hace servicio entre Lima y Huacho realiza dos viajes diarios transportando 6 pasajeros tanto en la ida como en el regreso, si después de 6 días de trabajo tiene un efectivo S/. 1 200; habiendo gastado combustible y mantenimiento S/. 240. ¿Cuánto paga cada pasajero?

Un recipiente de 8 000 litros es llenado completamente por un caño en 2 horas 40 minutos. ¿Cuántos litros por minuto vierte el caño?

César ha comprado cierto número de pantalones por 405 soles y los vende en 527,40 soles, ganando 13,60 soles en cada uno. ¿Cuántos pantalones fueron negociados?

En un garaje hay igual número de autos que de bicicletas. ¿Cuántos vehículos hay de cada clase, si en total son 354 llantas?

Clave de Respuestas

1. 320 cajas	**2.** 15 billetes de 20 dólares
3. a 420 km	**4.** 27
5. 25 soles	**6.** 13
7. 30 soles	**8.** 22 soles
9. 86 soles	**10.** 50 lámpares
11. 60 alumnos	**12.** 58
13. 67	**14.** 368 y 21
15. 5 hijos ; herencia = S/. 11 800 soles	
16. Viernes a las 3 a.m.	
17. 10 soles	**18.** 50 litros
19. 9 pantalones	**20.** 59 de cada clase

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Problema 1 : Hallar en cuánto supera el menor número de cinco cifras al mayor número de tres cifras.

A) 1 111 **B)** 9 001 **C)** 1 001 **D)** 199 **E)** 1 999

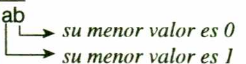
Resolución:

- El menor número de cinco cifras es: 10 000
- El mayor número de tres cifras es: 999

Recuerda que:

- *Representación de un número de 2 cifras:* $\overline{ab}$

$\overline{ab}$: a → *su máximo valor es 9*; b → *su máximo valor es 9*


$\overline{ab}$: b → *su menor valor es 0*; a → *su menor valor es 1*

Luego para saber en cuánto supera el menor número de cinco cifras (10 000), al mayor número de tres cifras (999), se restan dichos números; osea:

$$10\,000 - 999 = 9\,001$$ ***Rpta. B***

Problema 2: La suma de dos números es 44 344. Dividiendo los dos números por 4. En cuánto disminuye la suma.

A) 10 189 **B)** 22 358 **C)** 11 890 **D)** 11 086 **E)** 33 258

Resolución:

Sean los dos números "a" y "b"

- Del enunciado:

•) $a+b = \boxed{44\ 344}$; si dividimos los números "a" y "b" por 4, también 44 344, se tiene que dividir por 4, veamos:

••) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4} = \frac{44\ 344}{4} \Rightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{4} = \boxed{11\ 086}$

Luego, la suma disminuye en: $44\,344 - 11\,086 = \boxed{33\,258}$ ***Rpta. E***

Problema 3: En una suma de muchos sumandos en vez de escribir los sumandos 9 860 y 7 045 se ha escrito, respectivamente 9 806 y 7 405. Para corregir la suma; sin hacer todo de nuevo debe:

A) Aumentarse 125 **B)** Disminuirse 69 **C)** Disminuirse 306
D) Aumentarse 36 **E)** Disminuirse 360

Resolución:

- Sea la suma inicial: $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \underbrace{9\,860 + 7\,045}_{\boxed{16\,905}} \ldots \text{(I)}$

- La nueva suma será: $S_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \underbrace{9\,806 + 7\,405}_{\boxed{17\,211}} \ldots \text{(II)}$

- Como se podrá observar la nueva suma (S_2); aumenta en: $17\,211 - 16\,905 = \boxed{306}$

Luego para corregir la nueva suma (S_2), hay que disminuirle 306. ***Rpta. C***

Problema 4 : Si: $\overline{abc} \cdot \overline{ab} = 10\,464$ $\overline{abc} \cdot c = 2\,289$; Hallar: "a + b + c"

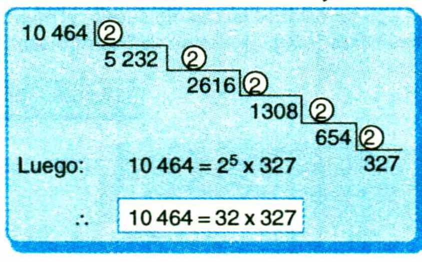
A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

Resolución:

- De la expresión: $\overline{abc} \cdot \overline{ab} = 10\,464$; pero: $\overline{abc} \cdot \overline{ab} = 327 \times 32$

Por comparación:

$\overline{abc} = 327$ y $\overline{ab} = 32$



- De la expresión: $\overline{abc} \cdot c = 2\ 289$

$\overline{abc} \cdot c = 327 \times 7$

Por comparación: $\overline{abc} = 327$ y $c = 7$

donde: $a = 3$; $b = 2$; $c = 7$ ➠ ∴ $a + b + c = 3 + 2 + 7 = 12$ ***Rpta. C***

Problema 5 : Si los dos dígitos intermedios de 4 579 son intercambiados, el número resultante:

A) Es 18 menos que 4 579 **B)** Es 180 menos que 4 579 **C)** Es igual a 4 579
D) Es 18 más que 4 579 **E)** Es 180 más que 4 579

Resolución:

- Número inicial = 4 579
- Número que resulta de intercambiar los dos dígitos intermedios = 4 759
- Como se podrá observar el número 4 579, aumenta en: 4 759 - 4 579 = 180 ***Rpta. E***

Problema 6 : Hallar un número de 3 cifras que sea igual al cubo de la suma de sus cifras. Dar como respuesta el producto de sus cifras.

A) 10 **B)** 12 **C)** 36 **D)** 24 **E)** 18

Resolución:

- Sea el número de 3 cifras: $\overline{abc}$
- **Del enunciado:** $\overline{abc} = (a + b + c)^3$ — **Empezamos a dar valores a : (a + b + c)**

Si: $a + b + c = 4$ ➠ $\overline{abc} = (4)^3 = 64$ *(**No cumple**; pues 64 es un número de 2 cifras y lo que queremos es un número de 3 cifras)*

Si: $a + b + c = 5$ ➠ $\overline{abc} = (5)^3 = 125$ *(**No cumple**: pues: $a = 1$; $b = 2$ y $c = 5$ Entonces: $a + b + c = 8$)*

Si: $a + b + c = 6$ ➠ $\overline{abc} = (6)^3 = 216$ *(**No cumple**; pues: $a = 2$; $b = 1$ y $c = 6$ Entonces: $a + b + c = 9$)*

Si: $a + b + c = 7$ ➠ $\overline{abc} = (7)^3 = 343$ *(**No cumple**; pues: $a = 3$; $b = 4$ y $c = 3$ Entonces: $a + b + c = 10$)*

Si: $a + b + c = 8$ ⟹ $\overline{abc} = (8)^3 = 512$ (*Si cumple: pues:* $a = 5$; $b = 1$ y $c = 2$
Entonces: $a + b + c = 8$

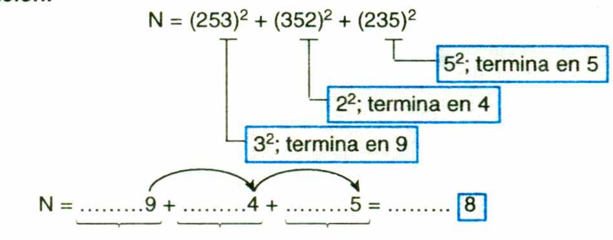
Luego; hallamos el producto de sus cifras del número: $\overline{abc} = 512$.

Osea: $a \times b \times c = 5 \times 1 \times 2 = 10$ ***Rpta. A***

Problema 7: El último dígito de: $N = (253)^2 + (352)^2 + (235)^2$; cuál es?

A) 7 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:



Luego: N = ...9 + ...4 + ...5 = ... 8

∴ El último dígito de N, es: 8 ***Rpta. C***

Problema 8: ¿En cuánto aumenta el producto 35 x 29 si cada factor aumenta en 1?

A) En 2 **B)** En 1 **C)** En 30 **D)** En 65 **E)** En 64

Resolución:

- Producto Inicial = 35 x 29
- Nuevo Producto = (35 + 1) x (29 + 1), efectuamos este producto de la manera siguiente:

$$(35 + 1) \times (29 + 1) = 35 \times 29 + 35 \times 1 + 1 \times 29 + 1 \times 1$$

Producto Inicial ; $\Sigma = 65$

- Como se podrá observar el producto inicial aumenta en 65. **Rpta. D**

Problema 9: Hallar la última cifra del siguiente producto: $3^4 . 3^2 . 5^7 . 7^9 . 13^4 . 17^2 . 23^4$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

Resolución:

- Este tipo de ejercicios se resuelve de la manera siguiente:

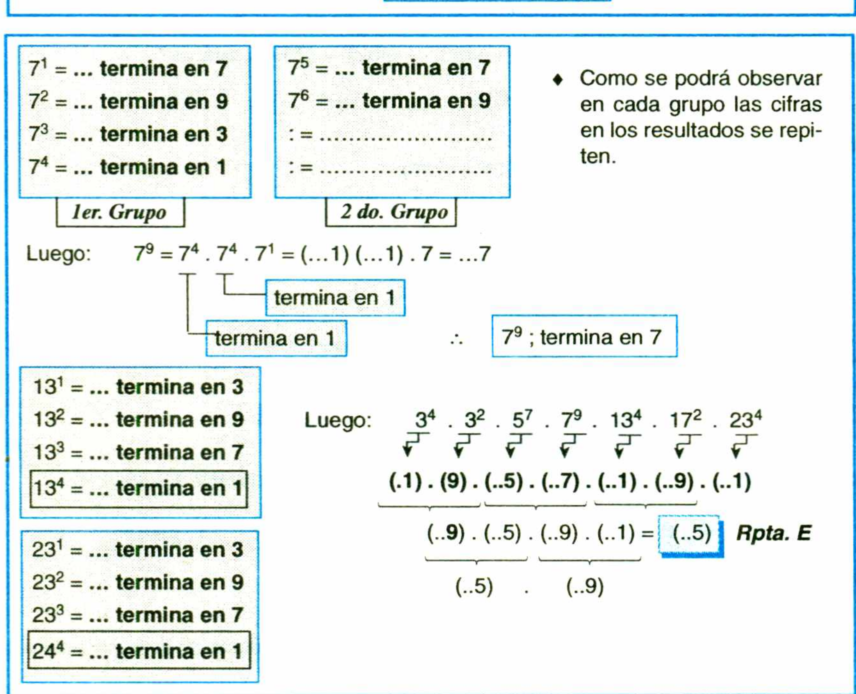
$3^4 = 81$ **... termina en 1.**	$3^2 = 9$ **... termina en 9**	$43^2 =$ **... termina en 9**

Las otras cantidades se analizan de la manera siguiente:

5^1 = ... **termina en 5**
5^2 = ... **termina en 5**
5^3 = ... **termina en 5**
5^4 = ... **termina en 5**

$5^7 = 5^3 . 5^4$ = (... **termina en 5**) . (... **termina en 5**)

5^7 = ... **termina en 5**



Problema 10: La diferencia entre dos números naturales es "x". Si se resta 5 del minuendo y se suma 3 al sustraendo. ¿Cuál será la diferencia?

A) x + 5 **B)** x - 5 **C)** x + 8 **D)** x + 2 **E)** x - 8

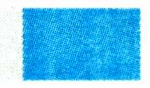
Resolución:

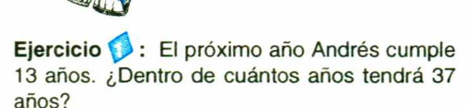
- Sean los dos números naturales: "a" y "b"
- **Del enunciado:** *) $a - b = x$ **) $(a - 5) - (b + 3) = ?$

de esta última expresión obtenemos: $(a - 5) - (b + 3) = a - 5 - b - 3 = \underbrace{a - b}_{x} - 8 =$ **x - 8**

∴ **La nueva diferencia sería: (x - 8)** **Rpta. E**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE NÚMEROS NATURALES





NIVEL I

Ejercicio 1: El próximo año Andrés cumple 13 años. ¿Dentro de cuántos años tendrá 37 años?

A) 23 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

Ejercicio 2: María vende un terreno en S/. 2 195 000, perdiendo S/. 150 000. ¿Cuánto costó el terreno?

A) S/. 2 195 000 **B)** S/. 2 045 000
C) S/. 2 345 000 **D)** S/. 2 255 000
E) S/. 2 005 000

Ejercicio 3: De un rollo de alambre se vendió 108 metros luego 436 m, después 159 m y todavía quedan 297 m. ¿Cuánto tenía el rollo al comienzo?

A) 693 m **B)** 657 m **C)** 545 m
D) 1 000 m **E)** 703 m

Ejercicio 4: ¿Cuál es la suma de todos los números pares entre 305 y 319?

A) 2 184 **B)** 1 878 **C)** 2 178 **D)** 2 174 **E)** 2 188

Ejercicio 5: Un viaje de 1 763 kilómetros, fue ampliado en 360 km. ¿Cuánto se ha recorrido en ida y vuelta?

A) 3 886 Km **B)** 2 836 Km **C)** 2 483 Km
D) 4 050 Km **E)** 4 246 Km

Ejercicio 6: La diferencia de dos números es 21 y el mayor excede a la diferencia en 35. ¿Cuáles son los números?

A) 56 y 35 **B)** 80 y 59 **C)** 53 y 42
D) 68 y 47 **E)** 75 y 54

Ejercicio 7: Un reloj se atrasa un minuto cada 3 horas. ¿Cuánto se atrasa en 30 días?

A) 4 horas **B)** 4 horas 12 minutos
C) 3 horas 48 minutos **D)** 3 horas
E) 2 horas 50 minutos

Ejercicio 8: Una jornada de trabajo ha durado 25 horas y 24 minutos habiéndose realizado en 12 etapas de igual duración. ¿Cuánto tiempo se ha demorado en cada etapa?

A) 2 horas y 1 minuto
B) 2 horas y 3 minutos
C) 2 horas y 7 minutos
D) 2 horas y 9 minutos
E) 2 horas y 11 minutos

Ejercicio 9: Al dividir 8 408 entre 15; 25 y 35. En cuál de las divisiones se obtiene mayor residuo?

A) En la primera **B)** En la segunda
C) En la tercera **D)** En la primera y la tercera
E) Todos los residuos son iguales

Ejercicio 10: Complete escribiendo el número adecuado:

a) $3 + 15 = 15 + \ldots\ldots$

b) $0 + \ldots\ldots = 10$

c) $6 + (2 + 5) = (6 + \ldots\ldots) + 5$

d) $(5 + 12) + \ldots\ldots = 17 + 1$

e) $(10 - 4) + \ldots\ldots = (14 - 2) - 3$

Dar como respuesta la suma de ellos.

A) 12 **B)** 23 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 19

Ejercicio 11: Andrés y Bertha han efectuado los siguientes depósitos diarios en soles. Diga el monto total de los 2 depósitos.

Dia / Persona	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Andrés	36 104	22 086	13 946	29 076	48 104	26 341
Bertha	28 946	19 401	22 777	31 000	35 700	19 990

A) S/. 334 671 **B)** S/. 332 586
C) S/. 333 471 **D)** S/. 304 567
E) S/. 335 700

Ejercicio 12 : El largo de una cancha de fútbol es de 112 m y el ancho es de 15 m más que la mitad del largo. ¿Cuántos metros se recorren al dar 3 vueltas a su alrededor?

A) 1 098 m **B)** 1 260 m **C)** 1 530 m
D) 1 332 m **E)** 1 476 m

Ejercicio 13 : En la recolección de votos para el reinado del colegio, Laura ha obtenido 5 208 votos. Marisol ha obtenido 716 votos más que Laura; y la ganadora Fiorina ha obtenido tanto como las dos anteriores en conjunto. ¿Con cuántos votos ha ganado Fiorina?

A) 10 520 **B)** 10 980 **C)** 11 052
D) 11 124 **E)** 11 132

Ejercicio 14 : Se tiene una piscina de 3 600 litros de capacidad, si se suministra agua a razón de 50 litros por hora. ¿Qué tiempo tomará al llenar la piscina?

A) 18 horas **B)** 36 horas **C)** 9 horas
D) 72 horas **E)** 84 horas

Ejercicio 15 : En cuánto aumenta el producto 25 x 27 si cada factor aumenta en 1?

A) En 1 **B)** En 2 **C)** En 26 **D)** En 52 **E)** En 53

Ejercicio 16 : Calcular:

$$4^2 : 2^3 - (-3^2 + 2^4 - 6^2) + 2^5 \times 3$$

A) 28 **B)** 143 **C)** 85 **D)** 37 **E)** 127

Ejercicio 17 : ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número 31?

A) $33 - 3 + 3^3$ **B)** $(3 + 3)^3 - 3^3$

C) $3^3 + \frac{3+3}{3}$ **D)** $3 \, . \, 3 \, (3 + 3) \, . \, 3$

E) $3^3 + \frac{3}{3} + 3$

Ejercicio 18 : ¿Cuál es la suma de las cifras que tenemos al completar los casilleros en blanco?

$$\begin{array}{r} 8\square 4\,\square 5 \; + \\ 3\;2\;0\;1\;7 \\ \hline 1\;1\;8\square 4\;2 \end{array}$$

A) 11 **B)** 12
C) 13 **D)** 10
E) 9

Ejercicio 19 : En la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{1x3} \; + \\ \overline{y3} \\ \overline{z6} \\ \hline 312 \end{array}$$

¿Cuál de los siguientes valores podría tomar el dígito z?

I) 1 **II)** 5 **III)** 8

A) Sólo II **B)** Sólo III **C)** Sólo I y II
D) Sólo II y III **E)** I, II y III

Ejercicio 20 : El producto de dos números es 2 856. Si al multiplicador se le agrega 13 unidades el nuevo producto resulta 3 740. Calcular la suma de los números.

A) 110 **B)** 115 **C)** 120 **D)** 127 **E)** 130

Ejercicio 21 : Al sumar el minuendo, el sustraendo y la diferencia de una sustracción obtenemos 8 356 como resultado. Si el minuendo es el doble del sustraendo. ¿Cuál es el sustraendo?

A) 2 059 B) 2 079 C) 2 089
D) 2 019 E) 2 029

Ejercicio 22: Un profesor tenía 385 hojas de papel, distribuyó entre sus alumnos dichas hojas, entregando 8 a cada uno. Le sobraron 17 hojas. ¿Cuántos alumnos recibieron las hojas?

A) 46 B) 38 C) 42 D) 64 E) 44

Ejercicio 23: Si: $\begin{array}{r} 943+ \\ 7n6 \\ 58k \\ \hline 2p21 \end{array}$ Entonces: "n - p - k"; es:

A) 5 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

Ejercicio 24: Al sumar 3 números obtenemos 618 por resultado, siendo 322 el mayor y la diferencia entre los otros 2 números es igual a 126. ¿Cuál es el número menor?

A) 78 B) 68 C) 72 D) 48 E) 85

Ejercicio 25: Un comerciante compró un terreno y un ómnibus; por el terreno pagó S/. 305 000 y por el ómnibus S/. 310 100. Luego vendió el terreno en S/. 348 300 y el ómnibus en S/. 275 700. ¿Ganó o perdió'

A) ganó S/. 8 900 B) Perdió S/. 8 900
C) perdió S/. 8 690 D) ganó S/. 675 002
E) perdió S/. 67 500

Ejercicio 26: En una fiesta habían 153 personas en un momento determinado, 17 damas y 22 caballeros no bailaban. ¿Cuántas damas asistieron a la fiesta?

A) 60 B) 62 C) 64 D) 70 E) 74

Ejercicio 27: Indicar lo correcto:

I. A + B = B + A — **A.** Distributiva
II. A + (B + C) = (A + B) + C — **B.** Conmutativa
III. A (B + C) = AB + AC — **C.** Asociativa

A) IA ; IIB ; IIIC B) IB ; IIA ; IIIC
C) IC ; IIA ; IIIB D) IB ; IIC ; IIIA
E) N.A.

Ejercicio 28: Hallar el valor de:

$$A = \underbrace{(20 - 1)(20 - 2)(20 - 3)(20 - 4)\ldots\ldots}_{20\ \text{términos}}$$

A) 40 000 B) 30 000 C) 20 000
D) 10 000 E) 0

Ejercicio 29: Efectuar:

$$(12 : 4 + 3 : 1 + 2 \times 4 - 3) : (2 \times 5 - 3 : 1)$$

A) 1/7 B) 2/7 C) 3/7 D) 11/7 E) 9/7

Ejercicio 30: Al dividir 2 452 entre 49 se obtuvo x de cociente y n de resto. Hallar: "x + n"

A) 52 B) 48 C) 49 D) 63 E) 51

Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. D	4. A	5. E
6. A	7. A	8. C	9. E	10. E
11. C	12. A	13. E	14. D	15. E
16. E	17. E	18. B	19. D	20. A
21. C	22. A	23. C	24. E	25. A
26. E	27. D	28. E	29. D	30. A

NIVEL II

Problema 1: En un conjunto habitacional las casas están numeradas correlativamente con los números naturales. Entonces, el número de casas que hay entre el número 17 y 28 es:

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Problema 2 : La suma de cinco números naturales consecutivos es 55. Si no se consideran el menor ni el mayor, el producto de los 3 restantes es:

A) 1 320 **B)** 33 **C)** 330
D) 132 **E)** Otro valor

Problema 3 : En la división de dos números el divisor es 15; el cociente es 3 y el residuo es 4. Entonces, el dividendo es:

A) 63 **B)** 49 **C)** 90 **D)** 45 **E)** 27

Problema 4 : Si la suma de dos números es 50 y su diferencia 30; entonces el cociente entre el doble del mayor y la mitad del menor es:

A) 18 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 14 **E)** 15

Problema 5 : Efectuar:

$$2\{1 + [4 (2 + 1)^2 + 1]^2\}$$

A) 2 160 **B)** 1 020 **C)** 2 740
D) 2 512 **E)** 1 286

Problema 6 : Efectuar: $6\{4 [2 (3 + 2) - 8] - 8\}$

A) 0 **B)** 1 **C)** 24 **D)** 4 **E)** 12

Problema 7: Un número excede en 286 a lo que le falta al número para ser igual a 1 000. La suma de los dígitos del número es:

A) 10 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 17

Problema 8:Hallar la diferencia de dos números tales que su suma es 400 y su cociente 3.

A) 100 **B)** 200 **C)** 300 **D)** 150 **E)** 240

Problema 9: Si al triple de la edad de Enrique le restamos 32 años entonces se obtienen 73 años. ¿Qué edad tiene Enrique?

A) 32 **B)** 35 **C)** 34 **D)** 36 **E)** N.A.

Problema 10: Hallar dos números tales que su suma sea 110; su cociente 2 y su residuo 20. ¿Cuál es el número mayor?

A) 80 **B)** 70 **C)** 60 **D)** 30 **E)** 20

Problema 11 : Si:

$$\begin{array}{r} 4\ \Delta\ \square\ + \\ \Delta\ \square\ 1 \\ \hline 7\ 5\ \Delta \end{array}$$

¿Cuál es el valor de: $\Delta - \square = ?$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Problema 12 : ¿Cuál es el número que falta para hacer verdadera esta igualdad?

$$25 . 25 . 25 = 5 . 5 . (?)$$

A) 5^3 **B)** 5^5 **C)** $5 . 5^3$ **D)** 25 **E)** 15

Problema 13 : La diferencia de dos números naturales es 118 el cociente es 7 y el residuo es el máximo posible. Hallar el menor de los números.

A) 16 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 17

Problema 14 : Si la suma de dos números es 16 y su producto 60. Entonces la suma de sus cuadrados es:

A) 226 **B)** 146 **C)** 106 **D)** 136 **E)** 900

Problema 15 : N es un número de dos cifras. Si a este número le aumento la suma de sus cifras obtengo 95. Si a N le quito la suma de sus cifras. ¿Cuánto se obtiene?

A) 52 **B)** 81 **C)** 77 **D)** 63 **E)** 72

Problema 16 : Efectuar:

$$[2 925 : 25 - 23 . 5] . 4 - [36 - 54 : 9 - (49 - 37) + 2] : 4$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 16

Problema 17 : ¿Cuántos números de 2 cifras existen que sean igual al cuádruple de la suma de sus 2 cifras?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Más de 5

Problema : Hallar la suma de todos los

números de 6 cifras cuyo producto de cifras es 5. Dar como respuesta la suma de cifras.

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 45

Problema 19 : Hallar: "a + b"; si:

$$\overline{a0b}_{(n)} + \overline{b0a}_{(n)} = 350$$

A) 7 **B)** 8 **C)** 11 **D)** 12 **E)** N.A.

Problema 20 : Sumar todos los números de la forma: $\overline{C2C}$.

A) 4 585 **B)** 4 625 **C)** 4 725
D) 4 525 **E)** 3 716

Problema 21 : Si: $\overline{a2b}_{(8)} = \overline{b5a}_{(6)}$. Hallar el complemento aritmético de $\overline{ab}$.

A) 75 **B)** 55 **C)** 65 **D)** 85 **E)** 82

Problema 22: Sabiendo que: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xy6}$. Hallar el C.A. de $\overline{xy}$.

A) 51 **B)** 61 **C)** 58 **D)** 72 **E)** 39

Problema : Hallar el C.A. de (a + b).

Si: $\overline{5ab} - \overline{5a} = \overline{47a}$

A) 6 **B)** 76 **C)** 4 **D)** 48 **E)** 64

Problema 24 : Hallar la suma de cifras del C.A. del número:

$$N = 6 \,.\, 10^{n+3} + 4 \,.\, 10^{n+4} + 7 \,.\, 10^{n+5}$$

A) 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

Clave de Respuestas

1. B	**2. A**	**3. B**	**4. C**	**5. C**
6. A	**7. C**	**8. B**	**9. B**	**10. A**
11. A	**12. C**	**13. E**	**14. D**	**15. D**
16. D	**17. C**	**18. A**	**19. A**	**20. C**
21. C	**22. B**	**23. C**	**24. C**	

¿SABÍAS QUE...

... la noción de conjunto no es nueva en el campo de la matemática, pues ya en su época Galileo Galilei se había referido a ella en una de sus obras?

Sin embargo, la paternidad de la ***teoría de conjuntos*** *en su sentido actual se le atribuye a Georg Cantor (1 845 - 1 918), matemático ruso que desarrolló dicha teoría en una serie de memorias en la década de 1 874 a 1 884.*

NÚMEROS PRIMOS Y DIVISIBILIDAD

3.1 SUBCONJUNTOS ESPECIALES DE NÚMEROS CARDINALES

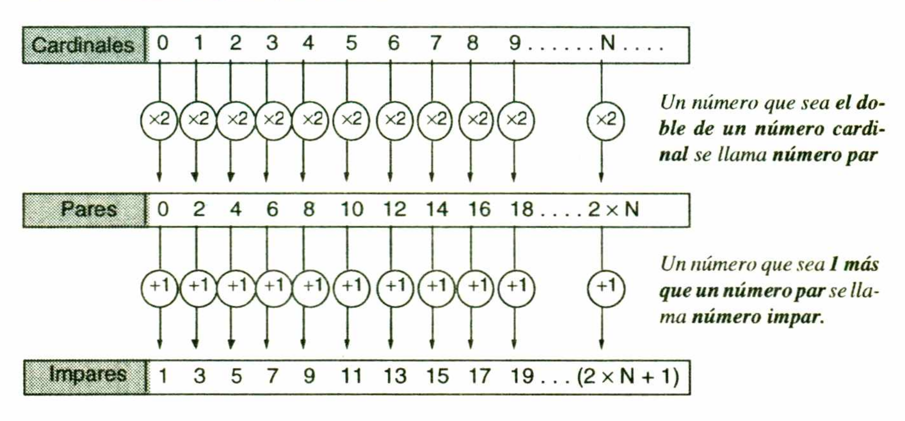
La teoría de números cardinales es el estudio de las propiedades del conjunto.

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Este conjunto de números tambien se le sabe representar por :

$$N = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}}_{\textit{Números naturales}}$$

Cuando pensamos en los cardinales que tienen alguna propiedad en particular pensamos en un **subconjunto de C.** Por ejemplo. Todos los números con la propiedad de ser múltiplos de 2, forman un subconjunto particular C.



El conjunto de los números pares : $P = \{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$

El conjunto de los números impares : $I = \{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\}$

3.1.1 CONCEPTO DE FACTOR Y DIVISOR DE UN NÚMERO

La idea de **Factor** está asociada a la multiplicación.

En efecto: Si: $5 \times 6 = 30$, entonces: 5 y 6 son factores de 30.

Si: $2 \times 3 \times 4 = 24$, entonces: 2, 3 y 4 son factores de 24.

Así mismo: $x \cdot y \cdot z = p$; las variables x, y, z son factores de p.

De idéntica manera, como la división es una operación INVERSA de la multiplicación, tenemos:

Si: $5 \times 6 = 30$ Entonces: $30 : 5 = 6$ y $30 : 6 = 5$

Como vemos; 6 y 5 dividen a 30 exactamente, a estos números se les llama **divisores**.

Se dice también que 30 es divisible por 6 y por 5

3.1.2 DIVISOR O SUBMÚLTIPLO DE UN NÚMERO

Se dice que un número es divisor de otro cuando, al dividirlo por él la división es exacta.

Ejemplos:

El 5 es divisor de 30 porque:	El 7 es divisor de 42 porque:
30 | 5 0 6	42 | 7 0 6

* *El número uno (1), es divisor de todo número.*

Ejemplo : *1 es divisor de 15. Porque: $15 = 1 \times 15$*

** *El número cero no es divisor de ningún número; porque: 3/0 ; 7/0 ; no representan números.*

Recuerda que:

*El **divisor** de un número es aquel que está contenido en otro, un número entero de veces.*

3.1.3 MÚLTIPLO DE UN NÚMERO

Es el número que resulta de multiplicar el número por cualquier otro.

Asi: Si: $3 \times 4 = 12$; decimos que: 12 es **múltiplo** de 3.

Si: $3 \times 5 = 15$; decimos que: 15 es **múltiplo** de 3.

Si: $3 \times 6 = 18$; decimos que: 18 es **múltiplo** de 3.

Los Términos **"Múltiplo"** y **"Divisor"** son Correlativos

Observa: $24 : 6 = 4$ (6 es **divisor** de 24 y 24 es **múltiplo** de 6)

$40 : 5 = 8$ (5 es **divisor** de 40 y 40 es **múltiplo** de 5)

$15 : 3 = 5$ (3 es **divisor** de 15 y 15 es **múltiplo** de 3)

Al decir que los términos **múltiplos** y **divisor** son **correlativos**, se quiere expresar que donde quiera que consideremos un **múltiplo** habrá que considerar un divisor, y viceversa.

Observaciones:

a) *Cada número es **múltiplo** de si mismo, porque si multiplicamos dicho número por 1 nos da el mismo número.*

Ejemplo: *7 es múltiplo de si mismo; porque:* $7 \times 1 = 7$

b) *El "0" es múltiplo de todo los números, porque cualquier número multiplicado por 0 es 0.*

O sea : $8 \times 0 = 0$

c) *Los múltiplos de un número, es infinito, porque podemos multiplicar dicho número por la sucesión infinita de los números naturales.*

Aprendamos:

45 es (divisible por / m ltiplo de) 9	9 es (divisor de / subm ltiplo de) 45

3.1.4 NOTACIÓN DE LOS MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

$\overset{\circ}{N} = m(N)$; significa múltiplos del número N.

Ejemplos:

a) $\overset{\circ}{2} = m(2)$; **significa múltiplos de 2.**

Luego: $\overset{\circ}{2} = m(2) = \{0; 2; 4; 6; 8; ......\}$

- Los múltiplos de 2 van aumentando de 2 en 2; empezando del 0.

b) $\overset{\circ}{3} = m(3)$; **significa múltiplos de 3.**

Luego: $\overset{\circ}{3} = m(3) = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; ......\}$

- Los múltiplos de 3 van aumentando de 3 en 3; empezando del 0.

b) $\overset{\circ}{4} = m(4)$; **significa múltiplos de 4.**

Luego: $\overset{\circ}{4} = m(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; ....\}$

- Los múltiplos de 4 van aumentando de 4 en 4; empezando del 0.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 22

Ejercicio 1 : Escriba **Par** o **Impar** para completar cada oración.

a) La suma de dos números pares cualesquiera es.......
b) La suma de dos números impares cualesquiera es.......
c) La suma de un número impar y uno par es........
d) El producto de dos números impares cualesquiera es.......
e) El producto de un número impar por uno par es.......
f) El producto de dos números pares cualesquiera es......

Ejercicio 2 : Copie y complete las tablas de Sumar y Multiplicar para "Pares" e "Impares"

+	P	I	P	I
P	P	↓		
I	→	P		
P				
I				

X	P	I	P	I
P	P		↓	
I		→	P	
P				
I				

Ejercicio 3 : Complete cada oración con la palabra **par** o **impar**.

a) La suma de tres números impares cualesquiera es......
b) La suma de diez números impares cualesquiera es.....
c) El producto de diez números impares cualesquiera es......
d) La suma de un número par de números impares es......
e) La suma de un número impar de números impares es.....

Ejercicio 4 : Resuelva estos ejercicios en "La Aritmética de Pares e Impares"

a) P + P + I + P + P = ☐
b) I + P + I + P + I = ☐
c) I + I + I + I + I + I = ☐
d) P + I + P + I + I + P= ☐

Sugerencia: **P** significa número par y **I** significa número impar.

Ejercicio 5 : El 6 es múltiplo de 6 ¿Porqué?

Resolución:

Ejercicio 6 : Escribe el conjunto de divisores del número 15.

Resolución:

Ejercicio 7 : El 8 es múltiplo de 2. ¿Porqué?

Resolución:

Ejercicio 8 : Escribe seis múltiplos de 5.

Resolución:

Ejercicio 9 : 21 es múltiplo de 7. ¿Qué es 7 respecto al 21?

Resolución:

Ejercicio 10: Forma el conjunto de los divisores de 10.

Resolución:

Ejercicio 11: Comprueba cuál de los siguientes números es múltiplo de 4, razonando la respuesta.

7, 29, 17, 23, 24, 35, 14, 34.

Resolución:

Ejercicio 12: ¿Porqué 35 no es múltiplo de 8?

Resolución:

Ejercicio 13: ¿De qué números es múltiplo 35?

Resolución:

Ejercicio 14 : ¿Cuántos múltiplos tiene el número 16? ¿Cuántos divisores tiene el mismo número?

Resolución:

Ejercicio 15: Forma el conjunto **C** de todos los múltiplos de 6 inferiores a 40.

Resolución:

Ejercicio 16 : Escribe:

a) Tres múltiplos de 7
b) Cuatro múltiplos de 3
c) Seis múltiplos de 4
d) Ocho múltiplos de 11

Resolución:

Ejercicio 17 : ¿Es verdadera la siguiente igualdad? : $87 = \overset{\circ}{3}$ ....

Ejercicio 18: Escribe los siete primeros múltiplos de 6

Resolución:

Ejercicio 19: Busca todos los divisores de 12

Resolución:

Ejercicio 20 : Explicar la siguiente igualdad y di si el número 45 pertenece a ese conjunto.

$\overset{\circ}{3} = \{ 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... \}$

Resolución:

Ejericcio 21 : Forma el conjunto **A** de todos los divisores de 18

Resolución:

A = {....................................}

Ejercicio 22 :Forma el conjunto **B** de todos los múltiplos de 18 inferiores a 100.

Resolución:

B = {....................................}

Ejercicio 23: Explica la siguiente igualdad y di si el número 96 pertenece a ese conjunto.

$\overset{\circ}{4} = \{ 0, 4, 8, 12, 16, ... \}$

Resolución:

3.2 DIVISIBILIDAD

Llamamos divisibilidad a la parte de la aritmética que nos dice, cuando un número es divisible por otro.

¿Habrá posibilidad de conocer cuando un número es divisible por otro esto es, que su división es exacta, sin necesidad de hacer la división?

¿Verdad que sería estupendo saber si una división es exacta o no, antes de efectuar la división?

Verás como: **Fíjate bién**: Saber si un número cualquiera dividido por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dá división exacta, es saber los múltiplos de 2, 3, 4, 5, etc.

A pesar de que los múltiplos de un número es infinito es posible saber si su división por un número cualquiera es división exacta o no.

Verás como:

Múltiplos de 2

$2 \times 0 = 0$
$2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$
$2 \times 4 = 8$
$2 \times 5 = 10$
$\vdots \qquad \vdots$

No es necesario continuar, porque habrás observado que todos los múltiplos de 2 terminan en 0 ó cifra par

Pues bien todos los números que términan en 0 ó en cifra par son múltiplos de 2; y por tanto, divisibles por 2.

Múltiplos de 5

$5 \times 0 = 0$
$5 \times 1 = 5$
$5 \times 2 = 10$
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 4 = 20$
$5 \times 5 = 25$
$5 \times 6 = 30$
$\vdots \qquad \vdots$

Tampoco es necesario continuar pues habrás observado que los múltiplos de 5 terminan en 0 ó en 5. Por tanto, los números que terminan en 0 ó en 5 son divisibles por 5

3.2.1 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA DIVISIBILIDAD

1) Representación generalizada de la divisibilidad. Para representar con letras que un número **a** es múltiplo de **b**; escribiremos **a** = m · **b**, lo cuál se lee: **a** es m veces **b**.

Ejemplo: $40 = 5 \times 8$; significa que: 40 es 5 veces 8.

2) Sumas y Diferencias de múltiplos

" La suma de varios múltiplos de un número es también múltiplo del mismo número".

Ejemplo 1: Los números: 20, 30, 40, 60, son múltiplos de 10. La suma: 20 + 30 + 40 + 60 = 150 es también múltiplo de 10.

Ejemplo 2: Los números: 18 y 12 son múltiplos de 3. La diferencia 18 - 12 = 6; es también múltiplo de 3

3.2.2 CARACTERES O CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

I) ***Divisibilidad por 2***

Un número es divisible por 2, cuando termina en 0 ó en cifra par.

Ejemplos: **a)** 12 es divisible por 2; porque termina en cifra par.
Veamos: 12 : 2 = 6; la división es exacta.

b) 40 es divisible por 2; porque termina en 0.
Veamos: 40 : 2 = 20, la división es exacta.

II) ***Divisibilidad por 3***

*Un número es **Divisible por 3**; cuando la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.*

Ejemplos:

a) 72 es divisible por 3; porque: 7 + 2 = 9, siendo 9 un múltiplo de 3.
Veamos: 9 : 3 = 3; La división es exacta.
También: 72 : 3 = 24; La división es exacta.

b) 201 es divisible por 3; porque: 2 + 0 + 1 = 3; siendo la suma de sus cifras igual a 3.

c) 948 es divisible por 3; porque: 9 + 4 + 8 = 21; siendo 21 un múltiplo de 3.
Veamos: 21 : 3 = 7; la división es exacta.
También: 948 : 3 = 316; la división es exacta.

III) ***Divisibilidad por 4***

*Un número es divisible por 4 si termina en **2 ceros** o sus 2 últimas cifras forman un número divisible por 4.*

Ejemplos:

a) 8 200 es divisible por 4 porque sus dos últimas cifras son dos ceros.
Veamos: 8 200 : 4 = 2 050

b) 412 es divisible por 4; porque sus dos últimas cifras (12) forman un múltiplo de 4.

IV) ***Divisibilidad por 5***

*Un número es **divisible por 5**, cuando termina en cero ó en 5.*

Ejemplos: a) 35 es divisible por 5; porque termina en 5.
Veamos: 35 : 5 = 7; la división es exacta.

b) 70 es divisible por 5; porque termina en 0.
Veamos: 70 : 5 = 14; la división es exacta.

V) *Divisibilidad por 6*

Un número es divisible por 6, cuando, al mismo tiempo, lo es por 2 y por 3.

Ejemplos: a) 462 es divisible por 6; porque dicho número es divisible por 2 y por 3.
Veamos: 462 : 2 = 231; la división es exacta.
También: 462 : 3 = 154; la división es exacta.

b) 138 es divisible por 6, porque dicho número es divisible por 2 y por 3.
Veamos: 138 : 2 = 69; la división es exacta.
138 : 3 = 46; la división es exacta.

VI) *Divisibilidad de 7*

"Dado un número se separa la primera cifra de la derecha y se resta a lo que queda a la izquierda, el doble de la cifra que se ha separado y así sucesivamente; si el resultado que queda es múltiplo de 7, entonces el número es múltiplo de 7"

Ejemplo 1: 5 418

5 418 → 2 × 8 = 16
541 -
16
525 → 2 × 5 = 10
52 -
10
42 ➠ (es múltiplo de 7 porque 42 : 7 = 6)

∴ 5 418 es múltiplo de 7

Ejemplo 2: 1 273

1 273 → 2 × 3 = 6
127 -
6
121 → 2 × 1 = 2
12 -
2
10 ➠ (No es múltiplo de 7)

∴ 1 273 No es múltiplo de 7

Ejemplo 3: 2 987 642

2 987 642 → 2 × 2 = 4
2 98764 -
4
298 760 → 2 × 0 = 0
29 876 -
0
29 876 → 2 × 6 = 12
2 987 -
12
2 975 → 2 × 5 = 10
297 -
10
287 → 2 × 7 = 14
28 -
14
14 ➠ (Es múltiplo de 7)

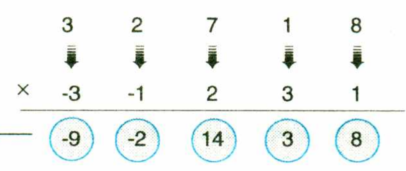
∴ 2 987 642 es múltiplo de 7

- **Otra forma de hallar la Divisibilidad por 7**

> ***Divisibilidad por 7:*** *Un número será divisible por 7 si cumple con la siguiente regla:*
>
> - *Multiplicamos cada una de las cifras del número dado de derecha a izquierda por los siguientes factores:*
>
> ......,-2 , -3 , -1 , 2 , 3 , 1 , -2 , -3 , -1 , 2 , 3 , 1
>
> - *Sumamos los números enteros obtenidos. Si el resultado final es cero o múltiplo de 7 el número dado será entonces divisible por 7.*

Ejemplo: ¿Es 32 718 divisible por 7?

Resolución:



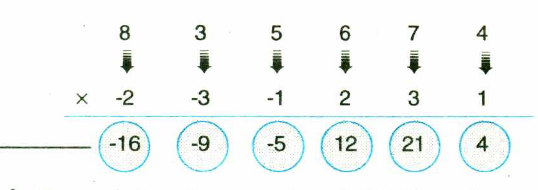
Sumando los números enteros hallados, se tiene:

(-9) + (-2) + (14) + (3) + (8) = 14, siendo 14 divisible por 7.

Luego: **32 718 es divisible por 7.**

Ejemplo: ¿Es 835 674 divisible por 7?

Resolución:



Sumando los números enteros hallados, se tiene:

- 16 - 9 - 5 + 12 + 21 + 4 = 7

Luego: **835 674 es divisible por 7.**

Ejemplo: ¿Es 3 621 574 divisible por 7?

Resolución:

	3	6	2	1	5	7	4
×	1	-2	-3	-1	2	3	1
	3	-12	-6	-1	10	21	4

Sumando los números enteros hallados, se tiene: 3 - 12 - 6 - 1 + 10 + 21 + 4 = 19, como 19 no es divisible por 7, entonces 3 621 574 tampoco será multiplo de 7.

VII) *Divisibilidad por 8*

Un número es divisible por 8, cuándo sus tres últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 8.

***Ejemplos**:*

a) 35 000 es divisible por 8 porque: termina en tres ceros.

b) 1 984 es divisible por 8 porque: sus 3 últimas cifras (984) forman un múltiplo de 8 veamos: 984 : 8 = 123.

VIII) *Divisibilidad por 9*

Un número es divisible por 9; cuando la suma de sus cifras es 9 ó forman un múltiplo de 9.

***Ejemplos**:* **a)** 225 es divisible por 9; porque: 2 + 2 + 5 = 9

b) 31 194 es divisible por 9; porque: 3 + 1 + 1 + 9 + 4 = 18; (18 es múltiplo de 9).

c) 75 438 es divisible por 9; porque: 7 + 5 + 4 + 3 + 8 = 27;(27 es múltiplo de 9).

IX) *Divisibilidad por 10; 100; 1 000; etc.*

Un número es divisible por 10, 100, 1 000, etc. cuando termina en un cero, dos, tres,....., ceros, respectivamente

***Ejemplos**:* **a)** El número 24 000 es divisible por 1 000, por 100 y por 10.

b) El número 3 400 es divisible por 100 y por 10.

c) El número 80 es divisible por 10.

X) *Divisibilidad por 11*

Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar Impar y la suma de las cifras que ocupan el lugar par da cero ó múltiplo de 11.

Ejemplo 1:

8 096 — Cifras de lugar Impar son: 8 y 9 ➨ Σ cifras = 8 + 9 = 17

— Cifras de lugar Par son: 0 y 6 ➨ Σ cifras = 0 + 6 = 6

Luego: 17 - 6 = 11; siendo este múltiplo de 11 ➨ ∴ **8 096 es múltiplo de 11.**

Ejemplo 2:

19 316 — Cifras de lugar impar: 1, 3 y 6 ➨ Σ cifras = 1 + 3 + 6 = 10

— Cifras de lugar par: 9 y 1 ➨ Σ cifras = 9 + 1 = 10

Luego: 10 - 10 = 0 ➨ ∴ **19 316 es múltiplo de 11.**

XI) *Divisibilidad por 12*

Un número es divisible por 12, cuando al mismo tiempo, lo es por 3 y por 4.

Ejemplo 1:

822 624 ➨ Σ cifras: 8 + 2 + 2 + 6 + 2 + 4 = 24; (24 es múltiplo de 3)

822 624 — Las dos últimas cifras (24), es múltiplo de 4

∴ **822 624 es múltiplo de 12**

Ejemplo 2:

2 495 100 ➨ Σ cifras: 2 + 4 + 9 + 5 + 1 + 0 + 0 = 21; (21 es múltiplo de 3)

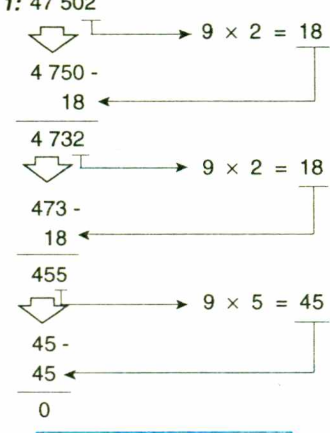
2 495 100 — como termina en dos ceros es múltiplo de 4.

∴ **2 495 100 es divisible por 12**

XII) *Divisibilidad por 13:*

Dado el número se separa la primera cifra de la derecha y se resta a lo que queda a la izquierda 9 veces de la cifra que se ha separado y así sucesivamente, si el resultado que queda al final es cero o múltiplo de 13 entonces "El número es múltiplo de 13".

Ejemplo 1: 47 502



∴ 47 502 es múltiplo de 13

Ejemplo 2: 193 816

19 381 - 54 (9 × 6 = 54)

19 327

1 932 - 63 (9 × 7 = 63)

1 869

186 - 81 (9 × 9 = 81)

105 ➡ (no es divisible por 13)

∴ 193 816 no es múltiplo de 13

XIII) *Divisibilidad por 14:*

Un número es divisible por 14, cuando al mismo tiempo, lo es por 2 y por 7.

XIV) *Divisibilidad por 15*

Un número es divisible por 15, cuando al mismo tiempo, lo es por 3 y por 5.

XV) *Divisibilidad por 16*

Un número es divisible por 16, cuando al mismo tiempo, lo es por 2 y por 8.

XVI) *Divisibilidad por 17*

Dado un número se separa la primera cifra de la derecha y se resta a lo que queda a la izquierda, 5 veces de la cifra que se ha separado y así sucesivamente, si el resultado final es cero o multiplo de 17, entonces el número es múltiplo de 17"

Ejemplo 1: 8 347

834 -
35
799

$5 \times 7 = 35$

79 -
45
34 ➡ (es divisible por 17)

$5 \times 9 = 45$

∴ 8 347 es divisible por 17

Ejemplo 2: 457 368

45 736 -
40
45 696

$5 \times 8 = 40$

4 569 -
30
4 539

$5 \times 6 = 30$

453 -
45
408

$5 \times 9 = 45$

40 -
40
0

$5 \times 8 = 40$

∴ 457 368 es divisible por 17

XVII) *Divisibilidad por 25*

"Un número es divisible por 25 cuando sus dos últimas cifras son Ceros o forman un múltiplo de 25"

***Ejemplos*:**

a) El número 2 600 es divisible por 25; porque sus dos últimas cifras son dos ceros.

b) El número 125 es divisible por 25; porque sus dos últimas cifras (25) Forman un múltiplo de 25.

XVIII) *Divisibilidad por 125*

"Un número es divisible por 125, cuando sus tres últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 125"

***Ejemplos*:**

a) El número 35 000 es divisible por 125; porque termina en tres ceros.

b) El número 3 250 es divisible por 125; porque sus tres últimas cifras (250) forman un múltiplo de 125.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE DIVISIBILIDAD

Ejercicio 1 : De los siguientes números hay dos que no son divisibles por 4. ¿Cuáles son?

342 ; 4 852 ; 345 672 ; 646 812 y 681 234

Resolución:

- En primer lugar marcamos las dos últimas cifras de los números dados.

3**42** ➡ no es divisible por 4; porque al dividir 42 entre 4, la división no es exacta.

4 8**52** ➡ sí es divisible por 4; porque al dividir 52 entre 4, la división es exacta.

345 6**72** ➡ 72 sí es divisible por 4; porque al dividir 72 entre 4, la división es exacta.

646 8**12** ➡ 12 sí es divisible por 4; porque 12 entre 4, es exacto.

681 2**34** ➡ 34 no es divisible por 4; porque al dividir 34 entre 4, la división no es exacta.

Ejercicio 2 : ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de 59 para formar un número de tres cifras divisible por 2?

Resolución:

Las cifras que deben escribirse a la derecha de 59 y se convierte en un número de tres cifras divisible por 2 es: 0 , 2 , 4 , 6 y 8.

Siendo éstos números: 590 ; 592 ; 594 ; 596 y 598.

Ejercicio 3 : Completa la siguiente tabla, escribiendo **SI o NO**, en el casillero correspondiente.

Divisible	2	3	4	5	6	7	8	9	10
326									
650									
1 268									
3 400									
24 984									

Resolución:

Divisible	2	3	4	5	6	7	8	9	10
326	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
650	SI	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NO	SI
1 268	SI	NO	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO
3 400	SI	NO	SI	SI	NO	NO	SI	NO	SI
24 984	SI	SI	SI	NO	SI	NO	SI	SI	NO

Ejercicio 4 : Halla los elementos de cada conjunto: A = { x ∈ IN/ 13 < x < 50 ; es múltiplo de 7 }

B = { x ∈ IN/ 39 < x < 67 ; es múltiplo de 4 } ; C = { x ∈ IN/ 12 ≤ x < 50 ; es múltiplo de 8 }

Resolución:

A = { x ∈ IN/ 13 < x < 50 ; x es múltiplo de 7 }

Los valores que toma "x" que sean mayores que 13, pero menores que 50, son: 14, 15, 16, 17, 18, ..., 48, 49; siendo los múltiplos de 7, los números: 14, 21, 28, 35, 42 y 49. ∴ **A = { 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , 49 }**

B = { x ∈ IN/ 39 < x < 67 ; x es múltiplo de 4 }

Los valores que toma "x" que sean mayores que 39, pero menores que 67 son: 40, 41, 42, ...,66; siendo los múltiplos de 4, los números: 40, 44, 48, 52, 56, 60 y 64. ∴ **B = { 40 , 44 , 48 , 52 , 56 , 60 , 64 }**

C = { x ∈ IN/ 12 ≤ x < 50 ; es múltiplo de 8 }

Los valores que toma "x" que sean mayores o iguales a 12; pero menores que 50 son: 12, 13, 14, 15, 16,......, 49; siendo los múltiplos de 8, los números: 16, 24, 32, 40 y 48. ∴ **C = { 16 , 24 , 32 , 40 , 48 }**

Ejercicios 5 : Halla los elementos de cada conjunto:

P = { x ∈ IN/ 30 ≤ x ≤ 70 ; x es divisible por 5 } Q = {x ∈ IN/ 40 < x ≤ 120 ; x es divisible por 12}

Resolución:

P = { x ∈ IN/ 30 ≤ x ≤ 70 ; x es divisible por 5 }

Los valores que toma "X" son: 30, 31, 32, 33,...., 69, 70 ; siendo los números divisibles por 5: 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 y 70. ∴ **P = {30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70}**

Q = { x ∈ IN/ 40 < x ≤ 120 ; x es divisible por 12 }

Los valores que toma "X" son: 41, 42, 43, 44, ...,119 y 120; siendo los números divisibles por 12: 48, 60, 72, 84, 96, 108 y 120 ∴ **Q = {48, 60, 72, 84, 96, 108, 120}**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 23

Ejercicio 1 : Escribe tres números que sean divisibles, al mismo tiempo, por 2 y por 4.

Rpta.

Ejercicio 2 : Escribe dos números los cuales sean divisibles por 9.

Rpta.

Ejercicio 3 : Si un número es divisible por 6. ¿Porqué números será divisible también?

Rpta.

Ejercicio 4 : Comprueba con varios ejemplos que la suma de tres números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 3.

Resolución:

Ejercicio 5 : Comprueba con varios ejemplos que la suma de cinco números consecutivos es siempre divisible por 5.

Resolución:

Ejercicio 6 : ¿Qué cifra hay que escribir a la derecha de 153 para obtener un número de cuatro cifras que sea divisible por 3?

Resolución:

Ejercicio 7 : De los siguientes números hay tres que son divisibles por 13. ¿Cuáles son? 8 476 ; 4 578 ; 4 641 ; 90 402 ; 56 079.

Rpta.

Ejercicio 8 : Completa la siguiente tabla, escribiendo **SI o NO** en el casillero correspondiente.

Divisible	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
574										
432		Si								
1 540				Si						
936										
2 688										
3 375										

Ejercicio 9 : Sustituir en el número 23 _ 4 _ 5, los espacios en blanco por cifras de modo que resulte un número divisible por 3.

Rpta.

Ejercicio 10 : En los siguientes números falta una cifra para que sean divisibles por 6. Escríbela:

4... ; 7... ; 8... ; 2...; 5...; 6...

Ejercicio 11 : De los siguientes números ¿Cuáles son divisibles por 17?

5 542 ; 952 ; 1 872 y 1 725

Rpta.

Ejercicio 12 : De los siguientes números. ¿Cuáles son divisibles por 11?

25 916 ; 35 798 ; 40 645 y 279 048

Rpta.

Ejercicio 13 : Halla los elementos de cada conjunto:

$A = \{x \in IN / 10 \leq x \leq 35 \text{ ; x es múltiplo de 5}\}$

A = {...}

$B = \{x \in IN / 4 < x < 58 \text{ ; x es múltiplo de 6}\}$

B = {...}

$C = \{x \in IN / 7 < x \leq 20 \text{ ; x es múltiplo de 2}\}$

C = {...}

$D = \{x \in IN / 4 < x \leq 125 \text{ ; x es múltiplo de 13}\}$

D = {...}

Ejercicio 14: Halla los elementos de cada conjunto:

$M = \{x \in IN / 50 < x < 100 \text{ ; x es divisible por 3}\}$

M = {...}

$N = \{x \in IN / 72 \leq x < 130 \text{ ; x es divisible por 7}\}$

N = {...}

$L = \{x \in IN / 60 \leq x < 150 \text{ ; x es divisible por 12}\}$

L = {...}

$T = \{x \in IN / 27 < x < 78 \text{ ; x es divisible por 15}\}$

T = {...}

Ejercicio 15 :

a) ¿Puede un número formado exclusivamente con cifras 2 ser divisible por 4. ¿Porqué?

Explicación:

b) ¿Puede un número exclusivamente formado por cifras 5 ser divisible:

1) por 2 **2)** por 3 **3)** por 4
4) por 5 **5)** por 6

Explicación:

Ejercicio 16 : Cuál es el menor número que hay que añadir a 514 para tener un número divisible:

1) por 3 **2)** por 4 **3)** por 5
4) por 9 **5)** por 25

Explicación:

Ejercicio 17: Cuál es el menor número que debe restarse de 637 para que sea divisible:

1) por 3 **2)** por 4 **3)** por 5
4) por 6 **5)** por 25

Explicación:

3.3 NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS. FACTORIZACIÓN DE UN NÚMERO EN SUS FACTORES PRIMOS

3.3.1 NÚMEROS PRIMOS

- Vas a dividir el número 5 por el número que quieras, pero te pongo una condición: que la división tiene que ser exacta.

- Haz la misma operación con el número 11.

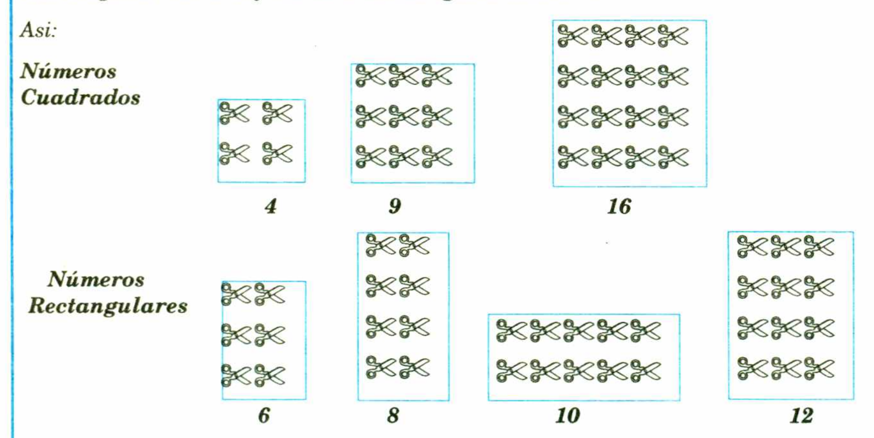
  ¿Qué ha ocurrido?

  Ciertamente, para que la división fuera exacta has teniendo que dividir los números 5, 7 y 11 por si mismo o por la unidad.

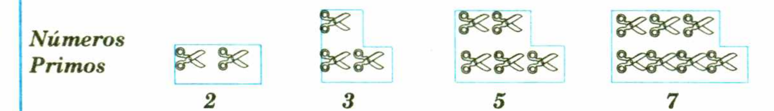
Pués bien, los números que tan sólo son divisibles por si mismos y por la unidad, se llaman números primos.

NÚMEROS PRIMOS: *Los matemáticos de la antigua Grecia llamaban números* ***cuadrados*** *a algunos números y números* ***Rectangulares*** *a otros.*

Asi:



Algunos números no se pueden representar en arreglos cuadrados o rectangulares. Lo que, siendo mayores que 1, no son cuadrados ni rectangulares, se llaman números ***primos****. Todo primo tiene exactamente dos factores: El mismo número y unidad.*



Los números cuadrados y rectangulares mayores que 1 se llaman ***Números Compuestos****.*

3.3.2 NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI O PRIMOS RELATIVOS

Contesta mentalmente a las siguientes preguntas:

¿Es primo el número 8? ¿Es primo el número 25?

La contestación correcta es que no son primos, porque 8 tiene como divisores a: 1, 2, 4 y 8; mientras en 25 tiene como divisores a: 1, 5 y 25; pero los números 8 y 25 tienen una característica, y es que entre ellos sólo tienen, **como divisor común a la UNIDAD.**

Pués bien, los números que tan sólo tiene la ***UNIDAD*** *como divisor común, se dice que son primos entre si.*

¿Son primos entre si los números 8 y 12?

No, porque además de la UNIDAD tienen como divisor común el 2 y el 4, Veamos:

8 —divisores→ ((1) , (2) , (4) y 8)

12 —divisores→ ((1) , (2) , 3 , (4) , 6 y 12)

¿Son primos entre sí el 9 y el 20?

Si, porque tienen como divisor común a la **UNIDAD**, Veamos:

9 —divisores→ ((1) , 3 y 9)

20 —divisores→ ((1) , 2 , 4 , 5 , 10 y 20)

¿Son primos entre sí el 14 y el 15?

Sí, porque tienen como divisor común a la **UNIDAD**, Veamos:

14 —divisores→ ((1) , 2 , 7 y 14)

15 —divisores→ ((1) , 3 , 5 y 15)

3.3.3 NÚMEROS COMPUESTOS

El número 6, además de ser múltiplo de 6 y de 1. Es múltiplo de otros números, como indican las divisiones siguientes:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 6 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Como se observa 6 no es primo, por lo tanto 6 es un **Número Compuesto**.

Se llama ***Número Compuesto****, a todo número que tiene más de dos divisores.*

Nota: *Los números que no son primos, son compuestos.*

Ejemplos: 25 es un número compuesto porque no es primo.
14 es un número compuesto porque no es primo.

3.3.4 TABLA DE NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 100.

CRIBA DE ERATOSTENES

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Para construir una tabla de números primos se procede de la siguiente manera:

1. Se escribe todos los números del 1 al número deseado, en este caso hasta el número 100.
2. A partir del 2 que se deja, se tacha (/) su cuadrado 4 y a partir de 4 se van tachando de dos en dos lugares los siguientes números o múltiplos de 2
3. A partir del 3, que se deja, se tacha (\ ) su cuadrado 9 y luego se tachan de tres lugares los números siguientes o múltiplos de 3.
4. A partir de 5, 7,11 y los siguientes números primos, se procede de la misma manera: se dejan esos números, se tachan sus cuadrados y a partir de éstos se tachan los números siguientes de tantos en tantos lugares como UNIDADES tenga el número primo que se trate.
5. La operación termina al llegar al número primo cuyo cuadrado queda fuera del límite o número mayor de la tabla.
6. Los números Primos son los que quedan sin tachar.

Luego: Los números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

*Nota: El número 1 no está incluido en el conjunto de los **Números Primos** porque solamente es divisible por si mismo.*

3.3.5 PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN NÚMERO ES PRIMO O NO:

***Regla**: Para conocer si un número es primo, se le divide sucesivamente por los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13 y los siguientes, hasta que el cociente llegue a ser igual o empiece a ser menor que el divisor, además el residuo tiene que ser diferente de cero.*

Ejemplo 1: ¿El número 23 es número primo?

Resolución:

El número 23 lo dividimos sucesivamente por los números primos: 2, 3, 5, 7, 11,...etc.

Así: 23 ÷ 2 = 11, residuo 1 ; 23 ÷ 3 = 7, residuo 2 ; 23 ÷ 5 = 4, residuo 3

En esta división se ha conseguido que el cociente es menor que el divisor y el residuo diferente de cero; por lo tanto 23 es un número primo.

Ejemplo 2: ¿El número 127 es número primo?

Resolución:

El número 127 lo dividimos sucesivamente por los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, ...etc.

Así: 127 ÷ 2 = 63, residuo 1 ; 127 ÷ 3 = 42, residuo 1 ; 127 ÷ 5 = 25, residuo 2 ; 127 ÷ 7 = 18, residuo 1 ; 127 ÷ 11 = 11, residuo 6

En la última división se ha conseguido que el divisor y el cociente son iguales y el residuo es diferente de cero, por lo tanto 127 es un número primo.

* **Otra Forma de Averiguar si un Número dado es Primo**:

Ejemplo: ¿El número 109 es número primo?

Resolución:

1) Extraemos la raíz cuadrada del número dado, tomando solo la parte entera.

Así: $\sqrt{109} = \underset{\text{Parte Entera}}{10},\underset{\text{Parte Decimal}}{\square\square\square\square\square}$

Sólo tomamos la parte entera o sea: 10

2) Dividimos el número dado entre todos los números **Primos** menores o iguales a **10** (En este caso, no tomamos 10 porque 10 no es un número primo)

Ahora efectuaremos las divisiones entre el número dado (109) y los números primos menores que 10, siendo estos los números: 7, 5, 3 y 2.

$$\begin{array}{r|l} 109 & 7 \\ \hline 4 & 15 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 109 & 5 \\ \hline 4 & 21 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 109 & 3 \\ \hline 1 & 36 \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} 109 & 2 \\ \hline 1 & 54 \end{array}$$

3) Si todas las divisiones efectuadas son **Inexactas**, el número dado es **Primo**. En este caso diremos que el número 109 es un **Número Primo**.

3.3.6 FACTORIZACIÓN DE UN NÚMERO EN SUS FACTORES PRIMOS

1. Cuándo un número no es primo, puede factorizarse siempre en un producto proveniente de una serie de factores que son números primos.
2. Factorizar un número en sus factores primos, es hallar un producto de una serie de factores primos, que sea igual a dicho número.
3. El procedimiento que ordinariamente se emplea para factorizar un número en sus factores primos, es el siguiente:

Ejemplo 1 : Factorizar 252; en sus factores primos.

Resolución:

252 es divisible por (2); el cociente es 126; osea: $\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ \hline 0 & 126 \end{array}$

126 es divisible por (2); el cociente es 63; osea: $\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ \hline 0 & 63 \end{array}$

63 es divisible por (3); el cociente es 21; osea: $\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ \hline 0 & 21 \end{array}$

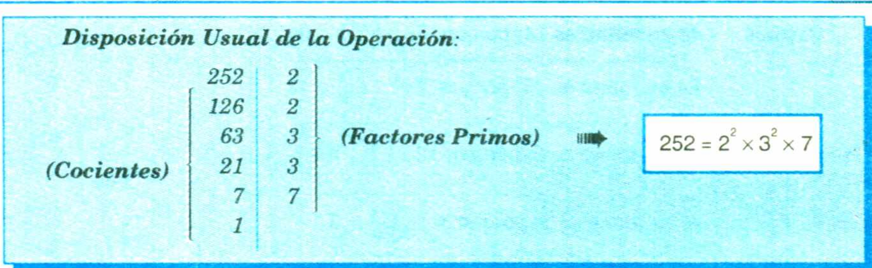
21 es divisible por (3); el cociente es 7; osea: $\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$

7 es divisible por (7); el cociente es 1; osea: $\begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$

Luego: 252 es un número igual a la serie de factores primos:

(2) × (2) × (3) × (3) × (7) (Estos divisores son los factores primos del número dado).

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$



Ejemplo 2 : Factorizar 408, en sus factores primos:

Resolución:

Se divide 408 entre (2) ; el cociente es 204

Se divide 204 entre (2) ; el cociente es 102

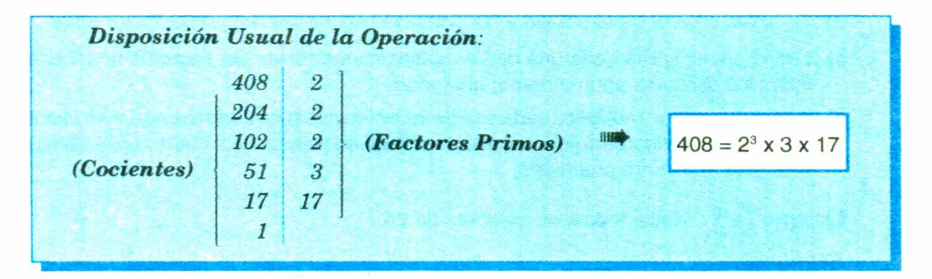
Se divide 102 entre (2) ; el cociente es 51

Se divide 51 entre (3) ; el cociente es 17

Se divide 17 entre (17) ; el cociente es 1

Luego: 408 es un producto igual a la serie de factores primos:

(2) × (2) × (2) × (3) × (17) $\therefore$ $408 = (2)^3 \times (3) \times (17)$



Nota: Cuando un número se divide entre 2, 3, 4, 5, 6,.....etc; es lo mismo decir sacar mitad, tercia, cuarta, quinta, sexta,.....,etc.

Veamos 48 **su mitad** es 24; porque: 48 : (2) = 24

24 **su mitad** es 12; porque: 24 : (2) = 12

12 **su mitad** es 6; porque: 12 : (2) = 6

6 **su mitad** es 3; porque: 6 : (2) = 3

3 **su tercia** es 1; porque: 3 : (3) = 1

Estos números Encerrados en ◯ son los divisores o factores de 48.

Luego: $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

De Otra Manera: Factorizar 48, en sus factores primos:

48	2	⟵	mitad de 48 es 24
24	2	⟵	mitad de 24 es 12
12	2	⟵	mitad de 12 es 6
6	2	⟵	mitad de 6 es 3
3	3	⟵	tercia de 3 es 1
1			

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$\therefore$ $48 = 2^4 \times 3$

3.3.7 HALLAR TODOS LOS DIVISORES O FACTORES DE UN NÚMERO

Para hallar todos los divisores o factores de un número, existe la siguiente regla:

a) Se factoriza el número dado en sus factores primos.

b) Se anota en una fila la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo.

c) Luego se multiplica cada una de las potencias sucesivas del segundo factor primo por todos los divisores anteriormente anotados.

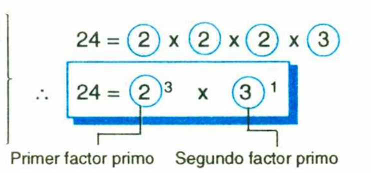
d) A continuación se multiplica cada una de las potencias sucesivas del siguiente factor primo por todos los divisores anteriores anotados y así sucesivamente hasta que el último divisor sea igual al número propuesto.

Ejemplo 1 : Hallar todos los divisores de 24.

Resolución:

Paso a:

24	2	⟵	mitad de 24 es 12
12	2	⟵	mitad de 12 es 6
6	2	⟵	mitad de 6 es 3
3	3	⟵	tercia de 3 es 1
1			



Paso b: $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3)$ ➡ | 1 | 2 | 4 | 8 |

Paso c: $(3^1) \times$ (todo b) ➡ | 3 | 6 | 12 | 24 |

Luego, los divisores de 24 son: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 y 24 ordenando dichos números, obtenemos: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

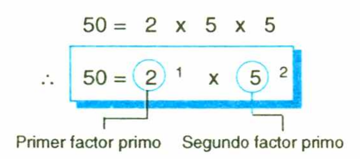
Rpta: 24 tiene 8 divisores.

Ejemplo 2: Hallar los divisores de 50.

Resolución:

Paso a: Factorizamos el número 50, en sus factores primos:

50	2	⬅	mitad de 50 es 25
25	5	⬅	quinta de 25 es 5
5	5	⬅	quinta de 5 es 1
1			



Paso b: Se anota en una fila la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo.

Recuerda que:

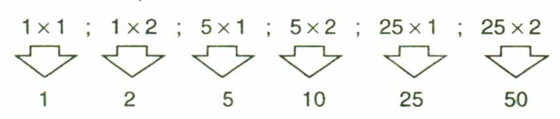
$N^0 = 1$, si : $N \neq 0$

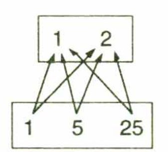
Ejemplo: $2^0 = 1$.

Paso c: Luego, se multiplica cada una de las potencias sucesivas del segundo factor primo por todos los divisores anteriormente anotados.

$(5^0, 5^1, 5^2)$ ➡ | 1 | 5 | 25 |

Efectuando la multiplicación, obtenemos:





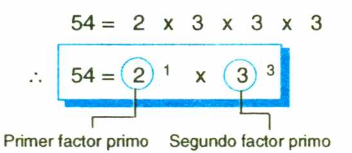
Luego, los divisores de 50 son: 1 , 2 , 5 , 10 , 25 y 50. ∴ ***Rpta***: 50 tiene 6 divisores.

Ejemplo 3: Hallar los divisores de 54.

Resolución:

Paso a: Factorizamos el número 54, en sus factores primos:

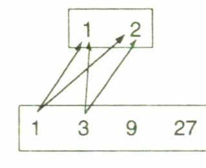
54	2	⬅	mitad de 54 es 27
27	3	⬅	tercia de 27 es 9
9	3	⬅	tercia de 9 es 3
3	3	⬅	tercia de 3 es 1
1			

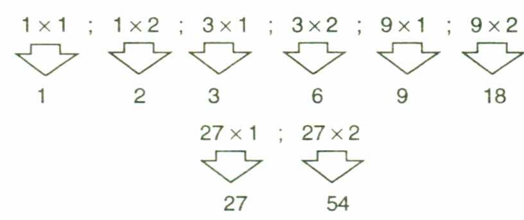


Paso b: Se anota en una fila la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo. $(2^0, 2^1)$ ➡ | 1 2 |

Paso c: Luego, se multiplica cada una de las potencias sucesivas del segundo factor primo por todos los divisores anteriormente anotados. $(3^0, 3^1, 3^2, 3^3)$ ➡ | 1 3 9 27 |

Efectuando las multiplicaciones, obtenemos:





Luego; los divisores de 54 son:
1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18 , 27 y 54.

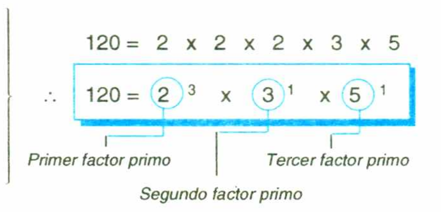
Rpta: 54 tiene 8 divisores.

Ejemplo 4: Hallar los divisores de 120.

Resolución:

Paso a: Factorizamos el número 120, en sus factores primos:

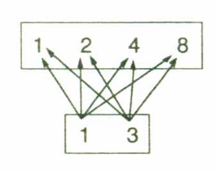
120	2	⬅ mitad de 120 es 60
60	2	⬅ mitad de 60 es 30
30	2	⬅ mitad de 30 es 15
15	3	⬅ tercia de 15 es 5
5	5	⬅ quinta de 5 es 5
1		

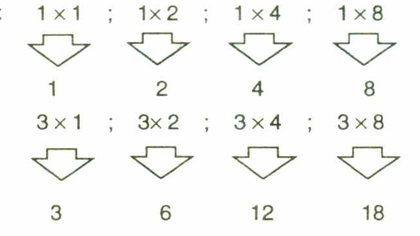


Paso b: Se anota en una fila la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo. $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3)$ ➡ | 1 2 4 8 |

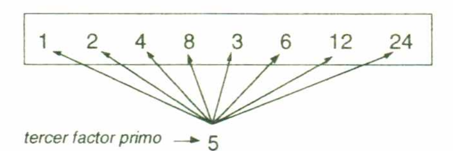
Paso c: Luego, se multiplica cada una de las potencias sucesivas del segundo factor primo por todos los divisores anteriormente anotados. $(3^0, 3^1)$ ➡ | 1 3 |

Efectuando las multiplicaciones, obtenemos:





Paso d: A continuación se multiplica cada una de las potencias sucesivas del siguiente factor primo por todos los divisores anteriores anotados y así sucesivamente hasta que el último divisor sea igual al número propuesto.



5 × 1	5 × 2	5 × 4	5 × 8	5 × 3	5 × 6	5 × 12	5 × 24
5	10	20	40	15	30	60	120

Luego: Los divisores de 120 son: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120

Ordenando; divisores de 120 son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 y 120. ***Rpta***: 120 tiene 16 divisores.

3.3.8 NÚMERO TOTAL DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Para hallar el total de divisores de un número, se aumenta en 1 a los exponentes de sus factores primos y se halla el producto de los exponentes asi modificados.

Ejemplo 1 : Hallar el número de divisores del número 60.

Resolución:

Factorizamos el número 60, en sus factores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^{②} \times 3^{①} \times 5^{①}$

- Los exponentes son: ②, ①, ① aumentados en 1 serán: 3, 2, 2; el producto de éstos será: ③ × ② × ② = 12

Luego: El número 60, tiene 12 divisores o factores.

***Generalizando**: Si un número "N" se factoriza en sus factores primos, quedaría representada asi:* $N = a^x \cdot b^y \cdot c^z$

donde: a, b y c son los factores primos. ; x, y, z, son los exponentes de cada factor primo.

Luego: El número de divisores del número N, está dado por la siguiente fórmula:

Número de divisores $= (x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1)$ ***(Fórmula)***

Ejemplo 2: Hallar el número de divisores del número 108.

Resolución;

- Factorizamos el número 108, en sus factores primos:

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$108 = (2)^2 \times (3)^3$

- Los exponentes son: 2 y 3 aumentados en 1 serán: 3 y 4; el producto de estos será: $3 \times 4 = 12$

Luego: **El número 108, tiene 12 divisores**

Ejemplo 3: Hallar el número de divisores del número 600.

Resolución:

- Factorizamos el número 600, en sus factores primos:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$600 = (2)^3 \times (3)^1 \times (5)^2$

- Los exponentes son: 3 , 1 y 2 aumentados en 1 serán: 4 , 2 y 3; el producto de éstos será: $4 \times 2 \times 3 = 24$

Luego: **El número 600, tiene 24 divisores.**

Ejemplo 4: Hallar el número de divisores del número 1 080.

Resolución:

- Factorizamos el número 1 080, en sus factores primos:

1 080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$1\,080 = (2)^3 \times (3)^3 \times (5)^1$

- Los exponentes son: 3 , 3 y 1 aumentados en 1 serán: 4 , 4 y 2; el producto de éstos será: $4 \times 4 \times 2 = 32$

Luego: **El número 1 080, tiene 32 divisores.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 24

Ejercicio 1 : Hay solamente un par de números primos cuya diferencia es 1. ¿Cuál es ese par?

Rpta. [ ]

Ejercicio 2: Diga cuántos números primos son:

a) Menores que 10 [ ]

b) Menores que 30 [ ]

c) Menores que 100 [ ]

Ejercicio 3: Diga cuántos números compuestos son:

a) Menores que 10 [ ]

b) Menores que 30 [ ]

c) Menores que 100 [ ]

Ejercicio 4:

a) Halle dos números primos cuya diferencia sea 3. (..................)

b) ¿Habrá otros dos que tengan esa propiedad? (..................)

Ejercicio 5: Note que 11 es primo; 11 + 2 = 13 es primo; 13 + 4 = 17 es primo; 17 + 6 = 23 es primo. ¿Hasta que número sigue siendo cierta esta relación? (..................)

Ejercicio 6: ¿Cuántos números primos son también pares? (..................)

Ejercicio 7: El par de primos más pequeños cuya diferencia es 2 lo constituyen 3 y 5. Esos números se llaman **Primos Gemelos**, halle otros seís pares de primos gemelos.

Resolución:

Ejercicio 8 : De los siguientes números, di cuales son primos:

a) 83 (......)	**b)** 97 (......)	**c)** 144 (......)
d) 113 (......)	**e)** 229 (......)	**f)** 328 (......)

Ejercicio 9 : Factorizar en el producto de sus factores primos los siguientes números:

a) $36 = 2^2 \times 3^2$	**l)** 1 230 =
b) 38 =	**m)** 4 200 =
c) 40 =	**n)** 810 =
d) 42 =	**ñ)** 2 310 =
e) 144 =	**o)** 1 521 =
f) 450 =	**p)** 1 200 =
g) 484 =	**q)** 1 764 =
h) 540 =	**r)** 2 312 =
i) 680 =	**s)** 5 440 =
j) 720 =	**t)** 3 348 =
k) 640 =	**u)** 1 460 =

Ejercicio 10 : Escribe dentro del paréntesis una "P" si es un número primo, o una "C" si es un número compuesto, en los siguientes números:

a) 151 ( )	**d)** 199 ( )	**g)** 283 ( )
b) 183 ( )	**e)** 184 ( )	**h)** 276 ( )
c) 119 ( )	**f)** 521 ( )	**i)** 320 ( )

Ejercicio 11 : ¿Cuáles de estas factorizaciones en factores primos está bien?

a) 3×2 ...(V)	f) 11×13 ...( )
b) 3×8 ...(F)	g) 16×7 ...( )
c) 2×10 ...( )	h) $5^2\times2\times3^2$...( )
d) 7×11 ...( )	i) $3\times2^2\times5$ ...( )
e) 15×9 ...( )	j) $7\times4^2\times3$ ...( )

Ejercicio 12 : Halla el conjunto de todos los divisores de cada uno de los números:

a) 28 = {1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28}
divisores de 28

b) 45 = {..............................}

c) 162 = {..............................}

d) 96 = {..............................}

e) 164 = {..............................}

f) 300 = {..............................}

g) 540 = {..............................}

h) 240 = {..............................}

i) 180 = {..............................}

j) 40 = {..............................}

Ejercicio 13 : Diga cuántos divisores tiene cada uno de los siguientes números:

a) 24 = $2^{③}$ x $3^{①}$

divisores
= (3 + 1) . (1 + 1)
= (4) . (2) = 8 ***Rpta.***

24	②
12	②
6	②
3	③
1	

∴ $24 = 2^3 \times 3$

Verificación:

Divisores de 24 = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24}

b)	32	⇒	# div. = ...
c)	40	⇒	# div. = ...
d)	80	⇒	# div. = ...
e)	128	⇒	# div. = ...
f)	258	⇒	# div. = ...
g)	465	⇒	# div. = ...
h)	279	⇒	# div.= ....
i)	1 473	⇒	# div.= ....
j)	1 755	⇒	# div.= ....
k)	2 616	⇒	# div.= ....
l)	280	⇒	# div.= ....
m)	2 400	⇒	# div.= ....

Ejercicio 14 : ¿Cuál es el menor número que tenga 12 divisores?

Rpta.

Ejercicio 15 : ¿cuál es el menor número que tenga 42 divisores?

Rpta.

Ejercicio 16 : Decir qué parejas de números son primos entre sí o primos relativos?

a) 4 y 7 ...( )	e) 26 y 35 ...( )
b) 11 y 16 ...( )	f) 27 y 64 ...( )
c) 12 y 17 ...( )	g) 73 y 45 ...( )
d) 21 y 24 ...( )	h) 120 y 48 ...( )

3.4 MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D). DE NÚMEROS NATURALES. MÉTODOS DE CÁLCULO

3.4.1 DIVISORES COMUNES

Consideremos los divisores de 30 y 45.

- Los divisores de 30 son: 1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 , 30

$\therefore$ $D_{30} = \{ (1), 2, (3), (5), 6, 10, (15), 30 \}$

- Los divisores de 45 son: 1 , 3 , 5 , 9 , 15 , 45

$\therefore$ $D_{45} = \{ (1), (3), (5), 9, (15), 45 \}$

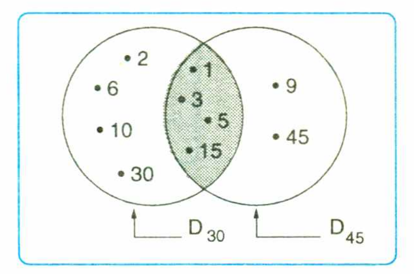
Los divisores marcados con el **círculo** dividen simultáneamente a 30 y a 45 y son por consiguiente los divisores comunes a los números 30 y a 45. ➠

*Llámese **Divisor Común** de varios números, al número que lo divide exactamente a todos.*

Ahora, hallamos la **Intersección** de los dos conjuntos de números siendo dicha intersección los números: 1, 3, 5 y 15

$$D_{30} \cap D_{45} = \{ 1, 3, 5, 15 \}$$

Mayor divisor común



Al mayor de los divisores comunes se denomina **Máximo Común Divisor**. Así 15 es el máximo común divisor que se simboliza (M.C.D) de los números 30 y 45, esto es:

$$\text{M.C.D } (30 \text{ y } 45) = 15$$

3.4.2 MÉTODOS PARA HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS O MÁS NÚMEROS

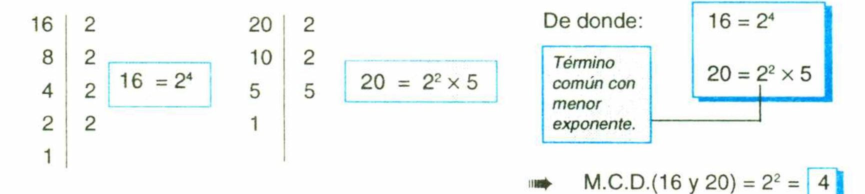
I) Por Fatorización en sus Factores Primos.

Se factoriza cada número en sus factores o divisores primos. El M.C.D. es el producto de los divisores comunes tomados con su Menor exponente.

Ejemplo 1 : Hallar el M.C.D de 16 y 20.

Resolución:

- Se factoriza cada número dado en sus factores primos asi:



$\Rightarrow$ M.C.D.(16 y 20) = 2^2 = **4**

Ejemplo 2 : Hallar el M.C.D. de 60 y 90.

Resolución:

- Factorizamos cada número dado en sus factores primos asi:

60	2		90	2
30	2		45	3
15	3	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$	15	3
5	5		5	5
1			1	

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

De donde:

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

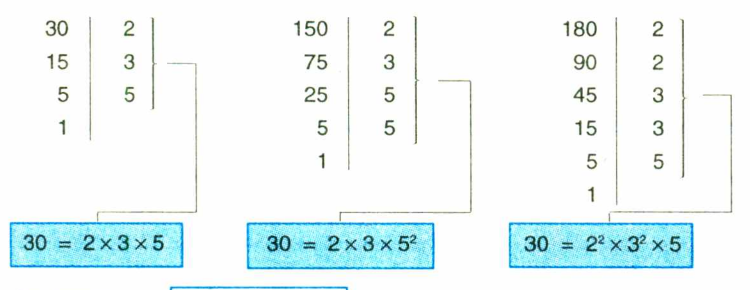
⬅ *Los factores comunes con su menor exponente son ; 2 ; 3 y 5*

$\therefore$ M. C. D (60 y 90) = $2 \times 3 \times 5$ = **30**

Ejemplo 3 : Hallar el M.C.D. de: 30, 150 y 180.

Resolución:

- Factorizamos cada número, en sus factores primos, Asi:



De donde:

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

⬅ *Los factores comunes con su menor exponente son ; 2 ; 3 y 5*

$\therefore$ M.C.D (30 , 150 y 180) = $2 \times 3 \times 5$ = **30**

II) Método Abreviado Para Hallar el M.C.D.

Para hallar el M.C.D. de varios números, puede emplearse el método abreviado, que consiste en dividir todos los números por el menor factor primo hasta que los cocientes sean primos entre sí. El Producto de los diversos factores primos empleados será el M.C.D.

Ejemplo 1: Hallar el M.C.D. de 60 y 90

Resolución:

			Cocientes
60 - 90	(2)	← Se divide a 60 y 90 entre 2, obteniendo	30 y 45.
30 - 45	(3)	← Se divide a 30 y 45 entre 3, obteniendo	10 y 15.
10 - 15	(5)	← Se divide a 10 y 15 entrte 5, obteniendo	2 y 3.
2 - 3			

Como los cocientes 2 y 3 son primos entre sí,
el M.C.D. de 60 y 90 es: $(2) \times (3) \times (5) = 30$ ∴ **M.C.D (60 y 90) = 30**

Ejemplo 2: Hallar el M.C.D. de 12, 30 y 42.

Resolución:

			Cocientes
12 - 30 - 42	(2)	← Se divide a 12, 30 y 42 entre 2; obteniendo:	6 , 15 , 21
6 - 15 - 21	(3)	← Se divide a 6, 15 y 21 entre 3, obteniendo:	2 , 5 , 7
2 - 5 - 7			

Como 2 , 5 y 7 son primos entre sí, el M.C.D. de 12 , 30 y 42. Es: $(2) \times (3) = 6$

∴ **M.C.D (12 , 30 y 42) = 6**

III) Determinación del M.C.D. de dos Números por Divisiones Sucesivas

Este procedimiento práctico conviene emplearlo cuando los números no se pueden factorizar fácilmente en sus factores primos.

Ejemplo 1 : Halla el M.C.D. de 615 y 225.

Resolución:

Divido: 615 por 225 y hallo 2 de cociente y 165 de residuo.

$$\begin{array}{r|l} 615 & 225 \\ \hline 165 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline R & C \end{array}$$

Divido: 225 por 165 y hallo 1 de cociente y 60 de residuo.

$$\begin{array}{r|l} 225 & 165 \\ \hline 60 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} B & R \\ \hline R_1 & C_1 \end{array}$$

Divido: 165 por 60 y hallo 2 de cociente y 45 de residuo.

165	60	⇨	R	R_1
45	2		R_2	C_2

Divido: 60 por 45 y hallo 1 de cociente y 15 de residuo.

60	45	⇨	R_1	R_2
15	1		R_3	C_3

Divido: 45 por 15 y hallo 3 de cociente y cero de residuo.

45	(15)	⇨	R_2	R_3
0	3		$R_4 = 0$	C_4

Luego: El M.C.D. de 615 y 225 es (15)

La disposición de las operaciones sería:

	C	C_1	C_2	C_3	C_4	⇐ Cocientes Sucesivos
A	B	R	R_1	R_2	(R_3)	⇐ Divisores Sucesivos
R	R_1	R_2	R_3	$R_4 = 0$		⇐ Residuo Sucesivos

REGLA: *Para hallar el M.C.D. de dos números ("A" mayor y "B" menor) mediante divisiones sucesivas se divide el mayor (A) entre el menor (B). Si el residuo es cero, el menor B es el M.C.D.*

Ejemplo: *Hallar el M.C.D. de 6 y 18.*

Resolución:

Divido el número mayor (18) entre el menor (6).

18	(6)
0	3

⇨ *Como el residuo es cero, el número menor (6), es el M.C.D.*

- *Pero si hay residuo se divide el número menor (B) por el residuo y después este primer residuo por el segundo residuo sucesivamente hasta que la división sea exacta por*

Ejemplo: *Hallar el M.C.D. de 30 y 20.*

	1	2	⇐ Cocientes sucesivos
30	20	(10)	⇐ Divisores sucesivos
10	0		⇐ Residuo sucesivos

∴ *M.C.D (30 y 20) = 10*

Ejemplo 2: Hallar el M.C.D. de 560 y 320.

Resolución:

Por divisiones sucesivas tenemos:

	1	1	3	
560	320	240	(80)	⇐ (último divisor.)
240	80	0		

∴ M.C.D. de 560 y 320 es 80

3.4.3 MÁXIMO COMÚM DIVISOR (M.C.D) DE VARIOS NÚMEROS

Para hallar el M.C.D. de tres o más números mediante divisiones sucesivas, se halla el M.C.D. de dos de ellos y con el número encontrado se busca el M.C.D. combinando con el tercero y asi sucesivamente.

Ejemplo 1: Hallar el M.C.D. de 615, 195

Resolución:

Empleando el procedimiento explicado, hallamos que:

El M.C.D. de: 615 y 195 es:

	3	6	2
615	195	30	(15)
30	15	0	

← (último divisor)

∴ M.C.D de: 615 y 195 es 15

Ejemplo 2: Hallar el M.C.D. de 640, 480 y 360.

Resolución:

Primero, hallamos el M.C.D. de dos de ellos; siendo estos 640 y 480. Veamos:

	1	3
640	480	(160)
160	0	

∴ M.C.D. de: 640 y 480 es 160

- Ahora, hallamos el M.C.D. de 360 y (160)

	2	4
360	160	(40)
40	0	

Luego: M.C.D de 360 y 160 es 40

Rpta: El M.C.D. de 640, 480 y 360 es 40

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Problema 1 ¿Cuál es el mayor número de niños entre los cuales hay que repartir 12, 24 y 60 panes simultaneamente para que, en cualquiera de los casos cada uno reciba una misma cantidad ¿Cuántos panes toca por niño en cada caso?

Resolución:

Para hallar el mayor número de niños se calcula el M.C.D. de: 12, 24 y 60; Veamos:

12	24	60	2	
6	12	30	2	M.C.D (12 , 24 y 60) = 2 × 2 × 3 = **12**
3	6	15	3	
1	2	5		

Luego: El mayor número de niños entre los cuales hay que repartir 12, 24 y 60 panes sumultaneamente es: **12**

Ahora, calculamos cuántos panes toca por niño en cada caso:

- De los 12 panes cada uno recibe: $\frac{12}{\boxed{12}} = 1$
- De los 24 panes cada uno recibe: $\frac{24}{\boxed{12}} = 2$
- De los 60 panes cada uno recibe: $\frac{60}{\boxed{12}} = 5$

Rpta:

El mayor número de niños es 12 y en cada caso toca por niño 1 , 2 , y 5 panes.

Problema 2: ¿Cuál es el mayor número de niños entre los que se puede repartir simultaneamente 26 y 38 caramelos, de manera que sobre 2 y 6 caramelos, respectivamente?

Resolución:

Hallamos el M.C.D. de: 26 - 2 = 24 y 38 - 6 = 32 : Veamos:

24	32	2	
12	16	2	M.C.D (24 y 32) = 2 × 2 × 2 = **8**
6	8	2	
3	4		

Rpta: El mayor número de niños son 8.

Comprobación:

a) 26 caramelos | 8 niños
24 — 3 caramelos cada niño
2 caramelos (Sobran)

b) 38 caramelos | 8 niños
32 — 4 caramelos cada niño
6 caramelos (Sobran)

Problema 3: Manuel camina un número exacto de pasos avanzando 700 cm; 800 cm y 950 cm ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso? ¿Cuántos pasos dió en total?

Resolución:

Para saber cual es la mayor longitud posible de cada paso, hallaremos el M.C.D de (700 , 800 y 950); Asi :

700 - 800 - 950	2	
350 - 400 - 475	5	M.C.D (700 , 800 y 950) = $2 \times 5 \times 5 =$ **50**
70 - 80 - 95	5	
14 - 16 - 19		

Luego; la mayor longitud posible de cada paso es de **50 cm.**

Ahora, hallamos el número de pasos:

$\frac{700}{50} = 14$ pasos

$\frac{800}{50} = 16$ pasos

$\frac{950}{50} = 19$ pasos

Total $= (14 + 16 + 19)$pasos $= 49$ pasos

Rpta: **Manuel dió un total de 49 pasos.**

Problema 4: Un fabricante de jabones, quiere envasar su producto en cajas de 840 cm^3 y 960 cm^3. ¿Cuál debe ser el mayor volumen de cada jabón para que en cada caja entre el mayor número exacto de jabones? ¿Cuántos jabones estarían en cada caja?

Resolución:

Para saber cuál es el mayor volumen de cada jabón, hallamos el M.C.D. de 840 y 960.

840 - 960	2	
420 - 480	2	
210 - 240	2	M.C.D (840 y 960) = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 =$ **120**
105 - 120	3	
35 - 40	5	
7 - 8		

Luego; el mayor volumen de cada jabón es de 120 cm^3.

Ahora, hallamos el número de jabones que entran en cada caja.

En la primera caja entran: $\frac{840}{120} =$ **7 jabones**

En la segunda caja entran: $\frac{960}{120} =$ **8 jabones**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

Ejercicio 1 : Hallar el M.C.D de:

1 155 y 210

Resolución:

Rpta. 105

Ejercicio 2 :Hallar el M.C.D de:

2 520 ; 720 y 540

Resolución:

Rpta. 180

Ejercicio 3 : Calcular el M.C.D de:

1 980 y 1 008; por divisiones sucesivas.

Resolución:

Rpta. 36

Ejercicio 4 : Calcular el M.C.D de 660; 5 544; 14 850 y 1 980. Tratándose de varios números; se empieza por calcular el M.C.D de dos de ellos; después se calcula el máximo común divisor entre el máximo común divisor obtenido y el tercer número, y así se continua hasta agotar todos los números dados. El último máximo común divisor hallado es el máximo común divisor que se buscaba. Así:

	8	2	2		112	2		30	**Cocientes**
5 544	**660**	264	132	**14 850**	132	66	1 980	66	**M.C.D**
264	132	0		165 330 66	0		0		**restos**

Luego:

M.C.D. (660; 5 544 ; 14 850 y 1 980) = 66

Rpta. 66

Ejercicio 5 : Calcular el M.C.D de:

6 930 ; 450 y 2 790 ; mediante divisiones sucesivas.

Resolución:

Rpta. 90

Ejercicio 6 :Tres personas desean repartir 180 libros; 240 juguetes y 360 chocolates respectivamente, entre un cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de libros, de juguetes y de chocolates. ¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficarse en esa forma?

Resolución:

Rpta. 60 niños

Ejercicio 7 : Se tiene tres cubos de 84 cm^3; 270 cm^3 y 330 cm^3. ¿Cuál es el mayor volumen en cm^3 que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos?

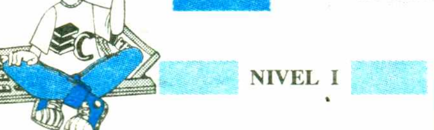
Resolución:

Rpta. 6 cm^3

Ejercicio 8 : Se tienen 160 $c\ell$ y 168 $c\ell$ ($c\ell$ = centilitro) de extractos distintos. Se quieren envasar en el menor número posible de frascos iguales sin mezclar los extractos. ¿Cuál es el número de frascos de cada clase?

Rpta. 20 y 21

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)



NIVEL I

Ejercicio 1: Halla el máximo común divisor (M.C.D) de cada par de números (a veces es 1)

a) 10 y 25 ...( )	**k)** 11 y 12 ...( )
b) 6 y 18 ...( )	**l)** 14 y 35 ...( )
c) 8 y 15 ...( )	**m)** 100 y 60 ...( )
d) 24 y 36 ...( )	**n)** 75 y 125 ...( )
e) 40 y 100 ...( )	**o)** 48 y 72 ...( )
f) 8 y 27 ...( )	**p)** 85 y 68 ...( )
g) 8 y 18 ...( )	**q)** 45 y 36 ...( )
h) 15 y 25 ...( )	**r)** 90 y 120 ...( )
i) 6 y 8 ...( )	**s)** 150 y 270 ...( )
j) 12 y 16 ...( )	**t)** 450 y 360 ...( )

Ejercicio 2: Halle el máximo común divisor (M.C.D) de:

a) 18 y 16 ...( )
b) 28 y 35 ...( )
c) 80 y 256 ...( )
d) 240; 360 y 480 ...( )
e) 135 y 245 ...( )
f) 272 y 288 ...( )
g) 144 y 504 ...( )
h) 950; 425 y 800 ...( )
i) 560 y 320 ...( )
j) 120; 72 y 96 ...( )
k) 1 200; 1 800 y 2 200 ...( )
l) 294; 98; 392 y 1 176 ...( )

Ejercicio 3: ¿Cuál es el mayor número que puede dividir a la vez a 612; 2 040 y 8 976?

Ejercicio 4: Una madre distribuye exactamente por partes iguales entre sus hijos: 90 caramelos y 75 chocolates. ¿Qué número de cada cosa corresponde a cada uno de ellos?

Ejercicio 5: Hallar el M.C.D. por divisiones sucesivas de los números:

a) 9 405 con 6 720
b) 9 009 con 8 613
c) 50 050 con 12 012
d) 25 con 75 y con 80
e) 124 con 144 y con 200
f) 225 con 250 y con 300

Ejercicio 6: ¿Cuál es la mayor longitud de una regla con la que se puede medir exactamente 3 cintas de 120 cm, 180 cm y 240 cm.

Ejercicio 7: Se desea dividir dos cordeles de 60 y 80 metros de longitud en trozos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada trozo resultante? ¿En cuántos trozos se divide cada cordel?

Ejercicio 8: Se tiene que envasar 120, 144 y 200 kg de plomo en tres cajas de modo que los bloques de cada una tenga el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo? ¿Cuánto caben en cada caja?

Ejercicio 9: Hallar el mayor número de niños entre los que se puede repartir, en partes iguales, 174 soles y 730 soles; sobrando 6 y 10 soles respectivamente?

Ejercicio 10: Hallar el mayor número entre el cual se puede dividir 83 y 127 obteniéndose un residuo de 3 y 7, respectivamente.

Ejercicio 11: Sara ha dado a sus tres hijos 120 soles, 480 soles y 720 soles, para repartir entre los ancianos pobres de la ciudad, de manera que los tres den a cada anciano la misma cantidad.

¿Cuál es la mayor cantidad que pueden dar a cada uno? ¿Cuántos son los ancianos beneficiados?

Ejercicio 12: La letra N representa un número entre 50 y 60. El M.C.D. de N y 16 es 8.

Ejercicio 13: El M.C.D. de A y B es 5.¿Cuál es el M.C.D. de 2A y 2B?

Ejercicio 14: Dos números tienen a 12 por M.C.D.; uno de ellos es 5 veces el otro. Halle los números.

Clave de Respuestas

1. **a)** 5 **e)** 20 **i)** 2 **m)** 20 **q)** 9
b) 6 **f)** 1 **j)** 4 **n)** 25 **r)** 30
c) 1 **g)** 2 **k)** 1 **o)** 24 **s)** 30
d) 12 **h)** 5 **l)** 7 **p)** 17 **t)** 90

2. **a)** 2 **d)** 120 **g)** 72 **j)** 24
b) 7 **e)** 5 **h)** 25 **k)** 200
c) 16 **f)** 16 **i)** 80 **l)** 98

3. 204

4. 6 caramelos y 5 chocolates

5. **a)** 15 **b)** 99 **c)** 2 002 **d)** 5 **e)** 4 **f)** 25

6. 60 cm

7. Longitud de cada trozo = 20 m; cada codel se divide en 3 y 4 partes.

8. Peso de cada pedazo = 8 Kg.

9. 24 niños

10. 40

11. S/. 120 ; 11 ancianos

12. 56

13. 10

14. 12 y 60

3.5 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE NÚMEROS NATURALES. MÉTODOS DE CÁLCULO

3.5.1 EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números es el menor número (distinto de cero) que es múltiplo común de ambos números. Este concepto se aplica, en la Suma o Resta de números racionales, al tener que buscar un Denominador Común para dos o más fracciones.

Ejemplo: $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$

A. Podemos tomar como denominador común a 48, este número contiene a los números 6 y 8.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{8}{48}+\frac{6}{48}=\frac{14}{48}$$

B. Podemos tomar como denominador común a 24, este número contiene a los números 6 y 8.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{4}{24}+\frac{3}{24}=\frac{7}{24}$$

En el ejemplo A; no tomamos el mínimo común denominador (m.c.d.)

En el ejemplo B; se tomó el m.c.d. el trabajo de sumar y restar números racionales se simplifica muchas veces al tomar como denominador común el m.c.d. para hallarlo, se busca el m.c.m. de los denominadores.

1) Múltiplos de (6) ➠ P = { (0), 6 , 12 , 18 , (24), 30 , 36 , 42 ,(48)..}

2) Múltiplos de (8) ➠ Q = { (0), 8 , 16 , (24), 32 , 40 ,(48), 56 ...}

3) Múltiplos comunes de 6 y 8 diferentes de cero son: $P \cap Q$ = { (24); (48), ... }

Luego: El m.c.m. de 6 y 8 es 24

Quizás sea más fácil escribir la lista de los múltiplos del número mayor hasta llegar a uno que sea también múltiplo del número menor.

Ejemplos: Hallar el m.c.m. de 6 y 4.

Múltiplos de 6 ➠ { 0 , 6 , (12) }

Este es también múltiplo de 4.

∴ El m.c.m. de 6 y 4 es (12)

3.5.2 MÉTODOS PARA CALCULAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.) DE DOS O MÁS NÚMEROS

a) Por Factorización en sus Factores Primos:

El m.c.m. de dos o más números factorizados en sus factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente.

Ejemplo 1 : Hallar el m.c.m. de: 160 y 240.

Resolución:

Factorizamos cada número dado en sus factores primos asi:

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$160 = 2^5 \times 5$

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

De donde: $160 = (2)^5 \times (5)$

$240 = (2)^4 \times (3) \times (5)$

m.c.m. (160 y 240) = $2^5 \times 5 \times 3 = 32 \times 15$ = **480**

Ejemplo 2 : Hallar el m.c.m. de: 40, 60 y 80.

Resolución:

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40 = 2^3 \times 5$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$80 = 2^4 \times 5$

De donde:

$40 = 2^3 \times 5$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$80 = 2^4 \times 5$

m.c.m. (40, 60 y 80) = $2^4 \times 5 \times 3 = 16 \times 15 =$ **240**

b) Método Abreviado Para Hallar el M.C.M.

Este método abreviado consiste en dividir cada uno de los números por el menor divisor primo posible, hasta que los cocientes sean igual a la unidad.

Ejemplo 1 : Hallar el m.c.m. de: 42 y 56.

Resolución:

42 - 56	2	Dividimos entre 2 ó sacamos mitad de 42 y 56
21 - 28	2	Dividimos entre 2 ó sacamos mitad de 28
21 - 14	2	Dividimos entre 2 ó sacamos mitad de 14
21 - 7	3	Dividimos entre 3 ó sacamos tercia a 21
7 - 7	7	Dividimos entre 7 ó sacamos sétima al 7
1 - 1		

Luego: El m.c.m. de 42 y 56 es: $2^3 \times 3 \times 7 = 8 \times 21 =$ **168**

Ejemplo 2 : Hallar el m.c.m. de: 60, 70 y 72.

Resolución:

60 - 70 - 72	2	dividimos entre 2 a 60, 70 y 72
30 - 35 - 36	2	dividimos entre 2 a 30 y 36
15 - 35 - 18	2	dividimos entre 2 al 18
15 - 35 - 9	3	dividimos entre 3 al 15 y 9
5 - 35 - 3	3	dividimos entre 3 al 3
5 - 35 - 1	5	dividimos entre 5 al 5 y 35
1 - 7 - 1	7	dividimos entre 7 al 7
1 - 1 - 1		

Luego:

El m.c.m. de (60 , 70 , 72) es:

$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 =$ **2 520**

c) Por el Máximo Común Divisor (M.C.D):

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números es igual a su producto dividido entre su máximo común divisor (M.C.D.).

Ejemplo 1: Halla el m.c.m. de: 70 y 84

Resolución:

Primero , hallamos el M.C.D. de 70 y 84, por medio de divisiones sucesivas, asi:

	1	5
84	70	(14)
14	0	

- El M.C.D. de 70 y 84 es: (14)

Luego: $$\text{m. c. m.} = \frac{\text{Producto de dos números}}{\text{M. C. D. de dichos números}}$$

De donde: $$\text{m.c.m.} = \frac{\cancel{84} \times 70}{\cancel{14}} = 6 \times 70 = 420 \Rightarrow \therefore$$ m.c.m (70 y 84) = 420

Ejemplo 2: Hallar el m.c.m. de 36 y 48.

Resolución:

Primero hallamos el M.C.D. de 36 y 48; por medio divisiones sucesivas, asi:

	1	3
48	36	(12)
12	0	

- El M.C.D. de 36 y 48 es: (12)

Luego: $$\text{M. C. M.} = \frac{\cancel{36} \times 48}{\cancel{12}} = 3 \times 48 = 144$$

$\therefore$ m.c.m (36 y 48) = 144

3.5.3 APLICACIONES AL CÁLCULO DE FRACCIONES

***I) Mínimo Común Denominador**: Para reducir fracciones a mínimo común denominador (m.c.d.), se toma como tal el m.c.m. de los denominadores y se multiplica cada mumerador por el cociente de dividir el denominador común por el denominador respectivo.*

Ejemplo 1: Sean las fracciones: $\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{4}{9}$

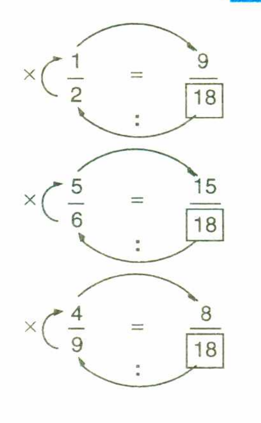
El m.c.m. de los denominadores es:

2 - 6 - 9	2
1 - 3 - 9	3
1 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

m.c.m (2 , 6 y 9) = 2 × 3 × 3 = **18**

∴ El denominador común de las fracciones es: 18

Luego:



$$\frac{1}{2} = \frac{9}{18} \qquad \frac{5}{6} = \frac{15}{18} \qquad \frac{4}{9} = \frac{8}{18}$$

$$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{4}{9} = \frac{9}{18}\ ;\ \frac{15}{18}\ ;\ \frac{8}{18}$$

Ejemplo 2: Sean las fracciones: $\frac{3}{4};\ \frac{7}{8};\ \frac{5}{12}$

El m.c.m. de los denominadores es:

4 - 8 - 12	2
2 - 4 - 6	2
1 - 2 - 3	2
1 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

m.c.m (4 , 8 y 12) = 2 × 2 × 2 × 3 = **24**

∴ El denominador común de las fracciones es: 24

Luego:

$$\frac{3}{4} = \frac{18}{24} \qquad \frac{7}{8} = \frac{21}{24} \qquad \frac{5}{12} = \frac{10}{24}$$

$$\frac{3}{4}\ ;\ \frac{7}{8}\ ;\ \frac{5}{12} = \frac{18}{24}\ ;\ \frac{21}{24}\ ;\ \frac{10}{24}$$

***II) Fracciones Irreductibles**: Una fracción es irreductible si su númerador y su denominador son primos entre si:*

***Ejemplo**:* $\frac{4}{7}$ ➡ Es una fracción irreductible porque 4 y 7 son números primos entre si o primos relativos porque tienen como divisor común a la unidad.

$\frac{5}{9}$; $\frac{11}{16}$; $\frac{24}{5}$ ➡ son fracciones irreductibles

***III) Simplificar una Fracción**: Significa hallar la fracción irreductible equivalente a la fracción dada.*

Ejemplo 1 : Simplificar la fracción: $\frac{8}{24}$

***Resolución**:*

$\frac{8}{24}$ — sacamos mitad a cada término ➡ $\frac{\not{8}}{\not{24}} = \frac{4}{12}$

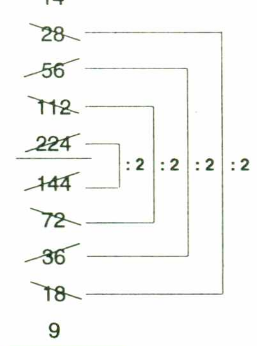
$\frac{4}{12}$ — sacamos mitad a cada término ➡ $\frac{\not{4}}{\not{12}} = \frac{2}{6}$

$\frac{2}{6}$ — sacamos mitad a cada término ➡ $\frac{\not{2}}{\not{6}} = \frac{1}{3}$

Luego : $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 2 : Simplificar : $\frac{224}{144}$

Resolución :



Luego : $\frac{244}{144} = \frac{14}{9}$

Ejemplo 3 : Simplificar : $\frac{70}{56}$

Resolución :

$\frac{\not{70}}{\not{56}}$ → $\frac{\not{35}}{\not{28}}$ (: 2) → $\frac{5}{4}$ (: 7)

Luego : $\frac{70}{56} = \frac{5}{4}$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)

Problema 1 : Las edades de Manuel y la de su hija están comprendidas entre 23 y 49 años y son a la vez divisibles por 8 y 12. ¿Qué edad tiene cada uno?

Resolución:

En este caso la edad del menor debe ser múltiplo de 8 y 12, osea hallamos el m.c.m. de 8 y 12.

8 - 12	2
4 - 6	2
2 - 3	2
1 - 3	3
1 - 1	

m.c.m (8 y 12) = $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ (es la edad de la hija).

- Pués el número 24 está entre el 23 y 49 cumpliéndose así las condiciones del problema.

  Ahora, multiplicamos el 24 por un número tal que el resultado sea menor que 49, siendo este número el 2, veamos: $24 \times 2 = 48$ (es menor que 49).

Rpta. La edad de Manuel es 48 años y la de su hija 24 años.

Problema 2 : ¿Qué números menores de 90 y diferentes de 0 son divisibles a la vez por 2, 4 y 6?

Resolución:

En primer lugar, hallamos el m.c.m. de 2 , 4 y 6.

2 - 4 - 6	2
1 - 2 - 3	2
1 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

m.c.m (2 , 4 y 6) = $2 \times 2 \times 3 = 12$

éste es el menor de los números pedidos

Ahora multiplicamos el 12 , por ciertos números naturales tal que los resultados sean menores de 90 así:

$12 \times 1 = 12$	$12 \times 3 = 36$	$12 \times 5 = 60$	$12 \times 7 = 84$
$12 \times 2 = 24$	$12 \times 4 = 48$	$12 \times 6 = 72$	$12 \times 8 = 96$

De este conjunto de números el único que no cumple con la condición es 96, pues este número es mayor que 90.

Rpta. Los números menores de 90 que son múltiplos de 2, 4 y 6 son: 12, 24, 36, 48, 60, 72 y 84.

Problema 3: ¿Cuál es el menor número de caramelos que se puede repartir simultaneamente entre 15 y 20 niñas para que en cada caso una niña reciba una cantidad exacta? ¿Cuántos caramelos recibe una niña en cada caso?

Resolución:

Para saber cuál es el menor número de caramelos a repartir, hallamos el m.c.m(15 y 20)

15 - 20	2
15 - 10	2
15 - 5	3
5 - 5	5
1 - 1	

m.c.m (15 y 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 =$ (60)

Luego: En el primer caso 1 niña recibe: $\frac{60}{15} = 4$ caramelos

En el segundo caso 1 niña recibe: $\frac{60}{20} = 3$ caramelos

Rpta. El menor número de caramelos que se puede repartir es 60 caramelos y cada niña recibe 4 y 3 caramelos.

Problema 4: Tres amigos parten regularmente de la misma ciudad cada 8, 12 y 16 días, respectivamente. La última vez que salieron juntos fue el 16 de octubre de 1 992, con la promesa de reunirse los tres en la primera oportunidad para intercambiar información sobre las carreras profesionales a seguir. ¿En qué fecha se produce el encuentro?

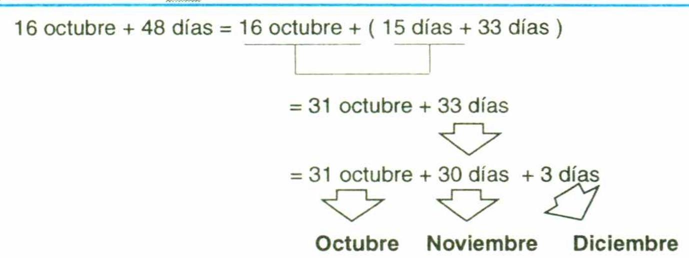
Resolución:

En primer lugar, hallamos el m.c.m. de 8 , 12 y 16.

8 - 12 - 16	2
4 - 6 - 8	2
2 - 3 - 4	2
1 - 3 - 2	2
1 - 3 - 1	3
1 - 1 - 1	

m.c.m (8, 12 y 16) = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 =$ (48)

Luego: Debemos contar 48 días a partir del 16 de octubre de 1 992, osea:



Rpta: El encuentro se produce el 3 de Diciembre de 1 992.

Problema 5: ¿Cuáles son los números mayores que 30 pero menores que 160, divisibles a la vez por 3, 10 y 15?

Resolución:

En primer lugar, hallamos el m.c.m(3 , 10 y 15).

3 - 10 - 15	2
3 - 5 - 15	3
1 - 5 - 5	5
1 - 1 - 1	

m.c.m (3 , 10 y 15) = $2 \times 3 \times 5$ = 30

- Para hallar los números pedidos multiplicamos el número 30 por k obteniendo: 30 k, donde "k" tomará valores consecutivos a partir de 1, y asi hallaremos los números pedidos:

Cuando: k = 1 ; 30k = 30×1 = 30 } *(Este número no cumple con la condición)*

Cuando: k = 2 ; 30k = 30×2 = 60

Cuando: k = 3 ; 30k = 30×3 = 90

Cuando: k = 4 ; 30k = 30×4 = 120

Cuando: k = 5 ; 30k = 30×5 = 150

(Estos números si cumplen con la condición del problema)

Rpta. Los números mayores que 30 pero menores que 160 divisibles por 3, 10 y 15 son: 60, 90, 120 y 150.

Problema 6: Un niño cuenta sus bolitas, la primera por grupos de 3, la segunda por grupos de 4 y finalmente por grupos de 8, y siempre le quedan 2 sin contar. ¿Cuántas bolitas tiene, sabiendo que no llegan a 100 pero pesan las 90?

Resolución:

Este tipo de problema se plantean, así:

Sea el número de bolitas en total = N

i) N = 3k + 2
ii) N = 4k + 2
iii) N = 8k + 2

⇒ N = m.c.m (3 , 4 y 8) × k + 2 .... (1)

Ahora, hallamos el m.c.m. de: (3, 4 y 8)

3 - 4 - 8	2
3 - 2 - 4	2
3 - 1 - 2	2
3 - 1 - 1	3
1 - 1 - 1	

m.c.m (3, 4 y 8) = 2 × 2 × 2 × 3 = 24 ...(2)

Reemplazamos (2) en (1); obteniendo: N = 24k + 2 ; Damos valores consecutivos a "k" a partir 1.

Cuando: k = 1 ⇒ N = 24 (1) + 2 = 26 . . . . (No cumple)

Cuando: k = 2 ⇒ N = 24 (2) + 2 = 50 . . . . (No cumple)

Cuando: k = 3 ⇒ N = 24 (3) + 2 = 74 . . . . (No cumple)

Cuando: k = 4 ⇒ N = 24 (4) + 2 = 98 . . . . (Sí cumple)

Cuando: k = 5 ⇒ N = 24 (5) + 2 = 122 . . . . (No cumple por ser mayor que 100)

Rpta. El número de bolitas que tiene el niño son: 98.

Problema 7: En una competencia automovilistica de circuito cerrado, tres automoviles arrancan juntos. Si tardan 10, 12 y 15 minutos en dar una vuelta completa. ¿Al cabo de que tiempo pasarán juntos por la linea de partida? ¿Cuántas vueltas habian dado cada uno en ese tiempo?

Resolución:

Para saber al cabo de que tiempo pasarán juntos por la linea de partida; hallamos el m.c.m (10 , 12 y 15)

10 - 12 - 15	2
5 - 6 - 15	2
5 - 3 - 15	3
5 - 1 - 5	5
1 - 1 - 1	

m.c.m (10 , 12 y 15) = 2 × 2 × 3 × 5 = 60

Luego: Diremos que al cabo de 60 minutos (1 hora) pasarán juntos por la **Línea de Partida.**

Ahora, hallamos el número de vueltas que ha dado cada uno:

El primero dá: $\frac{60}{10}$ = 6 vueltas | **El segundo** dá: $\frac{60}{12}$ = 5 vueltas | **El tercero** dá: $\frac{60}{15}$ = 4 vueltas

Rpta. Al cabo de 60 minutos = 1 hora, pasarán juntos por la línea de partida.
El número de vueltas que dá cada uno es: 6, 5 y 4 respectivamente.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 26

Ejercicio 1 : Calcular el M.C.M. de:

18 ; 30 ; 40 y 12

Resolución:

Rpta. 360

Ejercicio 2 : Calcular el M.C.M de:

18 ; 45 ; 60 y 72

Resolución:

Rpta. 360

Ejercicio 3 : Si:

$A = 2^3 \times 5^2 \times 3 \times 7$ y $B = 2^2 \times 5 \times 3^2$

Calcular el M.C.M y M.C.D de A y B.

Resolución:

Rpta. 12 600 y 60

Ejercicio 4 : Si:

$A = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ y $B = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Calcular el M.C.M y el M. C. D. de A y B

Resolución:

Rpta. 44 100 y 210

Ejercicio 5 : Hallar el M.C.M de:

900 y 1 260

(sugerencia)

$$M.C.M = \frac{\text{Producto de dos números}}{\text{M.C.D. de dichos números}}$$

Resolución:

Rpta. 6 300

Ejercicio 6 : Hallar el M.C.M. de: 243 y 162.

(sugerencia)

$$M.C.M = \frac{\text{Producto de dos números}}{\text{M.C.D de dichos números}}$$

Resolución:

Rpta. 486

Ejercicio 7 : ¿Cuál es el menor número posible que dividido por 132; 450 y 342 da en cada caso un resto de 5?

Resolución:

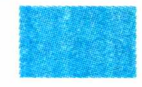
Rpta. 188 105

Ejercicio 8 : Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 segundos y 54 segundos, respectivamente. A las 20 h 15 min se encienden simultáneamente. ¿A qué hora vuelven a encontrarse juntos?

Resolución:

Rpta. 20 h 21 min 18 s

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)



NIVEL I

Ejercicio 1:

a) Enumere los múltiplos de 3, hasta el 48.
b) Enumere los múltiplos de 4, hasta el 48.
c) ¿Cuales son los múltiplos comunes de 3 y 4 hasta el 48?
d) Busque el m.c.m. de 3 y 4

Ejercicio 2: Para cada par de números, halle los primeros seís múltiplos, que no sean cero, de cada número. Luego busque el m.c.m. de los dos números.

Ejemplo: Halle el m.c.m. de: 2 y 5.

Resolución:

Múltiplos de 2 = { 2 , 4 , 8 , 10 ; . . . . . }

Múltiplos de 5 = { 5 , 10 , 15 , 20 ; . . . . . }

El m.c.m. (2 y 5) es 10

a) 2 y 4	**e)** 4 y 5	**h)** 8 y 13
b) 4 y 6	**f)** 3 y 9	**i)** 3 y 12
c) 3 y 7	**g)** 7 y 11	**j)** 5 y 8
d) 6 y 9		

Ejercicio 3:

a) Enumere los múltiplos de 3 que son menores que 37.
b) Enumere los múltiplos de 5 que son menores que 37.
c) Enumere los múltiplos comunes de 3 y 5 menores que 37.
d) ¿Cuál es el m.c.m de 3 y 5?

Ejercicio 4: Para cada par de números, halle el m.c.m., buscando el menor múltiplo del número mayor que sea también múltiplo del número menor.

Ejemplo: Halle el m.c.m. de 8 y 10

Resolución:

Los múltiplos de 10 son: { 10 , 20 , 30 , 40 .... }

40 es también un múltiplo de 8

Luego: m.c.m. de (8 y 10) es. 40

a) 2 y 7	**e)** 4 y 10	**i)** 12 y 15
b) 6 y 12	**f)** 6 y 9	**j)** 16 y 24
c) 3 y 8	**g)** 7 y 10	**k)** 40 y 60
d) 5 y 6	**h)** 10 y 11	**l)** 120 y 150

Ejercicio 5: ¿Qué denominador común escogería para cada una de estas sumas?

Ahora, piense en el m.c.m. de los denominadores (El m.c.d.).

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=$ **e)** $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$

b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=$ **f)** $\frac{3}{16}+\frac{5}{8}=$

c) $\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=$ **g)** $\frac{1}{16}+\frac{7}{12}=$

d) $\frac{3}{8}+\frac{7}{10}=$ **h)** $\frac{4}{15}+\frac{3}{20}=$

Ejercicio 6: Determine si hay un número primo que sea:

a) Múltiplo de 2 **b)** Múltiplo de 3
c) múltiplo de 6

Ejercicio 7: Halle el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de:

a) 8 ; 15 y 24	**b)** 16 ; 42 y 56
c) 42 ; 63 y 70	**d)** 40 ; 70 y 84
e) 60 ; 81 y 90	**f)** 70 ; 130 y 190
g) 504 ; 756 y 1 260	**h)** 3 168 ; 4 896 y 6 048
i) 84 ; 616 ; 539 y 1 125	

Ejercicio 8 : Halle el mínimo común múltiplo (m.c.m), por divisiones sucesivas de:

a) 160 y 240	**d)** 720 y 960
b) 400 y 540	**e)** 540 y 600
c) 800 y 1 200	**f)** 1 840 y 3 680

Ejercicio 9 : ¿Cuál es el menor número diferente de cero, divisible a la vez entre 3, 5 y 7?

Ejercicio 10 : ¿Cuál es el menor número, diferente de cero, divisible a la vez por 6, 8 y 10?

Ejercicio 11 : ¿Qué números menores de 70, son divisibles a la vez por 2, 3 y 4?

Ejercicio 12 : ¿Cuáles son los **n** números naturales entre 500 y 1 000 que sean divisibles por 36 y 84 simultaneamente?

Ejercicio 13 : Tres compañias de navegación pasan por cierto puerto. La primera cada 8 días; la segunda cada 18 días y la tercera cada 21 días. ¿Cada cuántos días se hallan los buques de las tres compañias simultaneamente en este puerto?

Ejercicio 14 : Una canasta está llena de huevos. Contiene un número exacto de docenas y también de decenas. ¿Cuántos huevos contiene, sabiendo que el número está comprendido entre 300 y 400?

Ejercicio 15 : Dos ciclistas dan vueltas en una pista. El primero cada 48 segundos y el segundo cada 64 segundos, si salen juntos. ¿Al cabo de cuánto tiempo pasaron por el sitio de partida? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?

Ejercicio 16 : Hallar la menor cantidad de soles que hay que repartir entre 5, 6, 9 y 13 niños, de tal manera que en cada caso sobren 4 soles.

Ejercicio 17 : ¿Cuál es la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla de 30 cm, 40 cm ó de 50 cm.

Ejercicio 18 : ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que necesito para comprar un número exacto de camisas cuyos costos son de: 30 soles, 45 soles y de 50 soles, si deseo que en cada caso sobre 5 soles para mis pasajes?

Ejercicio 19 : Un tren sale cada 5 horas, otro tren sale cada 3 horas, han salido al mismo tiempo, a las 9 de la mañana. ¿Cuándo volverán a coincidir?

Ejercicio 20 : Una puerta se abre cada 20 segundos, otra cada 12 segundos y una tercera cada 30 segundos, si se abren simultáneamente a las 12 del día. ¿A qué hora volverán a abrirse simultaneamente?

Ejercicio 21 : Halle el M.C.D. y el m.c.m. de 18 y 24 ; comparar el producto de los dos resultados con el producto de los dos números. Generalizar.

Clave de Respuestas

7. **a)** 120 **d)** 840 **g)** 7 560
b) 336 **e)** 1 620 **h)** 1 130 976
c) 630 **f)** 17 290 **i)** 4 851 000

8. **a)** 480 **c)** 2 400 **e)** 5 400
b) 10 800 **d)** 2 880 **f)** 3 680

9. 105 **10.** 120

11. 12; 24 ; 36 ; 48 y 60 **12.** 504 y 756

13. 504 días **14.** 360 huevos

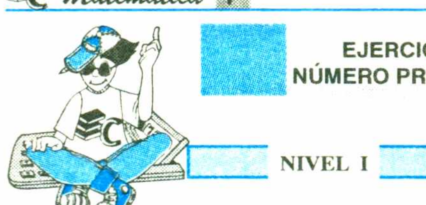
15. Pasarán juntos al cabo de 192 S y cada uno dá 4 y 3 vueltas.

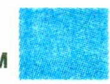
16. 1 174 **17.** 600 cm

18. 455 soles **19.** 12 de la noche

20. 12 del día con 1 minuto

21. 6 y 72





EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE NÚMERO PRIMO - DIVISIBILIDAD - M.C.D Y M.C.M

NIVEL I

Ejercicio 1: Si: "n" es un número impar en las expresiones:

I. $n^2 + n + 1$ **II.** $2n + 1$
III. $3n + 1$ ¿Cuáles son impares?

A) I y II **B)** I y III **C)** II y III
D) I, II y III **E)** Sólo III

Ejercicio 2: Si: "n" es un número par en las expresiones:

I. $n^3 + n + 2$ **II.** $2n^2 + 1$
III. $6n + 3$ ¿Cuáles son impares?

A) I y II **B)** I y III **C)** II y III
D) I, II y III **E)** Sólo II

Ejercicio 3: De los siguientes conjuntos:

A = {3 ; 5 , 12 ; 13} ; B = {6 ; 7 ; 19}
C = {15 ; 28 ; 31}. ¿Cuáles contienen números que son primos entre si?

A) A y B **B)** B y C **C)** C solamente
D) A ; B y C **E)** Ninguno

Ejercicio 4: Del 1 al 50, incluyendo a estos números. ¿Cuántos no son primos?

A) 15 **B)** 25 **C)** 34 **D)** 32 **E)** 36

Ejercicio 5: Los números 547 ✻ 3 y 32 ⊛ 21 son múltiplos de 9.
Entonces hallar: 547 ✻ 3 - 32 ⊛ 21

A) 13 152 **B)** 10 215 **C)** 22 662
D) 10 212 **E)** 6 293

Ejercicio 6: El primer múltiplo de 8 que antecede a 315 es:

A) 314 **B)** 310 **C)** 312 **D)** 308 **E)** 313

Ejercicio 7: a y b son enteros tales que "a - b" es un múltiplo de 5. ¿Cuál de los siguientes también es múltiplo de 5?

A) a **B)** b **C)** a + b **D)** b - a **E)** ab

Ejercicio 8: ¿Cuántos factores del número $N = 2^2 . 3 . 5^3$ son múltiplos de 100?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres
D) Cuatro **E)** Ninguno

Ejercicio 9: De las siguientes afirmaciones:

I. 2 853 es divisible por 9.
II. 2 488 es divisible por 8
III. 3 360 es divisible por 5 ; 6 y 7
son verdaderas:

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** I y II
D) II y III **E)** I, II y III

Ejercicio 10: La descomposición de 72 en sus factores primos es:

A) $8 . 9$ **B)** $6^2 . 2$ **C)** $2^2 . 18$
D) $6^2 + 6^2$ **E)** $2^3 . 3^2$

Ejercicio 11: ¿Cuántos números de 3 cifras son múltiplos de 25?

A) 27 **B)** 36 **C)** 25 **D)** 49 **E)** 39

Ejercicio 12: ¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 48 y 172?

A) 16 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 21

Ejercicio 13: ¿Cuántos múltiplos de 5 hay desde el 30 hasta el 80?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

Ejercicio 14: Los alumnos de una escuela primaria pueden ser agrupados exactamente en conjuntos de 9; 12 ó 15 alumnos. ¿Cuántos hay en total si se sabe que no son más de 200?

A)150 **B)** 16' **C)** 195 **D)** 180 **E)** 215

Ejercicio 15 : ¿Cuántos divisores tiene el número 120?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

Ejercicio 16 : ¿Cuál es la menor distancia que se puede medir indistintamente utilizando una cinta métrica de 4; 10 ó 16 metros de largo?

A) 60 m **B)** 68 m **C)** 74 m **D)** 80 m **E)** 86 m

Ejercicio 17 : ¿Cuál será la mayor longitud de una medida con la que se pueden medir exactamene tres dimensiones 280; 1 120 y 1 600 metros?

A) 38 m **B)** 42 m **C)** 40m **D)** 46 m **E)** 50 m

Ejercicio 18 : N = $\overline{ab}$; es un número de dos cifras si "b" es doble de "a"; entonces "N" es siempre múltiplo de:

A) 15 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 18 **E)** N.A.

Clave de Respuestas

1.D	2. C	3. B	4. C	5. C
6. C	7. D	8. D	9. E	10. E
11. B	12. C	13. C	14. D	15. E
16. D	17. C	18. B		

NIVEL II

Ejercicio 1 : La diferencia entre un número de tres cifras y otro número obtenido escribiendo el anterior con las cifras en orden invertido, siempre es un múltiplo de:

A)19 **B)** 17 **C)** I5 **D)** 11 **E)** 13

Ejercicio 2: Hallar el M.C.D de: $A = 2^4 . 3^7 . 5 \wedge B = 2^6 . 3^2 . 7^2$
Dar como respuesta el valor de su última cifra.

A) 2 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

Ejercicio 3 : Hallar el menor número que dividido por 3 dé como residuo 1; por 5 dé 3; por 9 dé 7 y por 12 dé 10.

A) 178 **B)** 588 **C)** 322 **D)** 133 **E)** 263

Ejercicio 4: ¿Cuántos múltiplos de 17 tienen 2 cifras?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Ejercicio 5 : La suma de cifras del mínimo común múltiplo de los números 144, 256 y 225 es:

A) 18 **B)** 17 **C)** 16 **D)** 15 **E)** 14

Ejercicio 6 : La mayor cifra del M.C.D de los números 1 825; 2 625 y 3 650; es:

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

Ejercicio 7: ¿Cuántos divisores posee 180?

A) 6 **B)** 12 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 14

Ejercicio 8 : Hallar la suma de todos los números primos menores que 24.

A) 60 **B)** 70 **C)** 80 **D)** 90 **E)** 101

Ejercicio 9 : El número 2^9 . ¿Será múltiplo de 2?

A) A veces **B)** Nunca **C)** Si
D) Faltan Datos **E)** N.A.

Ejercicio 10 : Hallar: "a + b"; sabiendo que el número: $\overline{2a53b}$ es múltiplo de 56.

A) 10 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 14 **E)** 15

Ejercicio 11 : ¿Cuántos números de 2 cifras múltiplos de 7 existen tal que su C.A sea múltiplo de 3?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Ejercicio 12: Se tiene un terreno rectángular de dimensiones 120 m y 168 m se le desea dividir en parcelas cuadradas, todos iguales. Si el lado de dichas parcelas es el mayor posible sería:

A) 6 m B) 12 m C) 24 m D) 36 m E) 48 m

Ejercicio 13: ¿Cuántos factores primos contiene en su descomposición el número 510510?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Ejercicio 14: ¿Con qué cantidad de dinero, menor que 80 soles, podré comprar un exacto de manzanas de 8 soles; 12 soles y 18 soles cada una?

A) 72 soles B) 78 soles C) 82 soles
D) 70 soles E) 62 soles

Ejercicio 15: Hallar: "r" si:

$$(\overset{o}{7} + 5) - (\overset{o}{7} - 1) + (\overset{o}{7} + 3) = \overset{o}{7} + r$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Ejercicio 16: Si: $A = 8^k + 8^{k+2}$, tiene 88 divisores. ¿Cuántos divisores tiene 8k+2?

A) 27 B) 28 C) 26 D) 25 E) 64

Ejercicio 17: Una persona camina un número exacto de pasos andando 1 300; 1 600 y 2 000 c'm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

A) 110 cm B) 95 cm C) 98 cm
D) 100 cm E) 105 cm

Ejercicio 18: Si: $\overline{ab} = \overset{o}{5} + 4$ y $\overline{ba} = \overset{o}{9} + 3$; Hallar el mayor valor de ab.

A) 64 B) 69 C) 84 D) 39 E) 94

Ejercicio 19: Del 1 al 630. ¿Cuántos números múltiplos de 3 existen que no sean múltiplo de 14?

A) 200 B) 195 C) 150
D) 180 E) menos de 150

Ejercicio 20: Hallar la diferencia de 2 números naturales sabiendo que su suma es 96 y su m.c.m. es 180.

A) 30 B)12 C) 15 D) 18 E) 24

Ejercicio 21: Si el número de divisores de los números 300^n y $16 \cdot 90^n$ son iguales. Hallar "n"

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Ejercicio 22: Si el M.C.M de $A = 45 \cdot 60^n$ y $B = 45^n \cdot 60$; es igual a 12 veces su M.C.D. Hallar "n".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. A	4. C	5. A
6. E	7. D	8. E	9. C	10. C
11. B	12. C	13. C	14. A	15. B
16. B	17. D	18. C	19. B	20. E
21. A	22. B			

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. ¿Cuál es la diferencia entre 871 y el mayor múltiplo de 9 menor que 871?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

Resolución:

Sea el mayor múltiplo de 9 = 9 K

Además: 9 K < 871

$$K = \frac{871}{9} \Rightarrow \boxed{K < 96,7}$$ (El mayor valor que toma "K" es 96; $\boxed{K = 96}$)

- **Del enunciado;** se plantea:

871 - 9 K = ? ; Reemplazando por el valor de K = 96

871 - 9 (96) = 871 - 864 = $\boxed{7}$ ***Rpta. A***

2. El producto de cuatro números consecutivos siempre es múltiplo de:

A) 16 **B)** 9 **C)** 15 **D)** 10 **E)** 24

Resolución:

- Sean los cuatro números consecutivos: 1; 2; 3 y 4.

Luego: Producto de los cuatro números = 1 x 2 x 3 x 4 = $\boxed{24}$ ***Es múltiplo de 24***

- Tomemos otros cuatro números consecutivos: 2; 3; 4 y 5.

Luego: Producto de los cuatro números = 2 x 3 x 4 x 5 = $\boxed{120}$ ***Es múltiplo de 24***

- *Estimado Alumno; tu puedes tomar cualquier grupo de cuatro números consecutivos y demostrarás que siempre su producto resultará múltiplo de 24.*

∴ El producto de cuatro números consecutivos siempre es múltiplo de 24. ***Rpta. E***

3. Diga cuál es la menor cifra que debe añadirse al número 124 para que resulte un número de 4 cifras múltiplo de 3.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

Sea: "x" la menor cifra que debe añadirse al número

124 para que resulte un número de 4 cifras, osea: $\overline{124x}$
este número debe ser múltiplo de 3; osea de la forma 3K.

Luego: $\overline{124x} = 3K$ → ***Damos valores enteros a "K" a partir de 1.***

Donde: $1 + 2 + 4 + x = 3K$ → **Para: K = 1 y 2** *(No cumple)*

- **Para: K = 3**; si cumple, veamos:

$1 + 2 + 4 + x = 3\,(\mathbf{3})$

$7 + x = 9$

$\therefore$ $\boxed{x = 2}$ ***Rpta. B***

> *Nota: Estimado alumno; para que un número sea múltiplo de 3, debe cumplirse que la suma de sus cifras debe ser también un múltiplo de 3.*
>
> ***Ejemplo:*** 261 es múltiplo de 3
>
> *Veamos:*
>
> $2 + 6 + 1 = \boxed{9}$ — *Múltiplo de 3*
>
> ***Verificación:***
>
> 261 | **3**
>
> 21 87 ⇒ $261 = \overset{o}{3}$

4. ¿Por cuáles de los números 2; 3; 4; 5 son divisibles 84; 375; 136?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** Por ninguna

Resolución:

- 84 y 136, son divisibles por 2; **porque**: terminan en cifra par.
- 84 y 375, son divisibles por 3; **porque**: la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- 84 y 136; son divisible por 4; **porque**: sus dos últimas cifras forman un divisible por 4.
- 375, es divisible por 5; **porque**: termina en 5.

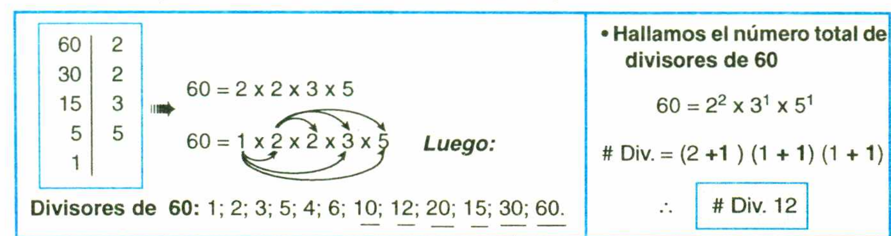
$\therefore$ 84 y 375; 136; ninguno de estos números es divisible a la vez por 2; 3; 4 y 5. ***Rpta. E***

5. ¿Cuántos divisores de dos cifras posee 60?

A) 6 **B)** 12 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 4

Resolución:

- Descomponemos el número 60; en sus factores primos:



60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$60 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ***Luego:***

Divisores de 60: 1; 2; 3; 5; 4; 6; 10; 12; 20; 15; 30; 60.

- **Hallamos el número total de divisores de 60**

$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$\#\,\text{Div.} = (2 + \mathbf{1})\,(1 + \mathbf{1})\,(1 + \mathbf{1})$

$\therefore$ $\boxed{\#\,\text{Div. } 12}$

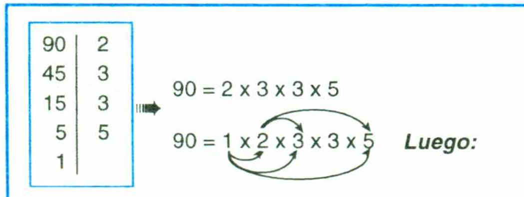
$\therefore$ Los divisores de dos cifras que posee 60 son: 10; 12; 15; 20; 30 y 60 ***Rpta. A***

6. ¿Cuántos divisores pares posee 90?

A) 8 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 12

Resolución:

- Descomponemos el número 90; en sus factores primos:



Luego:

Divisores de 90: 1; 2; 3; 5; 6; 9; 15; 18; 10; 30; 45; 90.

- **Hallamos el número total de divisores de 90.**

$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$

$\# \text{Div.} = (1 + 1)(2 + 1)(1 + 1)$

$\therefore$ # Div. 12

$\therefore$ Los divisores pares que posee 90 son: 2; 6; 10; 18; 30; y 90. ***Rpta. D***

7. El mínimo común múltiplo de dos números es 240 y su MCD es 2; si uno de los números es 16. ¿Cuál es el otro?

A) 24 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 48

Resolución:

Sea, el otro número pedido = b

- **Del enunciado:**

*) M.C.M (16; b) = 240

**) M.C.D (16; b) = 2

> ***Teorema:***
>
> *El producto de 2 números **(A y B)** es igual al producto de su máximo común divisor **(M.C.D)** por el mínimo común múltiplo **(M.C.M)** de ambos; osea:*
>
> *A x B = (M.C.D) x (M.C.M)*

Por el Teorema: $16 \times b = 240 \times 2$

$$b = \frac{240 \times 2}{16} \Rightarrow \therefore\ b = 30$$ ***Rpta***

8. De las 178 clases de matemática al año, un alumno asistió a un número de ellas que es múltiplo de 4; 12; 13. ¿A cuántas clases asistió y a cuántas clases faltó?

A) a = 153 f = 25 **B)** a = 156 f = 22 **C)** a = 149 f = 29 **D)** a = 169 f = 17 **E)** a = 155 f = 21

Resolución:

- En primer lugar hallamos el M.C.M. de 4; 12 y 13, para saber a cuántas clases asistió dicho alumno; veamos:

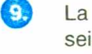
4 - 12 - 13	2
2 - 6 - 13	2
1 - 3 - 13	3
1 - 1 - 13	13
1 - 1 - 1	

M.C.M. = 2 x 2 x 3 x 13 = 156

∴ Asistió a 156 clases

- Luego, hallamos el número de clases a las que no asistió:

Clases que no asistió (faltó) = 178 - 156 = **22** *Rpta. B*



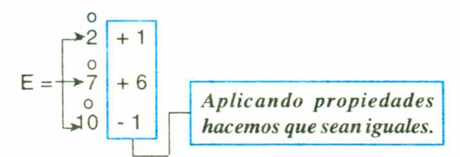
9. La edad en años que tiene un individuo es múltiplo de dos más uno; múltiplo de siete más seis y múltiplo de diez menos uno. ¿Qué edad era esa?

A) 99 **B)** 96 **C)** 69 **D)** 79 **E)** 119

Resolución:

Sea: E = Edad en años del individuo.

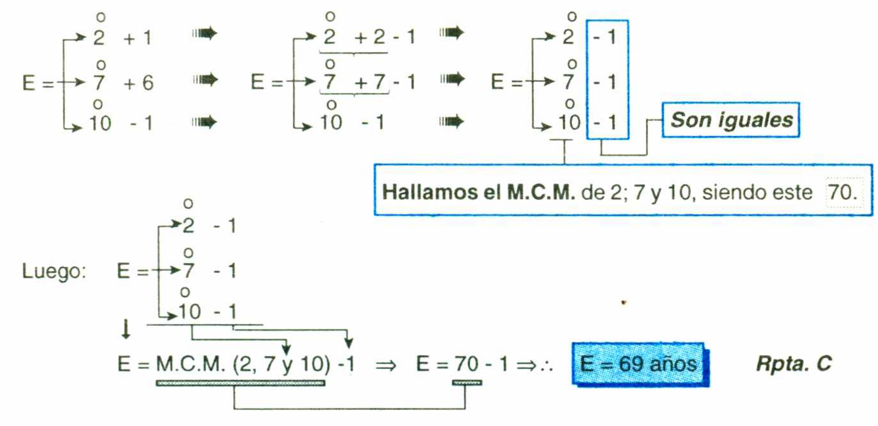
- **De acuerdo al enunciado:**



Recuerda que:

***Propiedad:** Si a un número que es múltiplo de "K" se le suma o resta otro números que también es múltiplo de "K"; el número resultante será múltiplo de "K".*

Aplicando la propiedad mencionada; obtenemos:



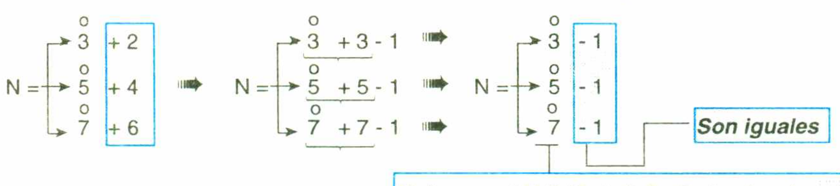
10. El número de páginas de un libro es mayor que 500 y menor que 600. Si se cuentan de 3 en 3 sobran 2, de 5 en 5 sobran 4 y de 7 en 7 sobran 6. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 512 **B)** 524 **C)** 534 **D)** 547 **E)** 564

Resolución:

Sea: N = Número de páginas que tiene el libro. (500 < N < 600)

- *De acuerdo al enunciado:*



Luego:

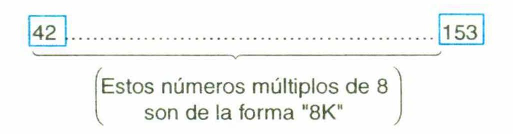
N = 3° - 1, 5° - 1, 7° - 1

N = M.C.M. (3; 5 y 7) -1 ⇒ N = 105 K - 1 ⇒ N = 105 (5) - 1 ∴ **N = 524** ***Rpta. B***

11. ¿Cuántos múltiplo de 8 hay entre 42 y 153?

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

Resolución:

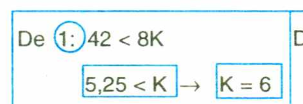


Donde: 42 < 8K < 153 (1) (2)

De (1): 42 < 8K	De (2): 8K < 153
5,25 < K → K = 6	K < 19,13 → K = 19

- Los valores que toma "K" son: (19 - 6) + 1 = 14

∴ Como "K" toma 14 valores, entonces los múltiplos de 8 que hay entre 42 y 153, también son 14. ***Rpta. C***



12. ¿Cuántos de los siguientes números son divisibles por 7?

I. 434 **II.** 343 **III.** 294 **IV.** 492

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

Resolución:

- Un número será divisible por 7 si cumple con la siguiente regla:

  - Multiplicamos cada una de las cifras del número dado de derecha a izquierda por los siguientes factores:

  .... ; -2 ; -3 ; -1 ; 2 ; 3 ; 1 ; -2 ; -3 ; -1 ; 2 ; 3 ; 1

  - Sumamos los números enteros obtenidos. Si el resultado final escero o multiplo de 7 el número dado será entonces divisible por 7.

Luego:

I. 434 ➠ 4 3 4

x **2 3 1**

(8) (9) (4)

Sumamos los números enteros hallados, se tiene:

(8)+(9)+(4)= 21; siendo 21divisible por 7.

∴ 434 ; es divisible por 7

II. 343 ➠ 3 4 3

x **2 3 1**

(6) (12) (3)

Sumamos los números enteros hallados, se tiene:

(6)+ (12) +(3)= 21; siendo 21divisible por 7.

∴ 343 ; es divisible por 7

III. 294 ➠ 2 9 4

x **2 3 1**

(4) (27) (4)

Sumamos los números enteros hallados, se tiene:

(4)+ (27) +(4)= 35; siendo 35 divisible por 7.

∴ 294 ; es divisible por 7

IV. 492 ➠ 4 9 2

x **2 3 1**

(8) (27) (2)

Sumamos los números enteros hallados, se tiene:

(8)+ (27) +(2)= 37; siendo 37 no divisible por 7.

∴ 492 ; no es divisible por 7

Si: $\overline{x4x} = \overset{o}{5}$ ∧ $\overline{\alpha 4\alpha} = \overset{o}{7}$. Hallar: $(\alpha + x)$

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

- De la expresión: $\overline{x4x} = \overset{o}{5}$; un número es múltiplo de 5 (5) cuando terminan en 0 ó en 5; pues en este caso "x" no puede tomar valor de cero puesto el número $\overline{x4x}$; no puede empezar en cero; entonces quiere decir que "x" debe tomar valor de 5.

Luego: $\overline{x4x} = 545$ ⇒ ∴ $\boxed{x = 5}$

- De la expresión: $\overline{\alpha 4 \alpha} = \overset{o}{7}$ ⇒

$$\begin{array}{cccc} & \alpha & 4 & \alpha \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \times & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 2\alpha & 12 & \alpha \end{array}$$

↳ Sumamos los números enteros hallados, se tiene:

$2\alpha + 12 + \alpha = \overset{o}{7}$ ⇒ $3\alpha + 12 = \overset{o}{7}$; **por tanto:** $\alpha = 3$

$\underbrace{3(3) + 12}_{21} = \overset{o}{7}$ **... (cumple)**

∴ $\boxed{\alpha + x = 3 + 5 = 8}$ ***Rpta. D***

14. $N = \overline{ab}$; es un número de dos cifras, si "a" es el doble de "b"; entonces "N" es siempre múltiplo de:

A) 15 **B)** 21 **C)** 14 **D)** 35 **E)** N.A.

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $N = \overline{(2b)\,b}$; descomponiendo polinómicamente, obtenemos:

$N = (2b) \,.\, 10 + b$

$N = 21\,b$

Este factor 21, nos indica que "N" siempre será múltiplo de 21. ***Rpta. B***

15. Hallar el valor de "a"; si: $\overline{9a8a7} = \overset{o}{11}$

A) 2 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 6 **E)** 7

Resolución:

$\overline{9a8a7}$ → cifras de lugar impar son: 9; 8 y 7 ⇒ **Σ cifras** = 9 + 8 + 7 = 24

$\overline{9a8a7}$ → cifras de lugar par son: "a" y "a" ⇒ **Σ cifras** = a + a = 2a

Donde: $24 - 2a = \overset{o}{\mathbf{11}}$; **pero:** $\overset{o}{11} = 11\,K$

↓

$24 - 2a = 11\,K$; damos valores a "K" a partir de cero en forma consecutiva.

Para $\boxed{K = 0}$ ⇒ $24 - 2a = 11\,(0)$

$24 = 2a$ ⇒ $\boxed{a = 12}$ (**No cumple;** pues "a" es una sola cifra)

Para $\boxed{K = 1}$ ⇒ $24 - 2a = 11(1)$ $\boxed{a = 6{,}5}$ (**No cumple** pues "a" debe ser un número entero)

Para: K = 2 ⟹ 24 - 2a = 11(2) ⟹ a = 1 **(Si cumple)**

∴ El valor que toma "a" es: 1 ***Rpta. C***

16. Hallar el valor de "K", sabiendo que el número N = 8 x 12K tiene 40 divisores.

A) 2 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

Resolución:

- Este tipo de ejercicios se resuelve de la manera siguiente:

$N = 8 \times 12^K$; descomponemos las bases 8 y 12 en sus factores primos.

$N = 2^3 \times (2^2 \times 3)^K = 2^3 \times 2^{2K} \times 3^K$

$N = 2^{3+2K} \times 3^K$

Recuerda que:

Si: $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma}$

divisores de "N" $= (\alpha+1) \cdot (\beta+1) \cdot (\gamma+1)$

Luego:

Número de divisores de "N" = [(3 + 2K) + 1] [K + 1]

40 = (2K + 4) (K + 1) ⟹ 40 = 2(K + 2) (K + 1)

20 = (K + 2) (K + 1) ⟹ 4 . 5 = (K + 1) (K + 2)

Por comparación: **i)** K + 1 = 4 ⟹ K = 3

ii) K + 2 = 5 ⟹ K = 3 ***Rpta. C***

17. Hallar: "a + b", sabiendo que el número $\overline{a1ba}$ es múltiplo de 63.

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 7

Resolución:

$\overline{a1ba} = \overset{o}{63} = \overset{o}{7} \times \overset{o}{9}$

De 1 : $\overline{a1ba} = \overset{o}{7}$; aplicando la regla de divisibilidad por 7; obtenemos:

$a(1) + b(3) + 1(2) - a(1) = \overset{o}{7}$

$3b = \overset{o}{7} - 2$; **pero:** $\overset{o}{7} = 7k$

3b = 7k - 2; damos valores a "K"

Recuerda que:

Divisibilidad por 7 : Un número es divisible por 7 si cumple con la siguiente regla: Multiplicamos cada una de las cifras del número dado de derecha a izquierda por los siguientes factores.

...; -2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1 ;-2 ; 3 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1

Sumamos los números enteros obtenidos. Si el resultado final es cero o múltiplo de 7 el número dado será entonces divisible por 7.

0 ... (No cumple)	1 ... (No cumple)	2 ... (Si cumple)

$3b = 7(2) - 2 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

De (2) : $\overline{a1ba} = \overset{o}{9}$; aplicando la regla de divisibilidad por 9; obtenemos:

$a + 1 + b + a = \overset{o}{9}$; pero: $\boxed{b = 4}$ y $\boxed{\overset{o}{9} = 9K}$

$a + 1 + 4 + a = 9K \Rightarrow 2a = 9K - 5$

0 ... (No cumple)	1 ... (Si cumple)

$2a = 9(1) - 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

Luego: $\boxed{a + b = 2 + 4 = 6}$ ***Rpta. B***

18. Hallar el valor de "k", sabiendo que el número: $N = 6 \,.\, 15^k$; tiene 112 divisores.

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Resolución:

La expresión: $N = 6 \,.\, 15^k$, se puede escribir de la manera siguiente:

$N = 3 \,.\, 2 \,.\, (3 \,.\, 5)^k = 3 \,.\, 2 \,.\, 3^k \,.\, 5^k$

Recuerda que: $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$

$N = 3^{k+1} \,.\, 2^1 \,.\, 5^k$

Luego: Número de divisores de "N" = $(k + 1 + 1) \,.\, (1 + 1) \,.\, (k + 1)$

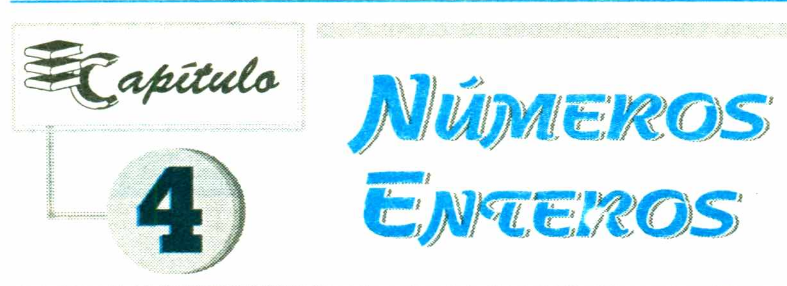
Por dato : $112 = (k + 2) \,.\, 2 \,.\, (k + 1)$

$56 = (k + 1)(k + 2)$

$7 \,.\, 8 = (k + 1)(k + 2)$

Por comparación de términos: **i)** $7 = k + 1 \Rightarrow \boxed{k = 6}$

ii) $8 = k + 2 \Rightarrow \boxed{k = 6}$ ***Rpta B***



Al estudiar los números naturales en el capítulo 1, notamos que en el conjunto de los naturales (IN) sólo estan definidos las operaciones de **Adición y Multiplicación** ya que la suma y el producto de dos números naturales también es un número natural, veamos:

$3 + 5 = 8$ y $3 \times 5 = 15$; en cambio la Sustracción y la División están parcialmente definidas en IN, puesto que la diferencia y el cociente de los números naturales no siempre es otro natural veamos:

$4 - 5 = -1$ (El resultado -1 no es un natural) y $4 : 5 = 0,8$ (El resultado no es un natural).

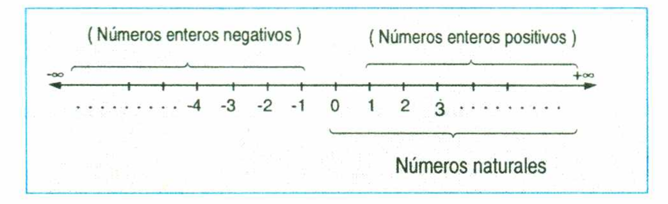
Para que estas operaciones puedan realizarse, debe ampliarse el campo de los números; por ello los matemáticos han creado nuevos números distintos de los números naturales que se llaman conjunto de los **"Numeros Enteros" ó "Conjunto $\mathbb{Z}$ "** en el cual siempre se puede hallar la diferencia de los números.

4.1 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

El conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros es el conjunto de la forma:

$$\mathbb{Z} = \{ \underbrace{\ldots, -4 ; -3 ; -2 ; -1}_{\textit{Enteros Negativos}} ; \textcircled{0} ; \underbrace{+1 ; +2 ; +3 ; +4 ; \ldots}_{\textit{Enteros Positivos}} \}$$

Cuya representación en la Recta Numérica es:



Al conjunto de los **Enteros Positivos** se denota por $\mathbb{Z}^+$, es decir:

$$\mathbb{Z}^+ = \{ +1 , +2 , +3 , +4 , \ldots \} \text{ ó } \mathbb{Z}^+ = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots \}$$

Al conjunto de los **Enteros Negativos** se denota por $\mathbb{Z}^-$, es decir: $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$

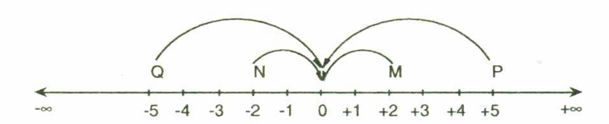
- Al conjunto de números enteros sin el cero se denomina **Conjunto de Enteros Nulos** y se simboliza por Z*, es decir:

$\mathbb{Z}^* = \{ ....; -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, ... \}$

*Nota: El número entero **Cero** no es ni positivo ni negativo.*

4.2 DISTANCIA DE UN PUNTO DE LA RECTA AL ORIGEN

- En la recta numérica, al punto que le corresponde cero se le denomina origen.



- La distancia de **P** a **0** es 5 y la distancia de **Q** a **0** es 5, es decir: La distancia de 5 a 0 es 5 y que la distancia de - 5 a 0 es 5 por esta razón se afirma que 5 y - 5 son números opuestos.

  De igual modo, diriamos que - 2 y + 2 son números opuestos, porque la distancia de - 2 a 0 es 2 y la distancia de + 2 a 0 es también 2.

*Los **Números son Opuestos** si expresan igual distancia al origen, o que la suma de dos números opuestos es Cero.*

Observación:

*En matemática en lugar de la palabra **"Opuesto"** se usa la palabra **"Negativo de"**.*

Así: - 3 es el negativo de + 3 y + 3 es el negativo de - 3

*Por lo tanto hay una gran diferencia entre el significado de un **"Número Negativo"** y el **"Negativo de un Número"**.*

Es decir: -3 es un número negativo y negativo de - 3 es + 3.

En General:

1) *El negativo de un número negativo es un número positivo.*

2) *El negativo de un número positivo es un número negativo.*

3) *El negativo de 0 es 0.*

4.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

***El Valor Absoluto** de un número es la distancia de dicho número al origen. Si "a" es el número, su valor absoluto se denota por* $|a|$*; el valor absoluto de "a". Se llama también **módulo** de **"a"**.*

Ejemplos:

$|4| = 4$; porque la distancia de 4 a 0 es 4.

$|-4| = 4$; porque la distancia de - 4 a 0 es 4.

$|35| = 35$; porque la distancia de 35 a 0 es 35

$|-17| = 17$; porque la distancia de - 17 a 0 es 17.

$|0| = 0$; porque la distancia de 0 a 0 es 0.

Luego, en **General**, decimos:

a) El valor absoluto de un número entero positivo es el mismo número.

b) El valor absoluto de un número entero negativo es su opuesto.

c) El valor absoluto de cero es cero.

Si: $a = 0$; *Entonces:* $|a| = 0 \Rightarrow |0| = 0$

Si: $a > 0$; *Entonces:* $|a| = a \Rightarrow |6| = 6$

Si: $a < 0$; *Entonces:* $|a| = -a \Rightarrow |-6| = -(-6) = 6$

OTROS EJEMPLOS:

Ejemplo 1 : Efectuar: $E = |7| - 3\,|-4| + 6\,|-3|$

Resolución:

$E = 7 - 3(4) + 6(3)$

$E = 7 - 12 + 18$ ➡ $\therefore$ **$E = 13$**

Ejemplo 2 : Efecuar: $R = |-8 + 10 - |6| + 5 - |2||$

Resolución:

$R = |-8 + 10 - (6) + 5 - (2)| = |2 - 6 + 5 - 2|$

$R = |-1|$ ➡ $\therefore$ **$R = 1$**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 27

Ejercicio 1 : En la recta numérica, ubica los números enteros: 6, -7, -2, 12 y -5.

Ejercicio 2: Escribe en los espacios libres uno de los símbolos: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$

a) $-8 \in$ ☐ **f)** $324 \in$ ☐

b) $26 \in$ ☐ **g)** $2\,726 \in$ ☐

c) $-45 \in$ ☐ **h)** $-3\,478 \in$ ☐

d) $128 \in$ ☐ **i)** $-7\,536 \in$ ☐

e) $-36 \in$ ☐

Ejercicio 3 : Completa las siguientes expresiones:

a) 36 es opuesto de ....

b) -73 es opuesto de ....

c) 87 es opuesto de ....

d) -128 es opuesto de ......

e) 325 es opuesto de ....

f) El valor absoluto de -124 es ....

g) El valor absoluto de 340 es ....

h) El valor absoluto de -73 es ....

i) El valor absoluto de 68 es ....

j) El valor absoluto de 528 es ....

Ejercicio 4: Completar las siguientes igualdades:

a) $|+87| =$

b) $|-65| =$

c) $|7+6| =$

d) $|13-5| =$

e) $|7-11| =$

f) $|16+9| =$

g) $|-12| + |+23| - |-32| =$

h) $|+48| - |-48| - |-74| =$

i) $|-8| + |-8| - |-15| =$

j) $|-6-4+3| - |5-2-6| =$

Ejercicio 5 : Halla los elementos de los siguientes conjuntos:

Ejemplo: Halle los elementos del conjunto:

$$A = \{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge -5 < x \leq 4 \}$$

Resolución:

De la expresión: $-5 < x \leq 4$, los valores que toma "x" son: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4

$$\boxed{A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}}$$

a) $P = \{ x / x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x < 13 \}$

b) $W = \{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge -9 < x < 15 \}$

c) $Q = \{ x / x \in \mathbb{Z}^- \wedge x > -8 \}$

d) $V = \{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge -6 \leq x \leq 11 \}$

e) $M = \{ x / x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \leq 9 \}$

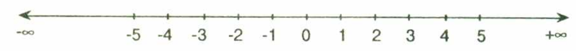
f) $T = \{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x \leq 7 \}$

g) $N = \{ x / x \in \mathbb{Z}^- \wedge x \geq -5 \}$

h) $R = \{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 10 \}$

4.4 COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

Al comparar dos números cualesquiera surgen las relaciones; menor que (<), mayor que (>), menor o igual ($\leq$), mayor o igual ($\geq$), observando la representación de los números enteros en la recta numérica.



Se deduce : * *Todo número entero es **Menor** que todos los que están a **su Derecha**.*

Ejemplos:

a)	2 es menor que 3	**d)**	- 4 es menor que 2
b)	- 3 es menor que - 2	**e)**	- 15 es menor que - 7
c)	- 1 es menor que 1	**f)**	- 124 es menor que - 81

* *Todo número **Entero** es mayor que todos los que están a su **Izquierda**.*

Ejemplos:

a)	4 es mayor que 3	**d)**	- 12 es mayor que - 36
b)	7 es mayor que - 5	**e)**	- 3 es mayor que -9
c)	- 1 es mayor que - 2	**f)**	128 es mayor que 116

En General: *Si: "a" y "b" son dos números enteros se tiene que:*

Si: $a \in Z^-$ *y* $b \in Z^+$ *; Entonces:* $a < b$

Si: $a \in Z^+$ *y* $b \in Z^+$ *; Entonces:* $a < b$ *; si:* $|a| < |b|$

Si: $a \in Z^-$ *y* $b \in Z^-$ *; Entonces:* $a < b$ *; si:* $|a| > |b|$

- Esto sucede también con los números decimales positivos y negativos, entonces:
  - Todo número negativo es menor que todo número positivo.
  - De dos números positivos es menor el que tiene menor valor absoluto.
  - De dos números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto.

4.4.1 UTILIZACIÓN DE LOS NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Los números positivos y los números negativos se utilizan para describir situaciones relacionadas con:

Temperatura:
- Sobre 0° (números positivos)
- Bajo 0° (números negativos).

Ganancias y Pérdidas:
- Ganancias (números positivos) y
- Pérdidas (números negativos)

Años de Antiguedad:
- Después de cristo (números positivos)
- Antes de cristo (números negativos)

Distancia con Respecto a un Punto: Hacia la Derecha, hacia el Norte (números positivos) y Hacia la Izquierda, hacia el Sur (números negativos).

TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

Ejercicio 1 : Completar con los símbolos: = ; < ó >, según corresponde en cada uno de los siguientes casos:

a) - 6 ____ 6

b) - 3 ____ - 7

c) 9 ____ 4

d) | 5 | ____ | - 5 |

e) | - 12 | ____ 12

f) | - 7 | ____ | - 13 |

g) 20 ____ - 31

h) - 34 ____ - 43

i) - 31 ____ | - 43 |

j) | 6 | ____ | - 5 |

k) | - 5 | + | - 3 | ____ | 2 |

l) | - 13 | - 8 ____ - | 12 |

m) | - 25 | + | 9 | ____ -16

n) | - 47 | - | 26 | ____ | - 18 |

ñ) |- 4 | + |- 11| - |- 6| ____ 9

o) | 13 - |7 - 2 || ____ 8

Ejercicio 2 : Completar la siguiente tabla con los símbolos: = ; < ó >, según corresponda:

	9	-8	-15	19	-20	-43	-49	75	-124
-7									
12		>							
-18									
32									
-27					<				
52									

4.5 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$.

4.5.1 ADICIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

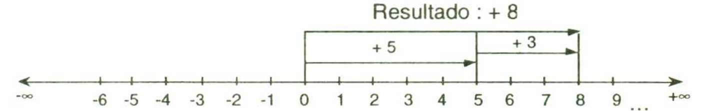
La suma de dos números positivos es otro número también positivo.

Para sumar dos números positivos se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de aquellos.

En el ejemplo de la Recta numérica nos permitirá comprender mejor todos los casos de adición de enteros. Usaremos la representación de los enteros con flechas dirigidas hacia la derecha para los enteros positivos y flechas dirigidas hacia la izquierda para los enteros negativos.

Ejemplo 1: Sumar: + 5 ; y + 3

Resolución:



La suma (+ 5) + (+ 3) = + 8; quedará representada por una flecha que parte de cero (0) y termina en + 8

Ejemplo 2: Manuel, saliendo de un punto 0, anda primero hacia el este 7 m ; luego marcha otros 3 m, en el mismo sentido. ¿A qué distancia se encontrará del origen?

Resolución:

Evidentemente se encontrará a 7m + 3m = 10 m a la derecha del punto 0. Escribiremos:

$$(+7) + (+3) = (+10)$$

Luego: $(+7)\,m + (+3)\,m = (+10)\,m$

4.5.2 ADICIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS

La suma de dos números negativos es otro también negativo. Para sumar dos números negativos se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de aquellos.

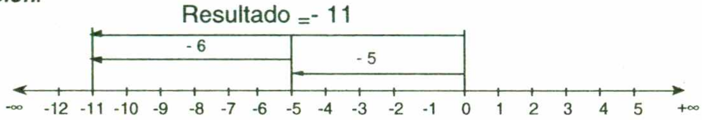
Ejemplo 1: Efectuar: **a)** $(-6) + (-3)$ y **b)** $(-12) + (-5)$

Resolución:

a) (- 6) + (- 3) = - 9	**b)** (- 12) + (- 5) = - 17

Ejemplo 2 : Sumar - 5 y - 6

Resolución:



Ejemplo 3 : Manuel camina primero hacia el oeste 7 m y a continuación 3 m en el mismo sentido. ¿A qué distancia se encuentra del origen?

Resolución:

En este caso se encontrará a 7 + 3 = 10 m a la izquierda del punto 0, que se escribirá asi:

(- 7) + (- 3) = (- 10)

- 3m - 7m
B A 0
- 10m

(- 7) m + (- 3) m = (- 10) m

4.5.3 ADICIÓN DE UN NÚMERO POSITIVO Y OTRO NEGATIVO

Para sumar un número positivo y otro negativo se restan sus valores absolutos, y se pone a la diferencia el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo 1 : Efectuar: **a)** (+ 7) + (- 5) **b)** (- 11) + (+ 2) y **c)** (+ 5) + (- 8)

Resolución:

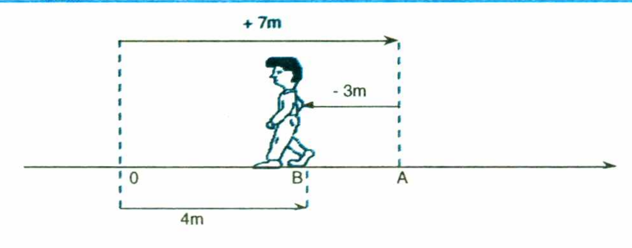
a) (+ 7) + (- 5) = + 2	**b)** (- 11) + (+ 2) = - 9	**c)** (+ 5) + (- 8) = - 3

Ejemplo 2 : Manuel marcha hacia el este 7 m y luego hacia el oeste 3 m.

Resolución:

Distará del punto de partida 7 - 3 = 4 m, a la derecha del mismo.

Osea: (+ 7) + (- 3) = (+ 4).



$$(+7)\,m + (-3)\,m = 4m$$

¿Qué se hace para Sumar dos Números Enteros?

a) *Para sumar dos números enteros del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se pone el signo común.*

***Ejemplo 1**: Sumar: (+ 6) + (+ 4)*

Sumamos los valores absolutos: $|+6| + |+4| = ?$

$6 + 4 = 10$

Luego: $(+6) + (+4) = +10$

***Ejemplo 2**: Sumar: (- 5) + (- 6)*

Sumando los valores absolutos: $|-5| + |-6| = ?$

$5 + 6 = 11$

Luego: $(-5) + (-6) = -11$

b) *Para sumar dos números de distinto signo se restan los valores absolutos y al resultado se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.*

***Ejemplo 1**: Sumar: (+ 9) + (- 4)*

Restamos sus valores absolutos: $|+9| - |-4| = ?$

$9 - 4 = 5$

El resultado hallado le ponemos el signo del sumando de mayor valor absoluto; osea el signo del 9.

Luego: $(+9) + (-4) = +5$

***Ejemplo 2**: Sumar: (- 11) + (+ 6)*

Restamos sus valores absolutos: $|-11| - |+6| = ?$

$11 - 6 = 5$

Al resultado hallado le ponemos el signo del sumando de mayor valor absoluto, osea; el signo del 11.

Luego: $(-11) + (+6) = -5$

4.5.4 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

I) *Propiedad de Clausura:*

La suma de dos números enteros siempre es un número entero.

$$\text{si: } a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Z}$$

En efecto: $-5 \in \mathbb{Z}$ y $8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-5)+(+8) = +3 \,;\, +3 \in \mathbb{Z}$

$-2 \in \mathbb{Z}$ y $-7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-2)+(-7) = -9 \,;\, -9 \in \mathbb{Z}$

II) *Propiedad Conmutativa:*

El orden de los sumandos no altera la suma.

$$\text{Si: } a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) = (b+a)$$

En efecto: $(-7)+(-11) = (-11)+(-7)$

$-18 = -18$

III) *Propiedad Asociativa:*

Se obtiene la misma suma agrupando los sumandos en formas diferentes.

$$\text{Si: } a \in \mathbb{Z} \,;\, b \in \mathbb{Z} \text{ y } c \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$$

En efecto: $(+4)+(+3)+(+2) = (+4)+(+3)+(+2)$

$[(+4)+(+3)]+(+2) = (+4)+[(+3)+(+2)]$

$[+7]+(+2) = (+4)+[+5]$

$+9 = +9$

- **Adición de Más de Dos Números Enteros**

La propiedad asociativa nos permite entender la adición a más de dos números enteros.

Ejemplo: Sumar: $(-6)+(-4)+(+12)+(-5) = ?$

$(-10)+(+12)+(-5) = ?$

$(+2)+(-5) = -3$

IV) Propiedad de Identidad Aditiva:

Para todo entero "a" existe un número entero llamado cero (0); o identidad aditiva, tal que:

$$a + 0 = 0$$

***Ejemplos**:* **a)** $(+7) + (0) = +7$ **b)** $(-4) + (0) = -4$

V) Propiedad del Inverso Aditivo o Elemento Simétrico:

Para cada entero "a" existe un único número entero llamado inverso aditivo, denotado por "-a" tal que:

$$a + (-a) = 0$$

***Ejemplos**:* **a)** $(+8) + (-8) = 0$ **b)** $(-4) + (+4) = 0$

VI) Propiedad Cancelativa:

Si en dos miembros de una igualdad hay un mismo número entero éste puede suprimirse.

Asi en: $(-7) + \cancel{(-5)} = (\cancel{-5}) + (-4) + (-3)$

Cancelando o suprimiendo el número común (-5), tenemos:

$$(-7) = (-4) + (-3)$$

Ejemplo: $(-6) + (-3) + (-4) = (-9) + (-4)$

Cancelando o suprimiendo el número común (-4), tenemos:

$$(-6) + (-3) = (-9)$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 29

Ejercicio 1: Hallar la suma de:

a) (-5) + (-13) =	**e)** (-21) + (+13) =	**i)** (-8) + (-16) + (+4) =
b) (-7) + (-11) =	**f)** (+18) + (-31) =	**j)** (-9) + (+20) + (-18) =
c) (+6) + (-16) =	**g)** (-43) + (-17) =	**k)** (-16) + (+24) + (+31) =
d) (-10) + (-15) =	**h)** (-24) + (+38) =	**l)** (- 8) + (-3) + (-11) =

Ejercicio 2: Escribe los números que faltan en las siguientes sumas:

a) 6 + ☐ = 13	**e)** 17 + ☐ = 39	**i)** -30 + ☐ = -12
b) -7 + ☐ = -4	**f)** -29 + ☐ = -10	**j)** ☐ + (-8) = 35
c) ☐ + 13 = 20	**g)** ☐ + 24 = -8	**k)** 16 + ☐ = -20
d) ☐ + (-14) = -8	**h)** ☐ + (-41) = 6	**l)** ☐ + (-13) = -27

Ejercicio 3: Anote uno de los tres símbolos siguientes (< ; = ; >) en cada una de las siguientes expresiones:

a) (-4) + (+7)..............(-2) + (+9)	**e)** (-4) + (-9) + (+13)......(-8) + (+16)
b) (+6) + (-10).............(-5) + (+1)	**f)** (-15) + (+6) + (-7)......(+3) + (-29)
c) (-13) + (-8).............(-15) + (-20)	**g)** (-13) + (-8).............(-4) + (-15) + (-2)
d) (-24) + (+31)............(+12) + (+8)	**h)** (-36) + (+4) + (-12).....(-45) + (-3)

Ejercicio 4: Completar la siguiente tabla:

a	b	c	d	e	(e + d) + a	(b + c) + a	(a + d) + e
-3	7	-2	-8	5			
6	8	4	-7	6			
9	-5	-3	-9	4			
13	16	-2	17	10			
25	31	-14	6	2			
11	-27	4	-4	5			

4.5.5 SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

La sustracción de dos números enteros A y B, llamados **Minuendo** y **Sustraendo** respectivamente, es la operación que tiene por objeto hallar otro número entero C, llamado **Diferencia**, que sumado al sustraendo B nos dé el minuendo A; osea:

$$A - B = C \Leftrightarrow B + C = A \Leftrightarrow A - C = B$$

A → *Minuendo*; B → *Sustraendo*; C → *Diferencia*

Ejemplo: Efectua: **i)** $10 - 4 = 6 \Leftrightarrow 4 + 6 = 10 \Leftrightarrow 10 - 6 = 4$

ii) $(-3) - (+5) = -8 \Leftrightarrow (+5) + (-8) = -3 \Leftrightarrow (-3) - (-8) = +5$

*** *Cálculo de la Diferencia de dos Números Enteros*:**

Para restar dos números, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos:

a) $(-3) - (+8) = (-3) + \text{op.}(+8) = (-3) + (-8) = -11$

b) $(+5) - (-9) = (+5) + \text{op.}(-9) = (+5) + (+9) = 14$

c) $(-6) - (+3) = (-6) + \text{op.}(+3) = (-6) + (-3) = -9$

d) $(-4) - (-4) = (-4) + \text{op.}(-4) = (-4) + (+4) = 0$

De este modo la sustracción de números enteros se reduce a la suma y no es operación distinta de ella.

Se vió en el capítulo 1, que la sustracción era imposible dentro del campo de los números naturales, cuando el sustraendo era mayor que el minuendo. En cambio es posible en todos los casos en el campo de los números enteros. Asi por ejemplo, la diferencia de dos números enteros será un número positivo, si el minuendo es mayor que el sustraendo, y será un número negativo en caso contrario. Precisamente la introducción de los números negativos se debió a esto: Hacer posible la sustracción en todo los casos.

Ejemplos:

a) $(+8) - (-3) = (+8) + (+3) = +11$

b) $(-10) - (-4) = (-10) + (+4) = -6$

c) $2 - 5 = 2 + (-5) = -3$

Observación: *Siempre que no se ponga signo delante de un número entero se sobreentiende que es + ; veamos: 2 = + 2*

- **Simplificación de Cálculo**: Restar un número positivo; es sumar el número negativo de igual valor absoluto, restar un número negativo es sumar el número positivo de igual valor absoluto.

Luego: En los tres ejemplos:

En lugar de escribir:	Se escribirá:
(+8) - (-3)	8 + 3
(+10) - (+4)	10 - 4
(-12) - (+15)	-12 - 15
(-12) - (-15)	-12 + 15

Mas general, en lugar de escribir, por ejemplo: $(-16) + (+11) + (-23) + (-6)$

Puede escribirse también:

$$-16 + 11 - 23 - 6$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 30

Ejercicio 1: Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) (+11) - (+7) =	**e)** (-31) - (-47) =	**i)** 13 - 27 =
b) (-6) - (+13) =	**f)** (-55) - (+30) =	**j)** (-53) - (-28) =
c) (-45) - (-35) =	**g)** (+8) - (-38) =	**k)** (-34) - (-29) =
d) 12 - 26 =	**h)** 96 - 27 =	**l)** (+21) - (-46) =

Ejercicio 2: Escribe los números que faltan en las siguientes operaciones:

a) ☐ -9 = 25	**e)** 25 - ☐ = 3	**i)** -(-13) - ☐ = 7
b) ☐ = (-13) - (+8)	**f)** ☐ - (+ 30) = - 42	**j)** ☐ - 61 = -46
c) ☐ - 13 = 19	**g)** 18 - ☐ = -5	**k)** ☐ = (+52) - (-47)
d) ☐ - (-18) = 6	**h)** ☐ = (-10) - (+7)	**l)** (- 29) - ☐ = - 45

Ejercicio 3: Anotar uno de los tres símbolos siguientes (< ; = ; >) en cada una de las siguientes expresiones:

a) (-9) - (-4)............(-3) - (+6)	**f)** (+43) - (+14)..........(-20) -(-49)
b) (+13) - (-6)...........(-14) - (-2)	**g)** (-20) - (+33)..........(+18) - (-36)
c) (-8) - (+13)...........(-7) - (+14)	**h)** (-39) - (-6)...........(+72) - (+8)
d) (-47) - (+25)..........(+15) - (-22)	**i)** (+65) - (+7)...........(-7) - (-65)
e) (-18) - (-6)...........(-9) - (+3)	**j)** (-69) - (-3)...........(+30) - (+54)

Ejercicio 4: Complete la siguiente tabla:

a	b	c	(a + b) - c	(a - b) + c	(b - c) + a
-5	4	-1			
8	-2	9			
3	-8	-2			

4.5.6 OPERACIONES COMBINADAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Para efectuar las operaciones combinadas de adición y sustracción hay que tener en cuenta la siguiente recomendación:

Recomendación:

* -(-6) = +6 ⇨ Por cada par de signos (-) resulta (+)

** -(+6) = -6
+(-6) = -6 ⇨ Por cada par de signos contrarios resulta (-)

Ejemplo 1: Efectuar: 23 - (-6) + 15 - 19 - (-12)

Resolución:

$$23 - (-6) + 15 - 19 - (-12) = 23 + 6 + 15 - 19 + 12$$

$$= 44 - 19 + 12 = 25 + 12 = \boxed{37}$$

Ejemplo 2: Efectuar : -15 - 12 + (-23) - (-4) + (-8)

Resolución:

$$-15 - 12 + (-23) - (-4) + (-8) = -15 - 12 - 23 + 4 - 8$$

$$= -50 + 4 - 8 = -46 - 8 = \boxed{-54}$$

Ejemplo 3: Efectuar: 12 - (-8) + (-13) -(-6)

Resolución:

$$12 - (-8) + (-13) - (-6) = 12 + 8 - 13 + 6$$

$$= 20 - 13 + 6 = 7 + 6 = \boxed{13}$$

4.5.7 USO Y SUPRESIÓN DE SIGNOS DE COLECCIÓN:

Además de los paréntesis ( ) que ya estamos usando, hay otros signos de agrupación como corchetes [ ] y las llaves { }.

Estos signos de agrupación se emplean para indicar que los números que encierran se les considera como un todo, o tambíen se usa para indicar operaciones entre las expresiones que encierran.

- **Supresión de Signos de Agrupación**:

Cuando en una expresión aparecen varios signos de agrupación y a veces unos dentro de otros indicando adiciones o sustracciones se les puede eliminar según las siguientes normas.

a) Se empieza la eliminación por el signo de agrupación más interior, luego se elimina otra vez el más interior que quede y asi sucesivamente hasta haber eliminado todos.

Ejemplo: Simplificar: $36 - \{ - [- (-2 - 5) + (3 - 6)] \}$

Resolución:

Simplificamos primero, reduciendo los números dentro de los paréntesis:

$= 36 - \{ - [-(-7) + (-3)] \}$

$= 36 - \{ - [+7 - 3] \}$; luego reducimos los números dentro de corchete.

$= 36 - \{ -[4] \} \quad = 36 - \{ -4 \} = 36 + 4 = \boxed{40}$

b) Si el signo de agrupación está precedido por el signo (+) entonces se elimina el signo de colección o agrupación sin cambiar de signo a los términos o números encerrados en él.

Ejemplo: Efectuar : $-11 + (-7 - 4)$

Resolución:

$= -11 + (-7 - 4)$; se elimina el paréntesis

$= -11 - 7 - 4 = \boxed{-22}$

c) Si el signo de agrupación está precedido por el signo (-) se elimina el signo de agrupación sustituyendo los términos que encierra por su respectivo opuesto.

Ejemplo: Efectuar: $- \{ 13 - [-(23 - 12) + 18] - 27 \}$

Resolución:

$= - \{ 13 - [- (23 - 12) + 18] \} -27$

cambiamos los signos de sus términos, por estar precedido del signo –, el paréntesis

$= - \{ 13 - [-23 + 12 + 18] \} - 27$

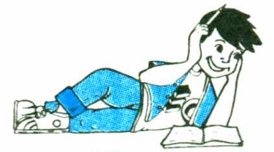
cambiamos los signos de sus términos, por estar precedido del signo –, el corchete

$= - \{ 13 + 23 - 12 -18 \} - 27$

cambiamos los signos de sus términos, por estar precedido del signo –, la llave

$= -13 - 23 + 12 + 18 - 27$

$= -36 + 3 = \boxed{-33}$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 31

Ejercicio 1: Halla el resultado de:

a) -4 + (-7) - (-13) + (-9) =	f) 36 - (-13) - (-47) + (-12) =
b) -13 - (-14) + 27 - 18 + (-38) =	g) -73 + 26 - 14 - 37 + 41 =
c) 53 - 28 + 39 - 47 + 18 =	h) 45 - (-80) + (-5) - (+6) =
d) -68 - (-4) + (-73) - 52 + 106 =	i) (-8) - (+16) - (-10) + (-40) =
e) 75 - 49 - 32 + 92 - (-18) + (-20) =	j) (-10) + (-15) - (-35) + (-14) =

Rpta. **a)** -7 **b)** -28 **c)** 35 **d)** -83 **e)** 84 **f)** 84 **g)** -57 **h)** 114 **i)** -54 **j)** -4

Ejercicio 2: Halle el resultado de:

a) (7 - 3 + 5 - 1) + (-11 + 4 -1) - (-5 - 3 + 2) =	h) - {[5 - 2 + (-8 + 1)] - [3 - (-2 - 3)]} =
b) (-12 + 8 - 2) + (6 - 7 - 9) - (-4 + 5 + 9) =	i) -46 - {-3 - [5 - 1 + 16]} - (16 - 4 + 9) =
c) [(6 - 10) + (2 - 5)] - [(7 + 3 - 5) - (8 - 11)] =	j) 27 - (5 - 14 - 12) - {14 - [- 3 - 5 + 2] - 17} =
d) [14 - (12 - 5 - 6)] + [-15 + (4 - 3)] =	k) 75 - {12 - [- 4 - (16 - 23 + 5) - 19] - 20} =
e) 16 - (4 - 5 + 7) - (9 - 6 - 1) - [16 - (4 + 7 - 3)] =	l) - 13 - {- 7 - [9 - (13 - 8) - 7]} - (27 - 14) =
f) 23 - [- (19 - 14) - 27] - 6 - {- [3 + 4 - 8] - 6}=	m) 12 - {(-13 + 9) + (-3 - (4 - 7))} - {-3 - 2 - [- (3 - 8)]} =
g) {92 - [(37 - 53) - 28]} - 83 + (3 - 9 + 4) =	

Rpta. **a)** 6 **b)** -26 **c)** -15 **d)** -1 **e)** 0 **f)** 54 **g)** 51 **h)** 12 **i)** -44 **j)** 45 **k)** 62 **l)** -22 **m)** 26

Ejercicio 3: Resuelve suprimiendo paréntesis, corchetes y llaves.

a) -6 + {7 - 4 - [- 2 + 3 - (1 + 5 - 8)]} - 9 =	g) 22 - (-4 + 3 - 1) + {-[-6 + (5 - 1) + 8] - (-8 + 3)}=
b) 7 - {-3 + 2 + [- 5 - 2 + (1 - 3 - 4)] + 7} - 1 =	h) -14 + (-7 + 3) - {- [-9 - (6 + 5 - 1)] + (4 + 3 - 8)}=
c) - {- [3 + (- 5 + 4 - 1) + 8] - 9} =	i) - (7 - 4) + {-3 + [- (6 - 5 - 2) + 9] + 8} =
d) - 9 + {- 3 - [- 4 + 3 - (- 6 - 8) + 2] + 10} =	j) -4 + {- [-3 + (5 - 1 + 6) - (8 - 9)]} + (-6 + 2 -1) =
e) - 3 - {- 4 + [- 2 + 5 + (- 6 + 7) + 9] - 8} =	k) (- 8 + 3) + {- [- (6 + 5 - 4) - (- 2 + 8)] + 9 - 3} =
f) 11 - {[7 - 3 + (- 8 + 5)] - (- 3 + 2) + 11} - 6 + (4 - 3) =	

Rpta. **a)** -15 **b)** 13 **c)** 18 **d)** -17 **e)** -20 **f)** -7 **g)** 23 **h)** -36 **i)** 12 **j)** -17 **k)** 14

4.5.8 INTRODUCCIÓN DE NÚMEROS EN SIGNOS DE AGRUPACIÓN

a) Para introducir dos o más números dentro de un paréntesis, corchetes o llaves precedidos del signo (+), se escribe dentro del signo de agrupación, los números conservando su mismo signo.

Ejemplo: Efectuar: $-5-8-13-7+9-4$

Resolución:

$$= -5-8-13-7+9-4$$
$$= -5-8+(-13-7+9)-4$$
$$= -5+[-8+(-13-7+9)]-4$$
$$= +\{-5+[-8+(-13-7+9)]-4\}$$

b) Para introducir dos o más números dentro de un paréntesis, corchetes o llaves precedidos del mismo signo (-) se escriben dentro del signo de agrupación los opuestos de dichos números.

Ejemplo: Efectuar: $-7-13-8+10-4$

Resolución:

$$= -7-13-8+10-4$$
$$= -7-13-(8-10)-4$$
$$= -7-[13+(8-10)]-4$$
$$= -\{7+[13+(8-10)]+4\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Completa las igualdades siguientes, escribiendo dentro de los signos de agrupación los opuestos de dichos números.

a) 7 - 13 - 6 - 9 = 7 - [ ] - 9	**c)** - 31 - 15 + 7 - 25 + 6 = - 31 - ( ) + 6
b) - 16 + 10 - 3 + 12 = - 16 + [ ] + 12	**d)** 63 + 13 - 26 - 29 + 45 = 63 + 13 - [ ]

2. Completa las igualdades, escribiendo dentro del paréntesis los números impares y dentro del corchete los números pares.

a) - 8 + 13 - 17 + 26 - 14 = - (   ) + [   ]

b) - 6 - 15 + 63 - 27 - 12 + 35 = - [   ] - (   )

c) 32 - 14 + 29 - 13 + 11 - 58 - 35 - 8 = - (   ) + [   ]

d) - 43 + 20 - 48 + 17 - 35 + 81 = - (   ) + [   ]

4.6 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$.

4.6.1 MULTIPLICACIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS

Representando a los números enteros en su forma abreviada, es decir, distinguiendo a los positivos de los negativos por el signo, los únicos casos que pueden presentar los signos de un producto son éstos:

$$3 \times 6 \ ; \ (-3) \times 6 \ ; \ (-3) \times (-6) \ ; \ 3 \times (-6)$$

Parece natural que el valor absoluto de los productos escritos sea 18 en todo caso, pero ¿Qué signo debemos dar al resultado? Aunque en principio parezca arbitrario; pronto veremos que la decisión más natural es la siguiente.

4.6.2 REGLA DE LOS SIGNOS

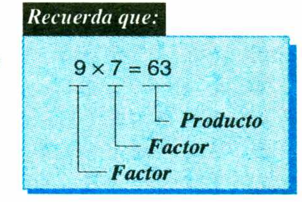
Si los dos factores tienen el mismo signo, el producto es positivo, si los dos factores son de signo contrario, el producto es negativo. Asi tenemos:

$(+) \times (+) = +$	;	$3 \times 6 = 18$
$(-) \times (-) = +$	;	$(-3) \times (-6) = 18$
$(+) \times (-) = -$	;	$3 \times (-6) = -18$
$(-) \times (+) = -$	;	$(-3) \times 6 = -18$

4.6.3 SUPRESIÓN DEL SIGNO x

Cuando los factores de un producto se representan por letras se suele omitir el signo de multiplicar.

Escribiremos pues, **ab** mejor que **a** × **b** y que **a.b**



También se suprime el signo de multiplicar cuando algún factor está en un paréntesis se escribe pues:

a (b + c) en vez de: a × (b + c)

y también: 3a + 5 en vez de: 3 × a + 5

4.6.4 PRODUCTO DE VARIOS FACTORES

Producto de varios factores es el resultado de multiplicar el primero por el segundo, el resultado por el tercero, y así sucesivamente hasta el último.

En realidad, como cada dos signos (-) da un signo (+), el cálculo se realiza de acuerdo con la siguiente regla:

El valor absoluto del producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores. El producto es positivo si el número de factores negativos es **Par,** y es negativo si el número es **Impar.**

Ejemplos:

a) $2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = 120$ ➠ (El producto es + ya que el número de factores negativos es par)

b) $(-2) \cdot (-6) \cdot 3 \cdot (-4) = -144$ ➠ (El producto es - ya que el número de factores negativos es impar)

TALLER DE EJERCICIOS Nº 32

Ejercicio 1: Hallar el resultado de las siguientes operaciones:

a) (-3) · (+8) =	**d)** (-23) . 14 =	**g)** (-324) · 13 =	**j)** (-128) . 33 =
b) (-5) · (-9) =	**e)** (-31) . (-43) =	**h)** (-128) · (-4) =	**k)** (-25) . 46 =
c) 19 . (-3) =	**f)** 125 . (-38) =	**i)** (-36) . (-45) =	**l)** (-233) . 18 =

Ejercicio 2: Escribe los números que faltan en las operaciones siguientes:

a) $11 \times \square = 132$	**e)** $-36 \times \square = -108$	**i)** $\square \times (-16) = 624$
b) $-9 \times \square = 144$	**f)** $48 \times \square = -288$	**j)** $\square \times 63 = -756$
c) $-6 \times \square = -30$	**g)** $-75 \times \square = 900$	**k)** $\square \times (-32) = 800$
d) $18 \times \square = -450$	**h)** $128 \times \square = -384$	**l)** $\square \times 85 = -1\,190$

Ejercicio 3: Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) (-3) . (-6) . (-5) . 7 =
b) 5 . (-9) . 7 . (-8) . (-3) =
c) (-6) . 4 . (-9) (-16) . 15 =
d) (-13) . (-24) . 6 . 8 . (-3) =
e) 5 . (-7) . 18 . (-11) . (-34) =
f) 17 . (-21) . (-12) . 5 . (-3) . 4 . 10 . (-6) =
g) (-32) . 12 . (-6) . (-9) . 17 . (-16) . (-3) . 2 =
h) (-8) . (-5) . 12 . 14 . (-3) (-2) . 4 =
i) 23 . 6. (-5) (-20) . 2. (-7) . (-4) . 3 =
j) (-15) . 8 . (-9) . 4. (-13) . 6 . (-5) . 2 =

Observación: *Para el ejercicio 4.*
Sabemos que: 5a significa "5 por a"
- 3b significa "- 3 por b"

Ejemplos:

Si: 3y = 6 ; El valor que toma y = 2 ;
porque: $3 \times 2 = 6$
Si: 7x = 21 ; El valor que toma x = 3
porque: $7 \times 3 = 21$
Si: - 4z = - 24 ; El valor que toma z = 6
porque: - 4 (6) = - 24
Si: - 5w = 20; El valor que toma w = - 4 ;
porque: (-5) . (-4) = 20

Ejercicio 4: Halla el valor de cada letra en cada una de las siguientes igualdades.

a) 7 x = - 28 ... x =	**g)** - 15 y = 135... y =	**l)** (-4) . 5 . (-2) . y = -120... y =
b) 4 y = 36 ... y =	**h)** - 17 x = - 119... x =	**m)** (-3) . 5 . 8 . z = 240... z =
c) - 6x = - 30... x =	**i)** 24 z = - 144... z =	**n)** 4 . (-6) w = 158... w =
d) 8 z = - 72... z =	**j)** - 18 w = 234... w =	**o)** (-3) . (-6) . (-7)x = 252... x=
e) 5 w = - 65... w =	**k)** (-2) . 3 . x =- 78... x =	**p)** (-6) . (-4) . (-2)y = -144... y =
f) -11 x = - 253... x =		

4.6.5 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

I) Propiedad de Clausura

El producto de dos números enteros cualesquiera es otro número entero.

Así: Si: $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$, entonces: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Ejemplos: Si: $3 \in \mathbb{Z}$ y $5 \in \mathbb{Z}$; entonces: $3 . 5 = 15$; $15 \in \mathbb{Z}$

$-2 \in \mathbb{Z}$ y $7 \in \mathbb{Z}$; entonces: $(-2) . 7 = -14$; $-14 \in \mathbb{Z}$

II) Propiedad Conmutativa:

El orden de los factores no altera el producto. Así:

Si: $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$, entonces: $a . b = b . a$

Ejemplos: Si: $4 \in \mathbb{Z}$ y $6 \in \mathbb{Z}$; entonces: $4 . 6 = 6 . 4$

Si: $-6 \in \mathbb{Z}$ y $3 \in \mathbb{Z}$; entonces: $(-6) . 3 = 3 . (-6)$

III) Propiedad Distributiva de la Multiplicación Respecto a la Adición:

Si: a, b y c son números enteros cualesquiera, entonces:

$a . (b + c) = a . b + a . c$

Ejemplos:

a) $3 . (5 + 2) = 3 . 5 + 3 . 2$

b) $-4 . (7 - 5) = 4 . 7 - 4 . (-5)$

c) $6 . [(-2) + (-3)] = 6 (-2) + 6 (-3)$

d) $11 (a - b + c) = 11a - 11b + 11c$

- **Sacar Factor Común**:

En la expresión: $A \times C + B \times C = C \times (A + B)$

En el primer miembro cada término contiene el factor C. En el segundo miembro, C multiplica a una suma de números enteros.

Se dice que se ha sacado **C Factor Común**, o que ha puesto la suma en forma de producto.

Ejemplos: Calcula después de haber sacado factor común:

a) $\underline{13} \times 5 + \underline{13} \times 2 - \underline{13} \times 6 = \underline{13}\ (\underline{5 + 2 - 6})$

$= \underline{13}\ (1) = \boxed{13}$

b) $12\ \underline{7} - 3 \times \underline{7} + 8 \times \underline{7} - 4 \times \underline{7} = \underline{7}\,(12 - 3 + 8 - 4)$

$= \underline{7}\,(13) = \boxed{91}$

c) $\overline{10} \times 3 - 5 \times 21 + 5 \times 41 = \underline{5} \times 2 \times 3 - \underline{5} \times 21 + \underline{5} \times 41$

$= \underline{5}\,(2 \times 3 - 21 + 41)$

$= \underline{5}\,(26) = \boxed{130}$

d) $\overline{12} \times 7 - 6 \times 9 + \overline{18} \times 2 = \underline{6} \times 2 \times 7 - \underline{6} \times 9 + \underline{6} \times 3 \times 2$

$= \underline{6}\,(2 \times 7 - 9 + 3 \times 2) = 6\,(11) = \boxed{66}$

e) $6x - 6y + 6z = 6(x - y + z)$.

IV) Propiedad Multiplicativa del 1 o Elemento Neutro o Elemento Identidad.

Para todo entero "a", existe un número entero llamado (1), o identidad multiplicativa, tal que:

$\boxed{a \,.\, 1 = a}$

Ejemplos:

a) $13 \,.\, 1 = 13$ **b)** $-7 \,.\, 1 = -7$ **c)** $12 \,.\, (-4) \,.\, 1 = 12 \,.\, (-4)$

V) Propiedad Multiplicativa del 0.

Si: a y b son números enteros cualesquiera, entonces: a . b = 0 si y sólo si al menos uno de los factores es cero.

Ejemplos:

a) $(-3) \,.\, 0 = 0$ **b)** $0 \,.\, (-7) = 0$

VI) Propiedad de Monotomía.

Si a los dos miembros de una igualdad se les multiplica por un mismo número, diferente de cero, entonces los productos también son iguales.

En General: $\boxed{\text{Si: } a = b \text{ ; entonces: } a \times c = b \times c}$

Ejemplo: Si: $3 + 7 = 10$; multiplicamos los dos miembros "×4"

$$(3 + 7) . 4 = 10 . 4$$

$$3 . 4 + 7 . 4 = 10 . 4$$

$$\boxed{40 = 40}$$

VII) *Propiedad Cancelativa.*

Si en los dos miembros de una igualdad existe un mismo factor diferente de cero, puede suprimirse dicho factor.

Ejemplo 1: Si; $6 . 13 = 13 . x$; puede cancelarse o suprimirse el factor 13.

Entonces: $\boxed{6 = x}$

Ejemplo 2: Si: $7 . y = -21$; el número $-21 = -3 . 7$

Luego: $7 . y = - 3 . 7$; cancelamos el factor 7.

Entonces: $\boxed{y = - 3}$

Ejemplo 3 : Si: $9 . x = 36$; el número: $36 = 9 . 4$

Luego: $9 . x = 9 . 4$; cancelamos el factor 9.

Entonces: $\boxed{x = 4}$

Ejemplo 4 : Si: $-3 . 4 x = 24$; el número: $24 = 3 . 4 . 2$

Luego: $-3 . 4 x = 3 . 4 . 2$; cancelamos los factores 3 . 4

Entonces: $-x = 2$ ➡ $\therefore$ $\boxed{x = -2}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 33

Ejercicio 1 : En cada una de las expresiones que siguen identifique la propiedad de la multiplicación en el conjunto de los números enteros:

a) (-3) . (-6) = (-6) . (-3) ; por propiedad ....

b) 5 . [(-3) . (-8)] = 5 . (-3) + 5 . (-8)] ; por propiedad ....

c) [(-4) + (-7)] . 1 = [(-4) + (-7)] ; por propiedad ....

d) (-11) - 9 = -99 ; por propiedad ....

e) [(-7) - (-4)] (9 . 0) = 0 ; por propiedad ....

Ejercicio 2 : En cada caso aplica la propiedad distributiva:

a) 7 (2 + 3) =	**g)** 8 (4 + 3 - 1) =	**m)** - 3 (6 - 9) =
b) -4 (-5 + 6) =	**h)** - 15 (4 + 5) =	**n)** - 6 (- 3 - 4) =
c) -9 (x + y) =	**i)** 18 (- 6 + 5) =	**o)** 2 (4x - 5y +z) =
d) 6 (7 - 3) =	**j)** 7 (- 2 + 5 - 4) =	**p)** - 5(2x + 3y - 4z) =
e) - 11 (a - b) =	**k)** - 3 (x - y + z) =	**q)** - 3 (4 - 2 + 5) =
f) - 13 (2x + y - z) =	**l)** - 6 (w + x - y) =	**r)** 6 (7 - 5 + 4) =

Ejercicio 3 : Sacar factor común a las siguientes expresiones:

a) 6 . 3 + 6 . 4 =	**e)** - 13x - 11x =	**i)** 3 . 6 + 3 . 4 - 3 . 9 =
b) 9 . 5 - 9 . 3 =	**f)** 14y - 14z =	**j)** 14x - 7y + 21z =
c) 7x + 7y =	**g)** 16x - 20y =	**k)** 3x + 9y - 12z =
d) - 6w - 6z =	**h)** 10w - 15z =	**l)** 16 . 4 - 8 . 3 + 24 . 2 =

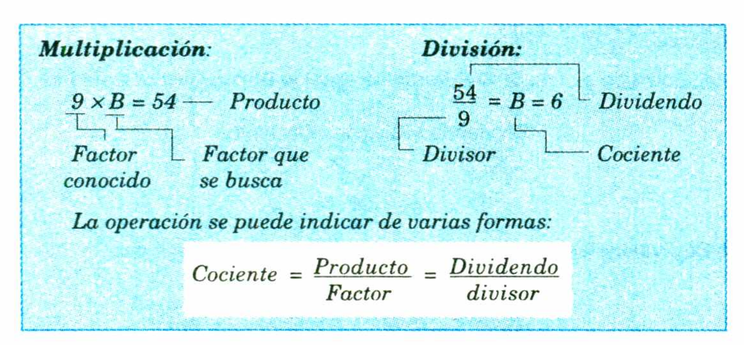
Ejercicio 4 : Efectua del modo más breve posible:

a) 148 . 12 - 148 . 9 =	**d)** 46 . 7 + 46 . 12 - 46 . 17 =
b) 263 . 23 + 263 . 17 =	**e)** 83 . 25 - 83 . 8 - 83 . 13 =
c) 548 . 56 - 548 . 46 =	**f)** 25 . 16 + 25 . 40 - 25 . 52 =

Rpta. **a)** 444 **b)** 10 520 **c)** 5 480 **d)** 92 **e)** 332 **f)** 100

4.7 DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

La división es una operación inversa de la multiplicación que tiene por objeto: "Dados dos números llamados dividendo y divisor hallar un tercer número llamado cociente, que multiplicado por el divisor dé el dividendo."
El producto se llama **Dividendo**, el factor conocido **Divisor**, y el factor que se busca **Cociente**.



El cociente de dos números es, pués el número por el cual se debe multiplicar el divisor para obtener un producto igual al dividendo.

Osea: $6 . 9 = 54$ ➡ Cociente × Divisor = Dividendo

Se expresa la división por **Dos Puntos** colocados entre el dividendo y el divisor, que se leen **Divido Por** o bien mediante una **Rayita Horizontal** encima de la cual se escribe el dividendo y debajo de ella el divisor.

Asi el cociente de 72 por 8 se escribe:

$72 : 8$ ó bien $\frac{72}{8}$; que se lee: 72 dividido o partido por 8

Observación: Asi mismo al igual que en el conjunto de los números naturales la división por cero (0) no esta definida es decir, la división de un entero por 0 no existe.

$$\frac{\text{Número}}{0} = \text{No existe} \quad ; \quad \frac{7}{0} = \nexists$$

Recuerda que: *$\exists$ significa existe; $\nexists$ significa no existe*

4.7.1 REGLA DE LOS SIGNOS

"La Regla de los Signos" de la división se deduce de la "Regla de los Signos" de la multiplicación como sigue:

(+) : (+) = +	;	14 : 2 = 7
(-) : (-) = +	;	(- 12) : (- 4) = 3
(+) : (-) = -	;	20 : (- 5) = - 4
(-) : (+) = -	;	(- 30) : 6 = - 5

Esto nos dice que el cociente de dos números del mismo signo es positivo y del signo contrario es negativo.

4.7.2 DIVISIÓN EXACTA: RELACIÓN ENTRE SUS ELEMENTOS

- La división es **Exacta** cuando el resto es **Cero**.
- En una división exacta hay **Siempre** un número que multiplicado por el divisor, **Da el Dividendo**.
- En toda división exacta **El Dividendo es Igual** al **Divisor por el Cociente**.

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$D = d \times c$$

- **Las Equivalencias** fundamentales de la división exacta son éstas:

$$D = d \times c \Leftrightarrow D : d = c \Leftrightarrow D : c = d$$

4.7.3 PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN EXACTA

I) *La división exacta tiene esta propiedad muy importante: si el dividendo y el divisor de una división exacta* ***Se Multiplican*** *o* ***Se Dividen*** *por un mismo número diferente de cero,* ***El Cociente no Varía.***

Ejemplo 1:

División inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

Multiplico al dividendo y al divisor por 3, se obtiene: $\frac{40 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{120}{24} = \boxed{5}$

No varía

Ejemplo 2:

División Inicial: $\frac{40}{8} = \boxed{5}$

Dividimos al dividendo y al divisor por 4, se obtiene: $\frac{40 : 4}{8 : 4} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

No varía

II) *Si al dividendo (D) lo multiplicamos o lo dividimos por cualquier número entero sin alterar el divisor, el cociente (C) también quedará multiplicado o dividido por dicho número entero.*

Ejemplo 1:

División inicial: $\frac{54}{6} = \boxed{9}$

Multiplico al dividendo por 2, obteniendo: $\frac{2 \times 54}{6} = \frac{108}{6} = \boxed{18}$

Queda multiplicado por 2

Ejemplo 2:

División inicial: $\frac{54}{6} = \boxed{9}$

Divido al dividendo por 3, obteniendo: $\frac{54 : 3}{6} = \frac{18}{6} = \boxed{3}$

Queda dividido por 3

III) *Si al divisor lo multiplicamos o dividimos por un número, diferente de cero, sin alterar el dividendo, el cociente quedará dividido en el primer caso o multiplicado en el segundo caso por el mismo número.*

Ejemplo 1:

División inicial: $\frac{64}{16} = \boxed{4}$

Multiplico al divisor por 2, obteniendo: $\frac{64}{16 \times 2} = \frac{64}{32} = \boxed{2}$

Queda dividido por 2

Ejemplo 2:

División inicial: $\frac{64}{16} = \boxed{4}$

Divido al divisor por 4, obteniendo: $\frac{64}{16 : 4} = \frac{64}{4} = \boxed{16}$

Queda multiplicado por 4

IV) ***Propiedad Distributiva:*** *El cociente de dividir una suma indicada de varios números enteros entre un divisor diferente de cero es igual a la suma de los cocientes de cada sumando entre el mismo divisor.*

$$\boxed{(a + b + c + d) : (e) = (a : e) + (b : e) + (c : e) + (d : e)}$$

Ejemplos:

i) $(12 + 8 + 16) : 4 = (12 : 4) + (8 : 4) + (16 : 4)$

ii) $[24 + 12 + (-18)] : 6 = (24 : 6) + (12 : 6) + [(-18) : 6]$

V) *Propiedad del Elemento Neutro*: *Es el* ***Uno*** *como divisor. El cociente de dividir cualquier número entero entre* ***Uno*** *es el mismo número entero.*

$$\boxed{N : 1 = N}$$ ***Ejemplo***: $9 : 1 = 9$

VI) *Propiedad del Elemento Absorvente*: *Es el cero como dividendo. El cociente de dividir* ***Cero*** *entre cualquier número diferente de cero, siempre es cero.*

$$\boxed{0 : N = 0}$$ ***Ejemplo***: $0 : 8 = 0$

Recomendación: La división en los enteros $\mathbb{Z}$

* No es Conmutativa.	* No es Asociativa.
$(a : b) \neq (b : a)$	$(a : b) : c \neq a : (b : c)$
Ejemplo: $(12 : 4) \neq (4 : 12)$	***Ejemplo:*** $(16 : 8) : 4 \neq 16 : (8 : 4)$
$\therefore \boxed{3 \neq \frac{1}{3}}$	$2 : 4 \neq 16 : 2$ $\therefore \boxed{1/2 \neq 8}$

4.7.4 DIVISIÓN INEXACTA O ENTERA

División Inexacta o Entera es cuando no hay un número que multiplicado por el divisor nos da el dividendo.

Veamos: $6 \times \bigcirc = 45$

Como se observará ningún número entero verifica esta igualdad porque:

$6 \times (7) = 42$ y $6 \times (8) = 48$

Como vez, el 7 es pequeño y el 8 es grande.

La expresión $6 \times \bigcirc = 45$, lo indicaremos asi:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

Esta división ha sido **Inexacta o Entera**, porque ha quedado resto (residuo), que es 3.

Lo cuál lo podemos expresar asi: $6 \times (7) + \boxed{3} = 45$

La operación que nos permite calcular los números que hay que colocar en el círculo y en el cuadrado, se llama **División Entera**.

Problema: Tenemos 58 manzanas para colocarlas en montones de 9 manzanas cada uno. ¿Cuántos montones pueden formarse?

Resolución:

Se pueden hacer 6 montones de 9 manzanas y sobran 4.

Escribimos la división: $\begin{array}{r|l} 58 & 9 \\ \hline 4 & 6 \end{array}$ ➡ $58 = 9\,(6) + \boxed{4}$

* En toda división inexacta o entera, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto:

Dividendo = divisor × cociente + resto

$D = d \times c + r$

* En la división inexacta un **Cociente por Defecto y un Resto por Defecto**.

Ejemplo: Si 37 lapiceros se reparten entre 9 alumnos, a cada uno sólo le puede corresponder 4 lapiceros y sobraría 1.

Esto lo expresamos asi:

$\begin{array}{r|l} 37 & 9 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$ ó $\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$ ➡ $\boxed{D = d \times c + r}$ (División Inexacta por defecto)

* En la división inexacta hay también un **Cociente por Exceso y un resto por Exceso.**

Ejemplo: Vamos a colocar 75 niños que quieran ir de excursión y alquilamos varios combis. En cada combi sólo pueden ir 12 niños. ¿Cuántos combis se necesitan?

$\begin{array}{r|l} 75 & 12 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$ Te encuentras con que te sobran 3 niños, que también han de ir de excursión. Por tanto no se necesitan como parece 6 combis. Si no 7 para que asi vayan todos claro está que si son 7 combis, quedarán 9 asistentes libres; Veamos:

$\begin{array}{r|l} 75 & 12 \\ \hline 9 & 7 \end{array}$ ó $\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r' & c' \end{array}$ ➡ $\boxed{D = d \times c' - r'}$ (División Inexacta por Exceso)

En toda división Inexacta o Entera, **el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente por exceso menos el resto por exceso.**

Dividendo = divisor × cociente **(exceso)** - resto **(exceso)**

$D = d \times c' - r'$

* En toda división Inexacta, el resto ha de ser **menor que el divisor**:

$\boxed{r < d}$

4.7.5. PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN ENTERA O INEXACTA

> **I)** *Si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por ese mismo número.*

Ejemplo:

División Inicial:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 8 \end{array}$$

Se multiplica el dividendo y el divisor por 3; obteniendo:

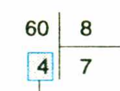
$$\begin{array}{r|l} 42\times 3 & 5\times 3 \\ \hline ? & 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 126 & 15 \\ \hline \boxed{6} & 8 \end{array}$$

Queda multiplicado por 3

> **II)** *Si se dividen el dividendo y el divisor por un mismo número diferente de cero, el cociente no varia, pero el resto queda dividido por dicho número.*

Ejemplo:

División Inicial:



Se divide al dividendo y al divisor por 4; obteniendo:

$$\begin{array}{r|l} 60:4 & 8:4 \\ \hline ? & 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 7 \end{array}$$

Queda dividido por 4

TALLER DE EJERCICIOS Nº 34

Ejercicio 1 : De un conjunto de 37 lápices, forma conjuntos de 9 lápices cada uno. ¿Cuántos subconjuntos has obtenido? ¿Te sobran algunos lápices? Haz un dibujo que interprete el problema. ¿Qué operación resuelve esta cuestión?

Ejercicio 2 : ¿En que se diferencia la división exacta de la división inexacta o entera?

Ejercicio 3 : Halla el cociente de las siguientes divisiones:

a) 396 : 36 =	**e)** - 1 445 : 17 =	**i)** (-972) : 27 =
b) 792 : (- 18) =	**f)** (- 256) : (- 16) =	**j)** 1 968 : 123 =
c) - 144 : 36 =	**g)** 120 : (- 24) =	**k)** (- 7 200) : (- 15) =
d) 483 : (- 23) =	**h)** (- 4 674) : (- 38) =	**l)** 29 890 : 2 135 =

Ejercicio 4 : Completa el siguiente cuadro: (colocar un aspa si la división es Inexacta)

:	6	7	8	87	43	92	9	56	134
846									
722									
6 387									
4 712									
86 438									

Ejercicio 5 : Coloca dentro de las figuras los números convenientes para que estas igualdades sean ciertas:

a) ◯ = 5 × 7 + 2	**e)** 51 = ☐ × 6 + 3	**i)** 236 = 19 × ◯ + 8
b) ◯ = 9 × 11 + 4	**f)** 109 = ☐ × 13 + 5	**j)** 356 = 23 × ◯ + 11
c) ◯ = 12 × 7 + 5	**g)** 246 = ☐ × 17 + 8	**k)** 167 = 18 × 9 + ☐
d) 39 = ☐ × 4 + 7	**h)** 50 = 8 × ◯ + 2	**l)** 513 = 36 × 14 + ☐

Ejercicio 6 : Efectua:

a) (21 + 70 - 42) : 7	**c)** (66 - 42 - 18) : 6	**e)** (256 + 80 - 144) : 16
b) (105 + 75 - 125) : 5	**d)** (195 - 90 + 75) : 15	**f)** (625 - 500 - 75) : 25

Ejercicio 7 :Calcula el número entero que resulta de las operaciones en los siguientes casos:

a) $(-4)\times\dfrac{15}{3}=$	**d)** $\dfrac{\left(\dfrac{-20}{5}\right)}{-2}=$	**g)** $\dfrac{16}{-4}\times(-5)+\dfrac{-12}{3}-(-2)=$
b) $\left(-\dfrac{15}{5}\right)\times(-7)=$	**e)** $\dfrac{(-24)\times 3}{3\times 2}=$	**h)** $\dfrac{-(-5)+(-10)\times\left(\dfrac{12}{-3}\right)}{-\dfrac{15}{3}\times(-3)}=$
c) $\dfrac{-9}{\left(\dfrac{-18}{-6}\right)}=$	**f)** $\dfrac{\left(-\dfrac{36}{4}\right)}{\left(\dfrac{6}{2}\right)}=$	**i)** $\dfrac{(-8)\times-\dfrac{15}{3}+\dfrac{30}{-5}\times(-4)}{\left(-\dfrac{8}{4}\right)\times(-3)-\left(\dfrac{24}{6}\right)}=$

Ejercicio 8 :Halla el valor de A, que se deduce de las siguientes igualdades:

a) 10A + 5A = 75	**c)** 5 (A - 5) = 75	**e)** (5A - 7) : 7 = 4
b) 8A = 90 + 3A	**d)** (A + 9) : 5 = 16	**f)** 25 + 8A = 3A + 60

Ejercicio 9 :Halla B en la igualdades:

a) 5 (B - 6) = 30	**d)** B : 7 = 90 - 2B	**g)** (3B - 2) : 4 = 7
b) 2 (5B - 9) = 42	**e)** (5B - 8) : 4 = 3	**h)** B : 3 = 20 - B
c) 4B - 56 = 16 - 2B	**f)** 6B + 18 = 3B + 72	

Ejercicio 10 : Resuelve:

a) (-4 + 3) (-1) + [3 - (-8) : (+2)] + (-9) : (+3) =	**g)** [8 - (-2) - (+5) (-3)] . (-3) + 14 : (-2) + (-5 - 2)(+1) =
b) [(-7 + 5 - 2) (-2) + 4] : (+6) - (-10 + 3) : (+7) =	**h)** {3 + [2 (-4) + (8 - 6) : (-2)] . 3 - 1} =
c) [-8 + (-7 + 4) . (-2)] : [(-9) : (-3) -1] =	**i)** -2 + {(-5) . 4 - [2 + (-7 + 4) (-1)] + (-10) : (+5)=
d) (-9 + 6 + 5) . (-4) + [7 - (-8) : (+2) -5] . (-3) =	**j)** (-6) : (+2) + [18 - 9 : (+3)] . (-2 + 4) + 5 (-7) =
e) [10 - 5 (-2)] : (+5) + (-4 + 6) . (+3) + 8 : (-2) =	
f) [11 - 4) : (-7) + 8] . (+2) - 27 : (+3) =	

Rpta. **a)** 5 **b)** 3 **c)** -1 **d)** -26 **e)** 6 **f)** 5 **g)** -89 **h)** -25 **i)** -29 **j)** -8

4.8 POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS:

Sabemos que las potencias son casos particulares de la multiplicación, es decir, aquellos en el cual se repite el mismo factor. Sin embargo tiene sus componentes característicos con nombres especiales, asi:

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{"5 veces"}} \Rightarrow \underset{\text{base}}{2}^{\overset{\text{exponente}}{5}} = \underset{\text{Potencia}}{32}$$

Ejemplo 1: Sea el producto: Q = (- 3) . (- 3) . (- 3) . (- 3) . (- 3) . (- 3) . (- 3)

Esta potencia se escribe abreviadamente asi: $(-3)^7$

y se lee: " **- 3 elevado a la 7** "

- En el ejemplo anterior, ¿Cuál es la base, el exponente y la potencia?

  Para el Alumno: ¿Cuáles son: la base, el exponente y la potencia en los productos siguientes?

  a) (- 2) × (- 2) × (- 2) × (- 2) **b)** 3 × 3 × 3 x 3 x 3

  c) (- 1) x (- 1) x (- 1) **d)** B . B . B . B . B

4.8.1 CASOS PARTICULARES

Las potencias de exponente 2 se llaman **Cuadrados**.

Así: $5 \times 5 = 5^2 = 25$ ⇒ 25 es el **cuadrado de 5**

Las potencias de exponente 3 se llaman **cubos**. Así:

$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ ⇒ 64 es el **cubo de 4**

Es decir:
- A^2 se lee "A al cuadrado" o "cuadrado de A"
- A^3 se lee "A al cubo " o "cubo de A"

A^2, A^3, A^4, se enuncian también (y es más cómodo) A a la dos, A a la tres, A a la cuatro,.......que no hay que confundir con dos A, tres A, cuatro A, (2A, 3A, 4A, ...)

4.8.2 POTENCIAS NOTABLES

1º **Potencias de Cero**: Todas las potencias de cero son iguales a cero.

$0^2 = 0^3 = 0^n = 0$; Siendo: $n \neq 0$

> ***Observación:***
> 0^0 ; no está definido.

2º Potencia de Uno: Todas las potencias de 1 son iguales a 1.

$$1^2 = 1^3 = 1^n = 1$$

3º Potencias de Exponente Uno: Ya que el exponente es igual al número de factores del producto, a^1 no tiene sentido, segun la definición, porque un producto tiene por lo menos dos factores. Lo mismo sucede para a^o. Para evitar este inconveniente se hace por definición:

$$a^1 = a$$

Así: $0^1 = 0$; $1^1 = 1$; $2^1 = 2$; $3^1 = 3$; $(-4)^1 = -4$; $(-5)^1 = -5$.

4º Potencias de 10: Se tiene:

$10^1 = 10$; $10^2 = 10 \times 10 = 100$; $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$; etc.

En particular: $10^6 = 1\ 000\ 000$ (1 millón)

$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (mil millones)

En General: 10^n se escribe con 1 seguido de n ceros.

4.8.3 POTENCIAS DE UN NÚMERO NEGATIVO

Si el exponente es natural cabe considerar dos casos:

A) Sea: $(-4)^3 = (-4) . (-4) . (-4)$

Su valor absoluto es 4^3 ó 64; su signo es - ; ya que el número de factores negativos es **Impar**; luego: $(-4)^3 = -64$

Toda potencia de exponente impar de un número negativo es un número negativo.

Otro Ejemplo: $(-2)^5 = -2^5 = -32$

B) Sea: $(-3)^4 = (-3) . (-3) . (-3) . (-3)$

Su valor absoluto es 3^4 ó 81 ; su signo es **+** ; ya que el número de factores negativos es **Par**, luego: $(-3)^4 = +81$

Toda potencia de exponente par de un número negativo es un número positivo.

Otro Ejemplo: $(-2)^6 = 2^6 = 64$

Recuerda que: $(-5)^2 \neq -5^2$

El Exponente 2 afecta a la base -5 — ***El Exponente 2 Sólo afecta a la base 5***

4.8.4 PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Sea el producto: $(-3)^2 \times (-3)^4$

Por definición: $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Luego: $(-3)^2 \times (-3)^4 = [\,(-3) \times (-3)\,] \times [\,(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)\,]$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^6$

Es decir: $(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^6 = (-3)^{2+4}$

El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

Ejemplos:

a) $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

b) $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -3^5 = -81$

c) $a^2 . a^4 . a^5 = a^{2+4+5} = a^{11}$

d) $5 . 5^2 . 5^3 = 5^{1+2+3} = 5^6$

De una manera **General**:

$a^m \times a^p \times a^q = a^{m+p+q}$

Donde: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ m, p \text{ y } q \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.8.5 COCIENTE DE DOS POTENCIAS DE LA MISMA BASE

1º Caso: Divide la potencia; $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

Entre la potencia: $(-2)^2 = (-2) \times (-2)$

Resolución:

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^2} = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2) \times \cancel{(-2)} \times \cancel{(-2)}}{\cancel{(-2)} \times \cancel{(-2)}} = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^3$$

El cociente es $(-2)^3$ porque multiplicado por el divisor $(-2)^2$ nos da el dividendo $(-2)^5$; es decir: $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^5$

El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes

Ejemplos:

a. $\dfrac{(-4)^3}{(-4)} = (-4)^{3-1} = (-4)^2 = 4^2 = 16$

b. $\dfrac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$

De una manera **General:** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ⇨ **Donde:** $a \in \mathbb{Z}$; Excepto el Cero. m y $n \in \mathbb{N}$

2º Caso: Divide la potencia: $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$

Entre la potencia: $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$

Resolución:

$$\frac{(-2)^3}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)} = 1$$

$$(-2)^{3-3} = (-2)^0 = 1$$

En realidad según la definición dada de potencia a^0 no tiene ningún significado, pues no existe producto si no hay ningún factor. Pero, para que sigan cumpliéndose las reglas de cálculo, se ha convenido que:

$a^0 = 1$; Donde: $a \neq 0$

Ejemplos: $7^0 = 1$; $14^0 = 1$; $(-16)^0 = 1$; $345^0 = 1$

3º Caso: Divide la potencia: $(-3)^2 = (-3) \times (-3)$

Entre la potencia: $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

Resolución:

$$\frac{(-3)^2}{(-3)^4} = \frac{\cancel{(-3)}\times\cancel{(-3)}}{\cancel{(-3)}\times\cancel{(-3)}\times(-3)\ (-3)} = \frac{1}{(-3)\times(-3)} = \frac{1}{(-3)^2}$$

$$(-3)^{2-4} = (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2}$$

* Todo número entero elevado a un exponente negativo será igual a la **Inversa** de dicho número entero elevado al mismo exponente pero positivo.

Ejemplos: a). $(-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \boxed{\dfrac{1}{25}}$ b). $6^{-3} = \dfrac{1}{6^3} = \boxed{\dfrac{1}{216}}$

c). $(-2)^{-5} = \dfrac{1}{(-2)^5} = \dfrac{1}{-2^5} = \boxed{-\dfrac{1}{32}}$

De una manera **General**: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ **Donde:** $a \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}$

4.8.6 POTENCIA DE UNA POTENCIA DE UN NÚMERO ENTERO

Sea: $Q = \left[(-2)^3\right]^2$; según la definición de potencia de un número.

Se tiene: $Q = (-2)^3 \times (-2)^3$; y según el producto de potencias de

igual base: $Q = (-2)^{3+3} = \underline{(-2)^6}$ Es decir: $Q = (-2)^{3\times 2} = \underline{(-2)^6}$

La potencia de una potencia de un número es otra potencia del mismo número cuyo exponente es el producto de los exponentes.

Ejemplos: a). $\left[(-4)^2\right]^3 = (-4)^{2\times 3} = \boxed{(-4)^6}$ b). $\left(2^5\right)^2 = 2^{5\times 2} = 2^{10} = \boxed{1024}$

De una manera **General**: $\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}}$ ⇨ **Donde:** $\begin{cases} a \neq 0 \\ n \text{ y } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4.8.7 POTENCIA DE UN PRODUCTO

Sea: $Q = [(-2)\times 5]^3$; según la definición de potencia de un número

Se tiene: $Q = [(-2)\times 5]\times[(-2)\times 5]\times[(-2)\times 5]$; Ordenando dichos

factores se tiene: $Q = [(-2)\times(-2)\times(-2)]\times[5\times 5\times 5]$

$$Q = \underline{(-2)^3 \times (5)^3}$$

Es decir: $Q = [(-2)\times 5]^3 = \underline{(-2)^3 \times (5)^3}$

Para elevar un producto indicado a una potencia, se eleva cada factor del producto a dicha potencia.

Ejemplos: a). $Q = [(-8)\cdot(5)\cdot(-2)]^3 = (-8)^3\cdot(5)^3\cdot(-2)^3$

b). $Q = \left[(-4)^3\cdot 5^2\right]^3 = \left[(-4)^{3\cdot 3}\right]\cdot\left[5^{2\cdot 3}\right] = (-4)^9\cdot 5^6$

De una manera **General**:

$\boxed{(a\cdot b\cdot c)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n}$ **Donde:** $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ a, b \text{ y } c, \neq 0 \end{cases}$

4.8.8 POTENCIA DE UN COCIENTE

Sea: $\left(\dfrac{6}{-2}\right)^3$; Por definición de Potencia se tiene:

$$\left(\frac{6}{-2}\right)^3 = \frac{6}{-2}\times\frac{6}{-2}\times\frac{6}{-2} = \frac{6^3}{(-2)^3}$$

Es decir: $\left(\dfrac{6}{-2}\right)^3 = \dfrac{6^3}{(-2)^3}$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan los dos términos del cociente a dicha potencia.

Ejemplos: a). $\left(\dfrac{2}{-5}\right)^2 = \dfrac{(2)^2}{(-5)^2} = \dfrac{4}{25}$ b). $\left(\dfrac{16}{-4}\right)^3 = \dfrac{16^3}{-4^3}$

De una manera **General**:

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; **Donde:** $n \in \mathbb{Z}$, a y $b \neq 0$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE NÚMEROS ENTEROS

Ejercicio 1: Aplicando las propiedades de las potencias, hallar el resultado de:

a) $3^2 \times 4^2$ **b)** $(6 \times 3)^2$ **c)** $\left(\dfrac{2\times 3}{4}\right)^3$ **d)** $(5^2)^2$ **e)** $(3^2)^3$ **f)** $\dfrac{6^5 \times 8^4}{6^4 \times 8^2}$

Resolución:

a) $3^2 \times 4^2 = (3\times 4)^2 = (12)^2 = \boxed{144}$

$9 \times 16 = \boxed{144}$

b) $(6\times 3)^2 = 6^2 \times 3^2 = 36 \times 9 = \boxed{324}$

$(18)^2 = \boxed{324}$

c) $\left(\dfrac{2\times 3}{4}\right)^3 = \dfrac{2^3 \times 3^3}{4^3} = \dfrac{\cancel{8}\times 27}{\cancel{64}} = \boxed{\dfrac{27}{8}}$

d) $(5^2)^2 = 5^{2\times 2} = 5^4 = \boxed{625}$

$(25)^2 = \boxed{625}$

e) $(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6 = \boxed{729}$

$(9)^3 = \boxed{729}$

f) $\dfrac{6^5}{6^4} \times \dfrac{8^4}{8^2} = 6^{5-4} \times 8^{4-2} = 6^1 \times 8^2 = 6 \times 64 = \boxed{384}$

Ejercicio 2: Simplificar las expresiones: a). $\dfrac{3^7 \times 6^8 \times 5^4 \times a^{10}}{3^5 \times 6^7 \times 5 \times a^6}$ b). $\dfrac{x^8 \cdot y^9 \cdot z^6}{x^5 \cdot y^8 \cdot z^3}$

Resolución:

a). $\dfrac{3^7}{3^5} \times \dfrac{6^8}{6^7} \times \dfrac{5^4}{5} \times \dfrac{a^{10}}{a^6} = 3^{7-5} \times 6^{8-7} \times 5^{4-1} \times a^{10-6}$

$$\dfrac{3^7}{3^5} \times \dfrac{6^8}{6^7} \times \dfrac{5^4}{5} \times \dfrac{a^{10}}{a^6} = 3^2 \times 6 \times 5^3 \times a^4 = 9 \times 6 \times 125 \times a^4 = \boxed{6\,750\,a^4}$$

b). $\dfrac{x^8}{x^5} \cdot \dfrac{y^9}{y^8} \cdot \dfrac{z^6}{z^3} = x^{8-5} \cdot y^{9-8} \cdot z^{6-3} = \boxed{x^3 \cdot y \cdot z^3}$

Ejercicio 3: Reducir: $4^{-2^{-1}}$

Resolución:

Para este tipo de ejercicios se empieza a reducir de arriba hacia abajo.

Luego: $4^{-2^{-1}} = 4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ ***Rpta.***

Ejercicio 4: Reducir: $P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}$; obtenemos:

$P = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = (2)^3 + (4)^2 + (5)^2 = 8 + 16 + 25 = 49$ ➡ $\therefore \boxed{P = 49}$ ***Rpta.***

Ejercicio 5: Simplificar: $Q = \dfrac{18^3 + 6^3}{12^3 + 4^3}$

Resolución: ➡

Recomendación: $18^3 + 6^3 \neq 24^3$ y $12^3 + 4^3 \neq 16^3$

Los números 18 y 12, se pueden escribir asi: $18 = 6 \times 3$ y $12 = 4 \times 3$

Luego:

$$Q = \frac{(6 \cdot 3)^3 + 6^3}{(4 \cdot 3)^3 + 4^3} = \frac{6^3 \cdot 3^3 + 6^3}{4^3 \cdot 3^3 + 4^3} = \frac{6^3(3^3+1)}{4^3(3^3+1)} = \frac{6^3}{4^3} = \frac{216}{64} = \frac{27}{8}$$

$$\therefore \boxed{Q = \frac{27}{8}} \quad \textit{Rpta}$$

Ejercicio 6: Reducir: $M = 16^{-8^{-1/3}}$

Resolución:

$$M = 16^{-\left(8^{-1/3}\right)} \quad ; \quad 8^{-1/3} = \left(2^3\right)^{-1/3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$M = 16^{-\frac{1}{2}} = \left(4^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{-1} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{M = \frac{1}{4}} \quad \textit{Rpta}$$

Ejercicio 7: Reducir: $R = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{-2}{6}\right)^{-1} - 3^{-3}$

Resolución:

$$R = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{-2}{6}\right)^{-1} - 3^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} + \left(\frac{6}{-2}\right)^{1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$$

$$R = \frac{9}{4} + \frac{6}{-2} - \frac{1}{27} = \frac{9}{4} - 3 - \frac{1}{27}$$

Sacando M.C.M. de (4, 1 y 27) = 108

$$R = \frac{243 - 324 - 4}{108} = \frac{-85}{108}$$

$$\boxed{R = \frac{-85}{108}} \quad \textit{Rpta}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 35

Ejercicio 1 : Escribe el número que representa la potencia siguiente:

a) $6^4 =$	**d)** $3^7 =$	**g)** $(-17)^2 =$	**j)** $(-32)^2 =$
b) $(-12)^3 =$	**e)** $(-2)^8 =$	**h)** $(-26)^3 =$	**k)** $(-5)^4 =$
c) $(-7)^2 =$	**f)** $4^6 =$	**i)** $(125)^2 =$	**l)** $(-4)^5 =$

Ejercicio 2 : Abrevia los productos siguientes escribiéndolos como potencia:

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$	**d)** $a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a =$	**g)** $(-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) =$
b) $15 \times 15 \times 15 =$	**e)** $n^2 \times n^2 \times n^2 \times n^2 =$	**h)** $x^3 \,.\, x^3 \,.\, x^3 \,.\, x^3 \,.\, x^3 =$
c) $(-4) \times (-4) \times (-4) =$	**f)** $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) =$	**i)** $b^6 \,.\, b^6 \,.\, b^6 \,.\, b^6 =$

Ejercicio 3 : Aplicando propiedades de las potencias halla el resultado de:

a) $3^2 \times 3^3 =$	**d)** $(-3 \times 6)^2 =$	**g)** $4^{-3} =$	**j)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$
b) $(-2)^4 \times (-2)^2 =$	**e)** $\frac{16^3}{16} =$	**h)** $6^{-2} =$	**k)** $(2^3)^4 =$
c) $\frac{7^6}{7^4} =$	**f)** $3^{-4} =$	**i)** $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} =$	**l)** $\left[(-3)^2\right]^5 =$

Rpta.

a) 243	**b)** 64	**c)** 49	**d)** 324	**e)** 256	**f)** 1/81
g) 1/64	**h)** 1/36	**i)** 4/25	**j)** 64/27	**k)** 4 096	**l)** 59 049

Ejercicio 4 : Simplificar:

a) $\frac{x^7 \cdot y^4}{x^4 \cdot y^3} =$	**b)** $\frac{a^8 \cdot b^9 \cdot c^4}{a^6 \cdot b^7 \cdot c^2} =$	**c)** $\frac{6^4 \cdot 7^4 \cdot 9^8}{6^2 \cdot 7^4 \cdot 9^7} =$

d) $\dfrac{8^8 \cdot 9^9 \cdot x^6}{8^6 \cdot 9^7 \cdot x^4} =$	**e)** $\dfrac{10^7 \cdot m^3 \cdot y^4 \cdot z^6}{10^5 \cdot z^4 \cdot m \cdot y^2} =$	**f)** $\dfrac{3^8 \cdot a^5 \cdot b^4 \cdot c^7}{3^6 \cdot b^3 \cdot a^4 \cdot c^5} =$

Rpta. **a)** $x^3 \,.\, y$ **b)** $a^2\, b^2\, c^2$ **c)** 324 **d)** $5\,184\, x^2$ **e)** $100\, m^2\, y^2\, z^2$ **f)** $9abc^2$

Ejercicio 5: Simplificar:

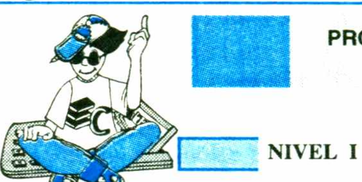
a) $\dfrac{6^5 \times 4^6}{3^5 \times 2^6} =$	**b)** $\dfrac{18^2 \times 9^2}{36^2} =$	**c)** $\dfrac{20^4 \times 7^3}{14^3 \times 5^2} =$
d) $\dfrac{12^3 \times 6^4}{4^3 \times 3^4} =$	**e)** $\dfrac{16^4 \times 2^4 \times 4^4}{64^4} =$	**f)** $\dfrac{32^3 \times 9^4}{4^3 \times 3^8} =$

Rpta. **a)** 2 048 **b)** 81/4 **c)** 800 **d)** 432 **e)** 16 **f)** 512

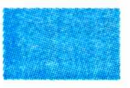
Ejercicio 6: Reducir:

a) $27^{-9^{-1/2}}$	**b)** $81^{-16^{-1/2}}$	**c)** $32^{125^{-1/3}}$	**d)** $\dfrac{12^4 - 6^4}{6^4 - 3^4}$
e) $\dfrac{20^3 + 10^3}{10^3 + 5^3}$	**f)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$	**g)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}$	**h)** $25^{16^{-16^{-8^{-1/3}}}}$

Rpta. **a)** 1/3 **b)** 1/3 **c)** 2 **d)** 16 **e)** 8 **f)** 4 **g)** 27 **h)** 5



PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE NÚMEROS ENTEROS



NIVEL I

Ejercicio 1: La expresión:

$$(-15 + 12)^3 : 3 + (2 . 5)^2 : 20 . 5$$

Equivale a:

A) -9 **B)** -10 **C)** 5 **D)** -19 **E)** 16

Ejercicio 2: Efectuar:

$$6 \{4 [2 (3 + 2) - 8] -8\}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 24 **D)** 4 **E)** 12

Ejercicio 3: De las siguientes expresiones relativas a números enteros:

I. La suma de dos números negativos es un número negativo.
II. La diferencia de dos números negativos es un número negativo.
III. El producto de tres números negativos es un número negativo.

Son verdaderas:

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III
D) I y III **E)** II y III

Ejercicio 4: Reducir:

$$E = \frac{|-4| + \left|\,|4-8| + |-2|\,\right|}{|5 + 6 - 8 - 4|}$$

A) 10 **B)** -10 **C)** -11 **D)** 11 **E)** 1

Ejercicio 5: Reducir:

$$6 - \{4 [6 + 5 - (3 + 2) - 4] - 3\}$$

A) 5 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 1

Ejercicio 6: Si:

$A = (-3) - (-5) - (1)$ y $B = -5 - [-3 + 2 + (-8)]$

Hallar: $\frac{A + B}{A \cdot B}$

A) 1,32 **B)** 2,25 **C)** 1,50 **D)** 1,75 **E)** 1,25

Ejercicio 7: Ordenar de mayor a menor:

$$P = (-3)^2 (-3)^3 \quad ; \quad Q = \frac{-4^5}{-4^2}$$

$$R = (-1)^{-100} \cdot (-1)^{99}$$

A) PRQ **B)** QRP **C)** PQR **D)** QPR **E)** RQP

Ejercicio 8: Efectuar:

$$2\left\{1 + \left[4\,(2+1)^2 + 1\right]^2\right\}$$

A) 2 160 **B)** 1 020 **C)** 2 740
D) 2 512 **E)** 1 286

Ejercicio 9: Calcular el valor de:

$$E = \sqrt[3]{-27} \cdot 4^2 - \sqrt{144} : 2^2 + 3^2$$

A) 42 **B)** 31 **C)** -42 **D)** 21 **E)** 0

Ejercicio 10: La expresión:

$\left(\sqrt[3]{-27} - \sqrt[4]{81}\right)^2 + \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8}$; es igual a:

A) 40 **B)** 28 **C)** 44 **D)** 48 **E)** 32

Ejercicio 11: Un explotador desciende 40 metros desde un punto que se encuentra a 11 metros sobre el nivel del mar y luego sube 117 metros hasta la cima de una colina. ¿Cuál es la posición de la colina sobre el nivel del mar?

A) 157 m **B)** 88 m **C)** 146 m
D) 117 m **E)** 106 m

Ejercicio 12: La temparatura bajo hasta -16°C a las 23:00 h luego comenzó a elevarse a un promedio de 3 grados por hora. ¿Cuál fue la lectura del termómetro a las 02:00 h?

A) -7° **B)** -10° **C)** -25° **D)** 7° **E)** 9°

Ejercicio 13: Señale el menor de los números:

$$M = (-2) . (+3) \quad ; \quad N = (+6) : (-1)$$

$$P = (-2)3 + (-2) - (-5)$$

A) Sólo M **B)** Sólo N **C)** Sólo P
D) M ó N **E)** N ó P

Ejercicio 14: Para que se cumpla la igualdad:

$$(-5) + (-4)(-3) - (-1)(2) - x = (-1)^3$$

El valor de "x" debe ser:

A) 10 **B)** -8 **C)** 9 **D)** -9 **E)** -10

Ejercicio 15 : Calcular:

$$10 + (-10)(2)^2 - (-5)^3 + (-8)(-1)^5 - (-2)^6$$

A) 58 **B)** -17 **C)** 43 **D)** 71 **E)** 39

Ejercicio 16 : ¿En cuál de las siguientes expresiones se aplicó la propiedad **distributiva**?

A) a . b = b . a **B)** a + (-a) = 0
C) b . b1 = 1 **D)** a + (b + c) = (a + b) + c
E) a (b + x) = ab + ax

Ejercicio 17 : ¿Cuál de estas expresiones indica la propiedad del inverso multiplicativo para números enteros no nulos?

A) a . b = b . a **B)** a + (-a) = 0
C) $b . b^{-1} = 1$ **D)** a + (b + c) = (a + b) + c
E) Ninguna

Ejercicio 18 : Manuel tenía tres deudas de S/. 45 ; S/. 66 ; S/. 79 respectivamente. Entonces recibe S/. 200 y hace un gasto de S/. 10. ¿Cuánto tiene?

A) S/. 10 **B)** -S/. 10 **C)** S/. 20
D) -S/. 20 **E)** 0

Clave de Respuestas

1. E	2. A	3. D	4. A	5. E
6. E	7. B	8. C	9. C	10. C
11. B	12. A	13. D	14. A	15. E
16. E	17. C	18. E		

NIVEL II

Ejercicio 1 : Dadas las expresiones:

$$A = 4 - [2 - (3 - (-1 + 4)) - (1 - 5) - 5]$$
$$B = [2 - (-1)^3 + (1 - 3^2) - (-5)^2] : [1 + (-2)^2]$$

Hallar el valor de: $A^2 + B^2$

A) 40 **B)** 29 **C)** 10 **D)** 45 **E)** 25

Ejercicio 2 : Si el producto de cuatro enteros consecutivos es cero. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de estos números?

A) -10 **B)** -6 **C)** -2 **D)** -1 **E)** 0

Ejercicio 3 : La suma de 10 números enteros positivos consecutivos cualesquiera. ¿En qué cifra termina?

A) 0 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 9

Ejercicio 4 : Se sabe que: $x \in \mathbb{Z}$; $y \in \mathbb{Z}$ además: $5 - 2y = x$. Entonces será $x > 0$; si:

A) $y \neq x$ **B)** $y > 0$ **C)** $y \leq 2$
D) $y = x - 1$ **E)** Sólo si $0 \leq y \leq 2$

Ejercicio 5 : El residuo de la siguiente división:

$$(123\,456)^2 : 3^3 \text{ ; es:}$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 9

Ejercicio 6 : Dadas las expresiones:

$A = 2 . 4^2$; $B = -(-2)^2 : 2 + 2 - 18 : (-9)$ y
$C = 12^2 : 12 - (24 : 12) . 3^2$

El doble de A menos el cuádruple de B más el quintuple de C es igual a:

A) -6 **B)** 5 **C)** -2 **D)** -30 **E)** 26

Ejercicio 7 : Efectuar:

$$P = 63 : 7 - 4 . (-3^{15} : 3^{13}) + (39)^0 - (-1)^9$$

A) 47 **B)** 13 **C)** -16 **D)** 36 **E)** -36

Ejercicio 8 : Una ciudad fundada el año 75 A.C. fue destruida 135 años después. Expresar la fecha de su destrucción.

A) -60 **B)** +60 **C)** -50 **D)** +50 **E)** +70

Ejercicio 9: A partir del punto B una persona recorre 90 m, a la derecha y retrocede, en la misma dirección, primero 58 m y luego 36 m. ¿A qué distancia se halla de B?

A) -4m **B)** +4m **C)** -5m **D)** +5m **E)** +6m

Ejercicio 10 : A las 6 a.m. el termómetro marca -8°; de las 6 a.m. a las 11 a.m. sube a razón de 4° por hora. Expresar la termperatura a las 11 a.m.

A) +10° **B)** +11° **C)** +12° **D)** +13° **E)** +14°

Ejercicio 11 : Ordenar de menor a mayor:

$A = -3^4 + 4^3 + 2^4$; $B = |4^3 - 3^4| + 2^4$
$C = |2^4 - |4^3 - 3^4||$

A) C ; A ; B **B)** A ; B ; C **C)** A ; C ; B
D) C ; B ; A **E)** B ; A ; C

Ejercicio 12 : Si:

$$K = \sqrt{8 \times 4 - 3 \times 2 - 1} - (-2)^3$$

$$L = \sqrt[3]{729} + \left(3^2\right)^0 - \left(2^2\right)^2$$

Hallar: $L^3 + 12K$

A) 54 **B)** -58 **C)** 60 **D)** 156 **E)** -60

Ejercicio 13 : Efectuar: $27^{2/3} - (-27)^{2/3}$

A) 9 **B)** $9\sqrt{3}$ **C)** 0 **D)** 18 **E)** 12

Ejercicio 14 : Respecto a la potenciación; se afirma:

I. Es conmutativa: $2^3 = 3^2$

II. Es asociativa: $\left(2^3\right)^2 = (2)^{3^2}$

III. Es distributiva: $(4 + 5)^2 = 4^2 + 5^2$

Señale verdadero o falso:

A) VVV **B)** VFV **C)** FVF **D)** FFV **E)** FFF

Ejercicio 15 : Si se tiene que r; p y q son enteros positivos tales que $r + p < q$; entonces. ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es (son) verdadera(s)?

I. $r < q$ y $p < q$ **II.** $r < p + q$
III. $p < q + r$

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** I y II
D) II y III **E)** I, II y III

Ejercicio 16 : A cuál de estos números, si se le resta 108, se obtiene como resultado la suma de las 3 cifras de dicho número?

A) 120 **B)** 122 **C)** 117 **D)** 121 **E)** 131

Ejercicio 17 : La suma de dos números es 59; su cociente es 6 y el residuo es 3. ¿Cuál es el número mayor?

A) 48 **B)** 51 **C)** 45 **D)** 27 **E)** 8

Ejercicio 18 : El cociente de una división es 3. Indicar cuál será el nuevo cociente si al dividendo se le multiplica por 3 y al divisor se le divide también por 3.

A) 27 **B)** 9 **C)** 18 **D)** 3 **E)** N.A.

Ejercicio 19: El cociente de la división de dos números es 28 y el residuo es 16. Si se suman dos unidades el dividendo, el cociente aumenta en 1 y la división se hace exacta. ¿Cuál es el dividendo?

A) 520 **B)** 521 **C)** 236
D) 523 **E)** Imposible

Ejercicio 20: En la siguiente suma las cifras representan dígitos:

$$\begin{array}{r} \overline{AB} + \\ \overline{CA} \\ \hline 111 \end{array}$$

Calcular: $\overline{BA} + \overline{AC}$

A) 111 **B)** 120 **C)** 102 **D)** 121 **E)** N.A.

Ejercicio 21: La suma de los tres términos de una resta es 19 456 y el minuendo es el cuádruple del sustraendo. Hallar el sustraendo.

A) 2 432 **B)** 1 216 **C)** 3 040 **D)** 608 **E)** 3 648

Ejercicio 22: Si al multiplicador de una multiplicación se le aumenta 3 en la cifra de las decenas; siendo el multiplicando 280. ¿En cuánto aumenta el producto original?

A) 840 **B)** 8 400 **C)** 84 000 **D)** 84 **E)** 2 800

Ejercicio 23: Hallar el multiplicando de una multiplicación, sabiendo que el multiplicador es 62, y que la suma del multiplicando y el producto total es 3 024.

A) 47 **B)** 48 **C)** 49 **D)** 50 **E)** más de 50

Ejercicio 24: Hallar el valor de "n"; sabiendo que al dividir $\overline{aaa}$ entre "n" se obtiene como cociente $\overline{aa}$ y residuo "a".

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** más de 13

Ejercicio 25: ¿Cuál es el mayor número entero que dividido entre 49 da como residuo un número que es el triple de su cociente?

A) 854 **B)** 830 **C)** 832 **D)** 823 **E)** N.A.

Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. D	4. C	5. B
6. E	7. A	8. B	9. A	10. C
11. C	12. E	13. C	14. E	15. E
16. C	17. B	18. A	19. A	20. B
21. A	22. B	23. B	24. A	25. C

4.9 RADICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

4.9.1 RAÍZ DE UN NÚMERO

$5^2 = 25$; El número 5, que elevado al cuadrado dá 25, es la **raíz cuadrada** de 25.

$4^3 = 64$; El número 4, que elevado al cubo dá 64, es la **raíz cúbica** de 64.

$2^4 = 16$; El número 2, que elevado a la cuarta potencia dá 16, es la **raíz cuarta** de 16.

En General:

$a^n = x$;El número "a" que elevado a la enésima potencia dá x, es la **raíz enésima** de "x".

4.9.2 RAÍZ ENÉSIMA

La raíz enésima de un número es otro número que elevado a la potencia enésima dá por resultado el número propuesto.

Osea: $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a$

Así:

7 es la raíz **cuadrada** de 49 ; porque: $\mathbf{7^2 = 49}$

4 es la raíz **cúbica** de 64 ; porque: $\mathbf{4^3 = 64}$

3 es la raíz **cuarta** de 81 , porque: $\mathbf{3^4 = 81}$

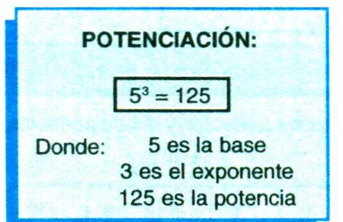
En General: "a" es la raíz enésima de "x" ; porque: $a^n = x$

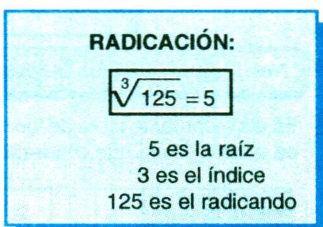
Dado el ***Ejemplo***: $\sqrt[3]{64} = 4$

* **El Número 64** ; cuya cúbica se desea hallar, se llama **Radicando.**
* **El Número 3** ; que nos indica cuantas veces hay que multiplicar la raíz por si misma para obtener el radicando, se llama **Índice de la Raíz.**
* **En Número 4** ; que al elevar a la potencia indicada por el índice de la raíz, nos da el radicando, se llama **Raíz.**
* **El Signo** Que índica la radicación es el signo radical $\sqrt{\ }$

4.9.3 RELACIONES ENTRE LA POTENCIA Y LA RADICACIÓN

Como se ha podido observar, la radicación es una operación **Inversa** a la potenciación. Los tres elementos de una potenciación toman distinto nombre cuando se trata de una radicación, como se puede ver en el siguiente esquema.





4.9.4 Raíz Exacta:

Se dice que una raíz es exacta cuando al ser elevado a la potencia que indica el índice del radical da como resultado el radicando.

Así: decimos que 9, es la raíz cuadrada exacta de 81 porque: $9^2 = 81$

5 es la raíz cúbica exacta de 125 porque: ➠ $5^3 = 125$.

Recuerda que: *Los números que tienen raíz cuadrada exacta se llaman **Cuadrados Perfectos** y aquellos números que tienen raíz cúbica exacta se llaman **Cubos Perfectos**.*

4.9.5 REGLA DE LOS SIGNOS

1º La raíz de orden par de un número positivo, tiene 2 valores reales opuestos:

Ejemplos: $\sqrt{36} = \pm 6 \Rightarrow \sqrt[2]{36} = \pm 6 \Rightarrow$ ya que: $(\pm 6)^2 = 36$

El número 2 se sobre entiende.

$\sqrt[4]{16} = \pm 2 \Rightarrow$ ya que: $(\pm 2)^4 = 16$

2º La raíz de orden par de un número negativo no es un número real,

Ejemplo: $\sqrt{-4}$ ⇨ su raíz no es 2 ni -2 ; ya que $(\pm 2)^2 \neq -4$

$\sqrt{-4}$ ⇨ es un número imaginario, este será tratado más adelante.

3º La raíz de orden impar de un número, tiene el mismo signo del número.

Ejemplos: $\sqrt[3]{8} = 2$ ⇨ ya que: $2^3 = 8$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ ⇨ ya que: $(-2)^5 = -32$

4.9.6 RAÍZ ARITMÉTICA

El valor positivo de la raíz de índice par de un número positivo se llama valor aritmético de la raíz o raíz aritmética. Teniendo en cuenta esta idea, podemos escribir:

$$\sqrt{36} = 6 \quad ; \quad \sqrt{49} = 7 \quad ; \quad \sqrt{16x^2} = 4x$$

Nota: En este capítulo se estudiarán sólo las raices aritméticas, osea las raices positivas.

Es útil recordar la tabla de los diez primeros cuadrados perfectos y cubos perfectos, pues lo es también de la raíz cuadrada y cúbica.

Números	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubos	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000

4.9.7 PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

1º **Propiedad de la Monotomía**: Si se extrae la raíz del mismo índice a ambos miembros de una desigualdad de números naturales, se obtiene otra disigualdad del mismo sentido que el de la dada.

Es decir: $\textbf{Si: } a > b \rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; $\textbf{Si: } a < b \rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Ejemplos:

a). Si: $16 > 9 \Rightarrow \sqrt{16} > \sqrt{9} \quad \therefore \boxed{4 > 3}$

b). Si: $25 < 64 \Rightarrow \sqrt{25} < \sqrt{64} \quad \therefore \boxed{5 < 8}$

2º **Propiedad Distributiva**:

I) **Con Respecto al Producto**: La raíz enésima de un producto indicado de números naturales es igual al producto de las raices enésimas de los factores.

Es decir:

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$$

Donde: $\begin{cases} n \in IN / IN > 1 \\ a, b \text{ y } c \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

Ejemplos:

$$\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$$

$$\sqrt{25 \times 64 \times 4} = \sqrt{25} \times \sqrt{64} \times \sqrt{4} = 5 \times 8 \times 2 = 80$$

$$\sqrt[3]{64 \times 125} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{125} = 4 \times 5 = 20$$

II) **Con Respecto al Cociente Exacto**: La raíz enésima de un cociente exacto de números naturales es igual al cociente de las raices enésimas del dividendo y del divisor.

Es decir:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Donde: $\begin{cases} n \in IN / IN > 1 \\ a, b \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

Ejemplos:

a). $\sqrt{\dfrac{16}{4}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\cancel{4}}{\cancel{2}} = \textcircled{2}$ b). $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)$

Observaciones:

a). $\sqrt[n]{a} \neq \sqrt[a]{n} \Rightarrow \sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3} \Rightarrow 2 \neq \sqrt[8]{3}$

b). $\sqrt[n.m]{A} \neq \sqrt[n]{A} . \sqrt[m]{A} \Rightarrow \sqrt[3.2]{64} \neq \sqrt[3]{64} . \sqrt[2]{64} \Rightarrow \underbrace{\sqrt[6]{64}}_{2} \neq \underbrace{4 \; . \; 8}_{32}$

4.9.8 RAÍZ ENTERA

Los números naturales como: 4, 9, 16, 25, 36, etc. tienen raíz cuadrada exacta se llaman **Cuadrados Perfectos**, y aquellos como 8, 27, 64, 125, etc. tienen raíz cúbica exacta se llaman **Cubos Perfectos**, pero hay infinidad de números que no son ni cuadrados perfectos, ni cubos perfectos y que por tanto no tienen raíz cuadrado o raíz cúbica exacta, cada uno de estos números está comprendido entre dos cuadrados perfectos.

Así: 8	está comprendido	entre 4 y 9	17	está comprendido	entre	16 y 25
26	está comprendido	entre 25 y 36	38	está comprendido	entre	36 y 49

El hecho de que un número natural no tenga raíz cuadrada exacta significa; que no existe número natural alguno que elevado al cuadrado de como resultado el radicando. Se dice entonces que su raíz cuadrada es **Inexacta**. Se ha convertido en llamar raíz cuadrada entera de un número natural.

Raíz Cuadrada Entera de un Número es la raíz del Mayor Cuadrado Perfecto contenido en él.

Asi: Dado el número 147 el mayor cuadrado perfecto contenido en el es 144, cuya raíz cuadrada es 12, siendo éste la raíz entera de 147.

* 5 es la raíz cuadrada entera de 26, porque 5 es la raíz cuadrada exacta de 25.

4.9.9 RESTO DE LA RAÍZ CUADRADA ENTERA.

Se llama resto de una raíz cuadrada entera a la diferencia entre el radicando y el cuadrado de la raíz hallada.

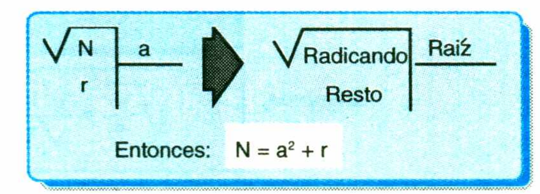
Así: 2 es la raíz cuadrada entera de 8 ; y el resto es: → $8 - 2^2 = 4$

5 es la raíz cuadrada entera de 26 ; y el resto es: → $26 - 5^2 = 1$

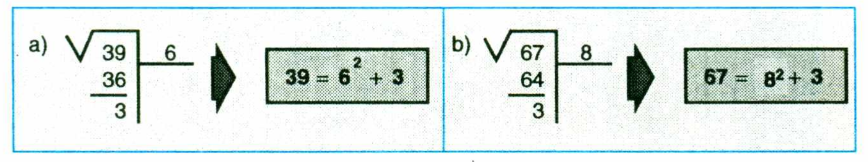
- **Propiedad Fundamental de la Raíz Entera.**

En toda raíz cuadrada entera el radicando es igual al cuadrado de la raíz, más el resto.

O sea si:



Ejemplos:



- Esta propiedad fundamental de la raíz cuadrada nos lleva a la comprobación de una raíz cuadrada.

- **Raíz Cuadrada de un Número Natural Mayor que 100**.

Para extraer la raíz cuadrada de un número natural mayor que 100 se procede de la siguiente manera:

Se divide el número dado en grupos de dos cifras empezando por la derecha, el último grupo, puede tener una o dos cifras.

Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda y esta será la primera cifra de la raíz. Esta cifra se eleva al cuadrado y este cuadrado se resta de dicho primer grupo.

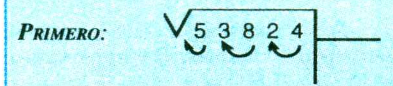
A la derecha del resto se coloca el grupo siguiente, se separa con una **Coma** la primera cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda lo dividimos por el duplo de la raíz hallada. El cociente representará la cifra siguiente de la raíz o una cifra mayor. Para probar si esta cifra es buena se le escribe a la derecha del duplo de la raíz hallada y el número asi formado se multiplica por la cifra que se comprueba.

Si este producto se puede restar del número del cual separamos la primera cifra de la derecha la cifra es buena y se sube a la raíz, si no se puede restar se le disminuye una unidad o más hasta que el producto se pueda restar. Hecho esto se resta dicho producto, a la derecha del resto se escribe el grupo siguiente y se repiten las operaciones anteriores hasta haber bajado el último grupo o periodo.

Ejemplo 1: Extraer la raíz cuadrada de: 53 824

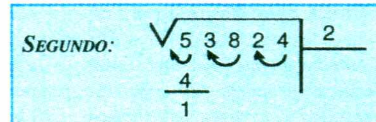
Explicación:

PRIMERO:



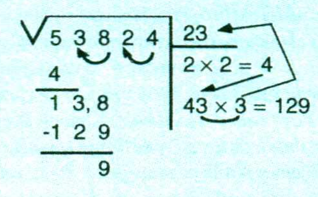
Se divide el número 53 824 en grupos de 2 cifras empezando por la derecha, el último grupo puede tener una o dos cifras.

SEGUNDO:



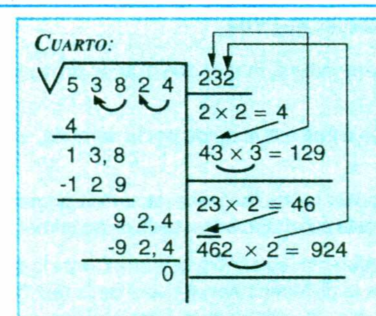
*Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo, osea la raíz cuadrada de 5, que es 2, lo elevamos al cuadrado y nos da 4, que **restado** del primer grupo nos da 1 de resto.*

TERCERO:



A la derecha del 1 bajamos el segundo grupo 38 y se forma el número 138 separamos con una coma la cifra de la derecha y queda asi 13,8; lo que queda a la izquierda que es 13, lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 4 y nos da de cociente 3. Osea: 13 : 4 = 3 para saber si ésta cifra es buena lo escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 43 que lo multiplicamos por la misma cifra siendo el producto 129 como este producto se puede restar de 138 lo restamos y subimos el 3 a la raíz. La resta nos da 9.

CUARTO:

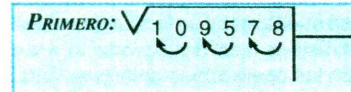


A la derecha del resto 9, escribimos el siguiente grupo 24 y se forma el número 924, separamos su primera cifra de la derecha con una coma y queda 92,4 y dividimos 92 entre el duplo de la raíz 23 que es 46 y nos da de cociente 2; o sea (92 : 46 = 2). Para saber si esta cifra es buena la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 462 que lo multiplicamos por la misma cifra 2. Siendo el producto 924, como este producto se puede restar de 924 lo restamos y subimos el 2 a la raíz, la resta nos da cero (0).

Ejemplo 2 : Extraer la raíz cuadrada de: 109 578

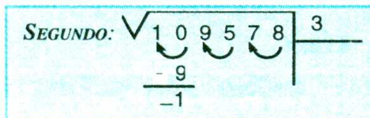
Explicación:

PRIMERO:



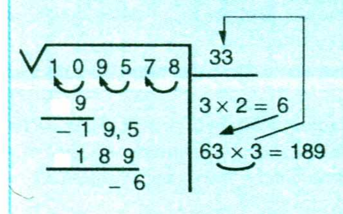
Se divide el número 109 578 en grupos de 2 cifras empezando por la derecha el último grupo, puede tener una o dos cifras.

SEGUNDO:



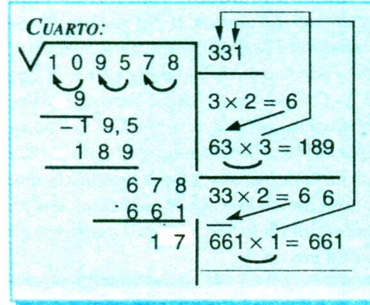
Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo osea la raíz cuadrada de 10, que es 3, lo elevamos al cuadrado y nos da 9, que restado del primer grupo nos da 1 de resto.

TERCERO:



A la derecha del 1 bajamos el segundo grupo 95 y se forma el número 195 separamos con una coma la cifra de la derecha y queda 195; lo que queda a la izquierda 19 lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 6 y nos da de cociente 3; osea: 19 : 6 = 3; para saber si esta cifra es buena la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 63 que lo multiplicamos por la misma cifra, siendo el producto 189 como este producto se puede restar de 195 lo restamos y subimos el 3 a la raíz. La resta nos da 6.

CUARTO:



A la derecha del resto 6, escribimos el siguiente grupo 78 y se forma el número 678 separamos su primera cifra de la derecha con una coma y queda 67,8 y dividimos 67 entre el duplo de la raíz 33 que es 66 y nos da de cociente 1 (67 : 66 = 1). Para saber si esta raíz es buena la escribimos al lado del duplo de la raiz y se forma el número 661 que lo multiplicamos por la misma cifra 1. Siendo el producto 661 como este producto se puede restar de 678 lo restamos y subimos el 1 a la raíz, la resta nos da 17.

- **Prueba de la Raíz Cuadrada.**

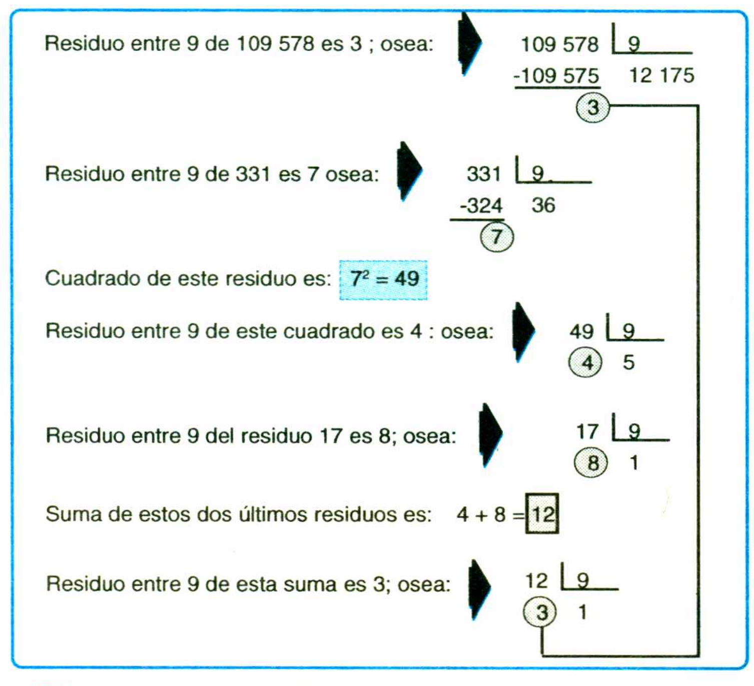
  - Cuadrado de la raíz .... $(331)^2 = 331 \times 331$ = 109 561
  - Residuo o resto .... = + 17

  Radicando = 109 578

- **Prueba del 9 en la Raíz Cuadrada.**

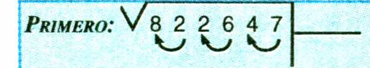
Se halla el residuo entre 9 del radicando y de la raíz. El residuo entre 9 de la raíz se eleva al cuadrado, a este cuadrado se le halla el residuo entre 9 y este residuo se suma con el residuo entre 9 del residuo de la raíz cuadrada si lo hay. El residuo entre 9 de esta suma tiene que ser igual si la operación está correcta, al residuo entre 9 del radicando.

- Del ejemplo anterior tendremos;



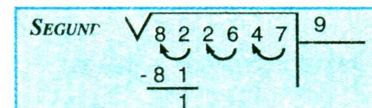
Ejemplo 3 : Extraer la raíz cuadrada de 822 647

Explicación:



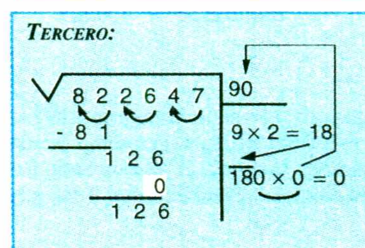
Se divide el número 822 647 en grupos de 2 cifras empezando por la derecha.

SEGUNDO:



Se extrae la raíz cuadrada del primer grupo; osea la raíz cuadrada de 82 que es 9, lo elevamos al cuadrado y nos da 81, que restado del primer grupo nos da 1 de resto.

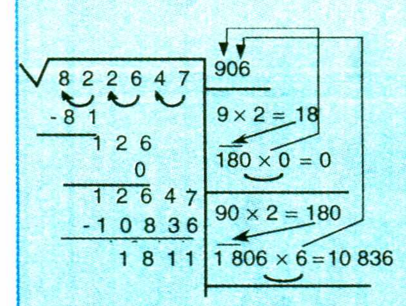
TERCERO:



A la derecha de 1 bajamos el segundo grupo 26 y se forma el número 126, separamos con una coma la cifra de la derecha y queda 12,6 lo que queda a la izquierda 12 lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 18 y nos da de cociente 0. Asi; 12 : 18 = 0 (no se puede dividir) escribimos el 0 al lado del duplo de la raíz y se forma el número 180 que lo multiplicamos por la misma cifra, siendo el producto 0. Como este producto se puede restar de 126 lo restamos y subimos el 0 a la raíz, la resta nos da 126.

CUARTO: *A la derecha del resto 126 escribimos el siguiente grupo 47 y se forma el número 12 647, separamos su primera cifra de la derecha y queda 12 64,7 y dividimos 1 264 entre el doble de raíz 90 que es 180 y nos da de cociente 7 asi:*

1 264 : 180 = 7

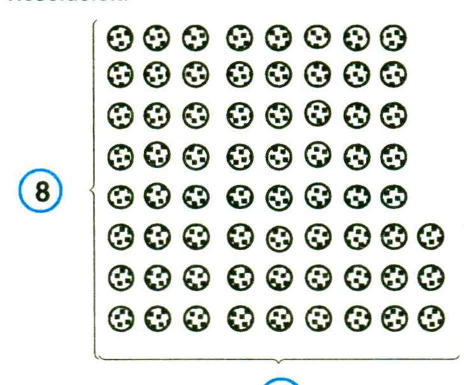


Para probar esta cifra lo escribimos al lado de 180 y formamos el número 1 807 que lo multiplicamos por la misma cifra 7 y nos da 1 807 × 7 = 12 649. Como este producto no se puede restar de 12 647 la cifra 7 no es buena lo rebajamos una unidad y queda 6 probamos el 6 escribiendo al lado de 180 y formamos el número 1 806, este producto lo multiplicamos por 6 nos da 1 806 × 6 = 10 836 y como 10 836 se puede restar de 12 647 lo restamos y subimos el 6 a la raíz; 1 811 es el resto de la raíz.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE NÚMEROS ENTEROS

Problema 1: Con las bolas que tenía un niño formó un cuadrado de 8 filas y 8 columnas, y le sobran 3 bolas. ¿Cuántas tenía?

Resolución:



Número de bolas = 8 x 8 + 3

Número de bolas = $8^2 + 3$

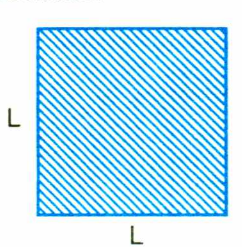
Número de bolas = 64 + 3 = 67

∴ Número de bolas = 67

Rpta: El número de bolas que tenía el niño eran 67.

Problema 2 : ¿Cuál es la longitud del lado de un campo cuadrado cuya área es 1 225 m^2?

Resolución:



Sea: L = lado del campo cuadrado

Por dato: área ◪ = 1 225 m^2

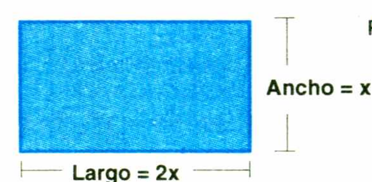
$L^2 = 1\,225\ m^2$

$L = \sqrt{1\,225\ m^2} = 35\ m$ ∴ L = 35 m

Rpta: La longitud del lado del campo cuadrado es 35 m.

Problema 3: ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectángular de 722 m^2 , si el largo es el doble del ancho?

Resolución:



Por dato: área ▭ = 722 m^2

largo × ancho = 722 m^2

2x . x = 722 m^2

$2x^2 = 722\ m^2 \Rightarrow x = \dfrac{722\ m^2}{2} = 361\ m^2$

De donde: $x = \sqrt{361\ m^2} = 19\ m$ ∴ x = 19 m

Rpta: Las dimensiones del terreno rectangular son: largo : 2x = 2 (19 m) = 38 m y ancho : x = 19 m

Problema 4: Halla un número cuya raíz cuadrada entera es 55 y el resto de la raíz es 70.

Resolución:

Sea el número pedido = N

Del enunciado, obtenemos:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & 55 \\ \hline r = 70 & \end{array}$$

Por propiedad: $N = 55^2 + 70 \rightarrow N = 3\,025 + 70$

$N = 3\,095$

Rpta: El número pedido es 3 095

Problema 5: La suma de los cuadrados de dos números es 3 330 y el número mayor es 51. Hallar el número menor?

Resolución:

Sea: Número menor = x

Por dato: número mayor = 51

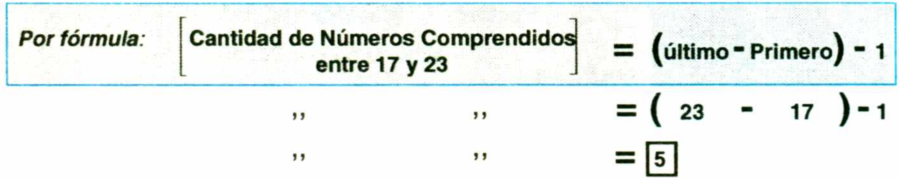
Del enunciado, planteamos: $51^2 + x^2 = 3\,330 \rightarrow 2\,601 + x^2 = 3\,330$

$x^2 = 3\,330 - 2\,601 = 729 \rightarrow x = \sqrt{729} = 27$

$\therefore$ $x = 27$ ***Rpta:*** El número menor es 27

Problema 6: ¿Cuántos números enteros hay comprendidos entre $\sqrt{289}$ y $\sqrt{529}$?

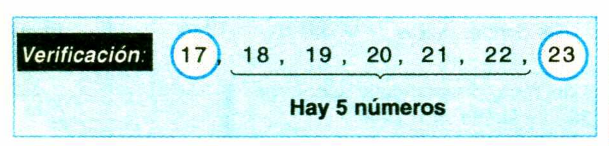
Resolución:



Por fórmula: **[Cantidad de Números Comprendidos entre 17 y 23] = (último - Primero) - 1**

" " **= (23 - 17) - 1**

" " **= 5**



Rpta: Los números enteros comprendidos entre $\sqrt{289}$ y $\sqrt{529}$ son 5.

Problema 7 : Un terreno cuadrado de 169 m^2 de superficie se quiere cercar con alambre que vale S/. 6 el metro ¿Cuánto importa la obra?

Resolución:

Sea: L = lado del terreno cuadrado

Por dato: área ▢ = 169 m^2

$L^2 = 169\ m^2$

$L = \sqrt{169\ m^2} = 13\ m$ ∴ **L = 13 m**

Luego: perímetro ▢ = suma de sus 4 lados

o también; perímetro ▢ = 4L = 4 (13m) = 52 m

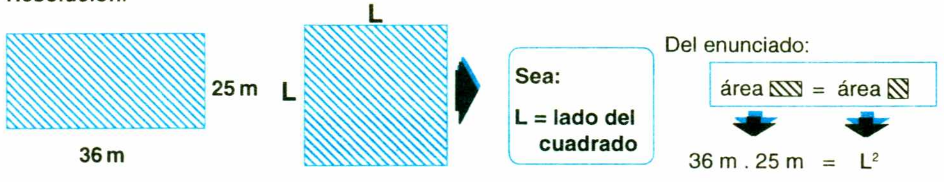
Si el metro de alambre vale S/. 6. los 52 m, importarán:

52 × **S/.** 6 = **S/.** 312

Rpta: La obra importa un valor de S/. 312

Problema 8: ¿Cuál es el lado del cuadrado equivalente a un rectángulo cuyas dimensiones son 25 m y 36 m? (Equivalente significa en este caso de igual área)

Resolución:



$36 \cdot 25\ m^2 = L^2 \rightarrow \sqrt{36 \cdot 25\ m^2} = L \rightarrow \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{m^2} = L$

$6 \cdot 5 \cdot m = L$ ➠ ∴ **30 m = L**

Rpta: El lado del cuadrado es de 30 m

Problema 9: ¿Cuántos números cuadrados perfectos hay entre 3 y 50?

Resolución:

③, ... , ㊿

Recuerda que:

Cuadrados perfectos son aquellos que tienen raíz cuadrada exacta.

Luego: ③, [4], 5 , 6 , 7 , 8 , [9], 10, 11 ,..., [16]; ..., [25]; ..., [36]; ..., [49]; ..., ㊿

Los números cuadrados perfectos comprendidos entre 3 y 50 son: 4, 9, 16, 25, 36 y 49

Nota: *Se dice que un número es cuadrado perfecto cuando es de la forma k^2, o sea: $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; $25 = 5^2$; $36 = 6^2$ y $49 = 7^2$.*

Problema 10 : El menor número natural que multiplicado por 60 de un cuadrado perfecto es:

Resolución:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Falta un factor 5 para ser 5^2

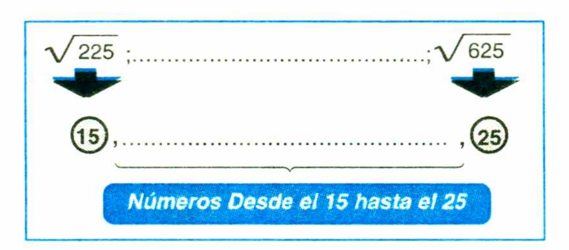
Falta un factor 3 para ser 3^2

Luego los números que faltan son 5 y 3 siendo: $5 \times 3 = 15$ el número que debe multiplicarse con 60 para convertirse en un cuadrado perfecto.

Rpta: El menor número natural que multiplicado por 60 da un cuadrado perfecto es: $5 \times 3 = 15$

Problema 11 : ¿Cuántos números enteros hay desde $\sqrt{225}$ hasta $\sqrt{625}$?

Resolución:



Por Fórmula: **[Cantidad de Números desde el 15 hasta el 25]** = (último - Primero) + 1

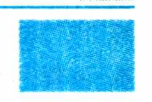
$= (25 - 15) + 1$

$= \boxed{11}$

Verificación: 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25

Hay 11 números

Rpta: La cantidad de números enteros que hay desde $\sqrt{225}$ hasta $\sqrt{625}$ son 11.



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE RADICACIÓN

NIVEL I

Ejercicio 1: Halle el resultado de:

a) $\sqrt{4\times 9}=$

b) $\sqrt{16\times 25}=$

c) $\sqrt{81\times 49}=$

d) $\sqrt{100\times 49}=$

e) $\sqrt{4\times 16}=$

f) $\sqrt{16\times 36}=$

g) $\sqrt{4\times 16\times 25}=$

h) $\sqrt{36\times 9\times 49}=$

i) $\sqrt{64\times 81\times 9}=$

Ejercicio 2: Halle el resultado de:

a) $\sqrt{\dfrac{64}{16}}=$

b) $\sqrt{\dfrac{81}{9}}=$

c) $\sqrt{\dfrac{64}{25}}=$

d) $\sqrt{\dfrac{100}{64}}=$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}=$

f) $\sqrt{\dfrac{169}{144}}=$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}=$

i) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}=$

j) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{1\,296}}=$

k) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}=$

l) $\sqrt{\dfrac{225}{49}}$

Ejercicio 3: Hallar la raíz cuadrada de cada uno de los siguientes números, hacer la comprobación correspondiente.

a) 361
b) 529
c) 841
d) 961
e) 1 846
f) 2 304
g) 3 733
h) 5 329
i) 87 249
j) 53 824
k) 19 606
l) 95 481
m) 819 025
n) 2 839 041
o) 18 671 041
p) 13 704 804

Ejercicio 4: En ejercicios con operaciones combinadas donde no hay signos de colección, empezamos a operar primeramente las potencias y raices, para luego seguir con las multiplicaciónes y divisiones y finalmente efectuamos las sumas y restas. (En radicales de índice par y radicando positivo considerar sólo las raices positivas).

Ejemplo 1:

$$4-8+\underbrace{7\times 3}=4-8+21=-4+21=\boxed{17}$$

Ejemplo 2:

$$\underbrace{(-3)\,.\,6}+\underbrace{(-7)\,(-4)}=(-18)+(+28)$$

$$=-18\quad+\quad 28\quad=\boxed{10}$$

Ejemplo 3:

$$\underbrace{6:3}\times 4+6\times 5=\underbrace{2\times 4}+\underbrace{6\times 5}=8+30=\boxed{38}$$

Ejemplo 4:

$$\underbrace{9\times 8}:4-7\times 6=\underbrace{72:4}-\underbrace{7\times 6}=18-42=\boxed{-24}$$

Ejemplo 5:

$$(-2)\,\underbrace{(-3)^2}+\underbrace{(-2)^3}+\underbrace{\sqrt{49}}=(-2)\,(9)+(-8)+7$$

$$=-18-8+7=\boxed{-19}$$

Ejemplo 6:

$$(-5)\,\underbrace{(-4)^2}+\underbrace{(-2)^4}\,.\,\underbrace{\sqrt[3]{-8}}-3\,\underbrace{(-3)^2}$$

$$=\underbrace{(-5)\,(16)}+\underbrace{(16)\,.\,(-2)}-\underbrace{3\,(9)}$$

$$=\quad -80\quad -\quad 32\quad -\quad 27=\boxed{-139}$$

a) $7+(-3)\,(-4)+(-2)^3\,(6)$

b) $16:8\text{ x }8-(-6)^2:(-9)$

c) $9\text{ x }6:3+(-5)^2\,(-2)^2$

d) $(-20):(4)+(-6)^2-(-7)$

e) $(-1)(-9)^2 - (-3)^4(-2) + 3(-7)$

f) $(-8)(-5) : (-10) + (5^2)(-4)$

g) $(-70) : (-14) \times (-6) + (-2)^6 (-4)^2$

h) $\sqrt{144} \,.\, (-4)^3 : 32 - \sqrt{121} \,.\, (-3)^4 : 27$

i) $\sqrt{3^4} \times (-2)^3 - 6^2 \,.\, (-3)^{-2} + 2^{-1} \,.\, (-4)$

j) $(-11)(-2)^5 + \sqrt{\frac{1}{64}} \times \left(\sqrt{256}\right) - (-2)(3)$

k) $\sqrt{16^3} : (-2)^3 - (-7)^2 \times (-4) + (-9)(-2)^3$

l) $(-50) : (-25) + \sqrt[3]{8^4} \times (-6)^2 + (-3)^4 (-2)$

Ejercicio 5: Halla el número de plantas que hay en un jardin sabiendo que la raíz cuadrada entera de dicho número es 21 y que el resto de la raíz es 17.

Ejercicio 6: La suma de los cuadrados de dos números es 9 700 si el menor de dichos números es 48. ¿Cuál es el mayor?

Ejercicio 7: Un terreno tiene 500 metros de largo y 45 metros de ancho. si se le diera forma cuadrada. ¿Cuáles serán las dimensiones de este cuadrado?

Ejercicio 8: Con las canicas que tenía un niño formó un cuadrado de 15 filas y 15 columnas y le sobraron 7 canicas. ¿Cuántas tenía?

Ejercicio 9: ¿Cuál es la longitud del lado de un campo cuadrado cuya área es 1 444 m^2?

Ejercicio 10: ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de 588 m^2 si el largo es el triple de ancho?

Ejercicio 11: Un terreno cuadrado de 1 024 m^2 de superficie se quiere cercar con alambre que vale S/. 8 el metro. ¿Cuánto importa la obra?

Ejercicio 12: ¿Cuántos números enteros hay comprendidos entre $\sqrt{961}$ y $\sqrt{2\,209}$?

Ejercicio 13: ¿Cuántos números cubos perfectos hay entre 7 y 130?

Recuerda que:

Números cubos perfectos son aquellos que tienen raíz cúbica exacta o también se dice que un número es cubo perfecto cuando tiene la forma de k^3.

Ejercicio 14: ¿Cuántos números cuadrados perfectos hay entre 5 y 90?

Ejercicio 15: El menor número natural que multiplicado por 48 da un cuadrado perfecto es?

Ejercicio 16: El menor número natural que multiplicado por 60 da un cubo perfecto es:

Ejercicio 17: ¿Cuántos números enteros hay desde $\sqrt{1\,849}$ hasta $\sqrt{3\,249}$?

Ejercicio 18: Resuelve:

a) $\sqrt[3]{(-3+5)^2 : (-1)^4 + \sqrt{10^2 - 4^3} - (-7+3) : (-2)} =$

b) $\left(\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-1}\right) : \sqrt[3]{-8} + (-9+3)(-2)^2 + [3-2(-5+3)]\left(-9+2^3\right) =$

c) $\left[-2+5(-1)^3\right] : \sqrt{49} - 3\sqrt[4]{81} + [(-9) : (-5+8)]^0 =$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{125} : \sqrt[3]{-1} + \left[-7+3(-2)^2\right]\sqrt{100} + (-2)^4 : (-2)^2} =$

e) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{2\left[\sqrt{9} + (-5)(-3)\right]} - (-3)(+3)^2 =$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{125} - \sqrt{16} \cdot (-3) - 2(-5)} : \sqrt[4]{10^2 - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{36} + (-1)^3} =$

g) $[5(-3)+2] : \sqrt{169} + \left[-2(-1)^4 + 5\right] \cdot \sqrt[5]{-1} =$

h) $-\left[-9+(-8) : \sqrt[3]{-64}\right] \cdot (-1)^6 + (-7+4)^2(-2) - \sqrt{\sqrt{625}} =$

Clave de Respuestas

1.

a)	± 6	**d)**	± 70	**g)**	± 40
b)	± 20	**e)**	± 8	**h)**	± 126
c)	± 63	**f)**	± 24	**i)**	± 216

2.

a)	± 2	**e)**	$\pm \frac{2}{3}$	**i)**	$\frac{1}{2}$
b)	± 3	**f)**	$\pm \frac{13}{12}$	**j)**	$\pm \frac{5}{6}$
c)	$\pm \frac{8}{5}$	**g)**	$\frac{2}{3}$	**k)**	$\frac{1}{3}$
d)	$\pm \frac{5}{4}$	**h)**	$\frac{4}{5}$	**l)**	$\pm \frac{15}{7}$

3.
- **a)** raíz = 19 ; residuo = 0
- **b)** raíz = 23 ; residuo = 0
- **c)** raíz = 29 ; residuo = 0
- **d)** raíz = 31 ; residuo = 0
- **e)** raíz = 42 ; residuo = 82
- **f)** raíz = 48 ; residuo = 0
- **g)** raíz = 61 ; residuo = 12
- **h)** raíz = 73 ; residuo = 0
- **i)** raíz = 295 ; residuo = 224
- **j)** raíz = 232 ; residuo = 0
- **k)** raíz = 140 ; residuo = 6
- **l)** raíz = 309 ; residuo = 0
- **m)** raíz = 905 ; residuo = 0
- **n)** raíz = 1 684 ; residuo = 3 185
- **o)** raíz = 4 321 ; residuo = 0
- **p)** raíz = 3 702 ; residuo = 0

4.

a)	- 29	**e)**	60	**i)**	- 78
b)	20	**f)**	- 104	**j)**	360
c)	118	**g)**	994	**k)**	260
d)	38	**h)**	- 57	**l)**	416

5. 458

6. 86

7. 150 metros de lado

8. 232 canicas

9. 38 m de lado

10. 14 y 42 m

11. S/. 1 024

12. 15 números

13. Hay 4 cubos perfectos

14. 7 cuadrados perfectos

15. 3

16. 450

17. 15

18.

a)	2	**e)**	30
b)	-29	**f)**	1
c)	-9	**g)**	-4
d)	7	**h)**	-16

¿SABÍAS QUE...

... los diagramas utilizados para representar gráficamente conjuntos, fueron creación de un brillante matemático y lógico británico llamado John Venn (1 834 - 1 923)?

Entre sus obras se destacan Lógica simbólica y Principios de la lógica inductiva.

NÚMEROS RACIONALES Q

5.1 El Conjunto Q de los Números Racionales Como una Extensión del Conjunto Z de los Números Enteros.

El conjunto Q de los Números Racionales se crea como una ampliación del conjunto de los números enteros y hace posible la **división** como operación interna, al mismo tiempo que nos permite dar la medida de una magnitud que no contenga un número exacto de veces a la unidad.

5.1.1 NÚMERO RACIONAL

Un número racional es el formado por una fracción (cociente de dos números: siendo: $b \neq 0$) y todo sus equivalentes.

Los números racionales Q , engloban a:

- ***Enteros:*** (Fracciones que son cocientes exactos: $\frac{20}{5} = 4$)

- ***Fraccionarios:*** [(Fracciones que no sean cocientes exactos: $\frac{12}{5} = 2,4$ y que pueden expresarse en forma de número decimal]

5.1.2 LOS TÉRMINOS DE "EQUIVALENCIA" Y DE "IGUALDAD"

Es conveniente que recuerdes que existe diferencia entre **Igualdad y Equivalencia**. Comúnmente dichos términos se confunden, pero en matemática no; ya que en esta disciplina hemos de emplear siempre un lenguaje preciso y exacto.

Piensa que no es lo mismo tener 5 billetes de S/. 10, que un billete de S/. 50. Aunque, eso si, son equivalentes, tienen el mismo valor. Precisamente por no ser igual, necesitamos muchas veces hacer el cambio; y también precisamente por ser equivalente, representan el mismo valor.

5.1.3 IDEA RESPECTO A FRACCIÓN

- **Partes Iguales de una Cantidad**: El resultado de dividir por 2 se llama **mitad**, el resultado de dividir por 3 se llama **tercio**. El de dividir por 4, se llama **cuarto**. Los resultados de dividir por 5, 6, 7, 8, 9 ó 10 se llaman respectivamente, quinto, sexto, septimo, octavo, noveno o décimo.

  El resultado de dividir por un número mayor que 10 se indica con el nombre del número del divisor terminando en **Avo**.

  Ejemplos:

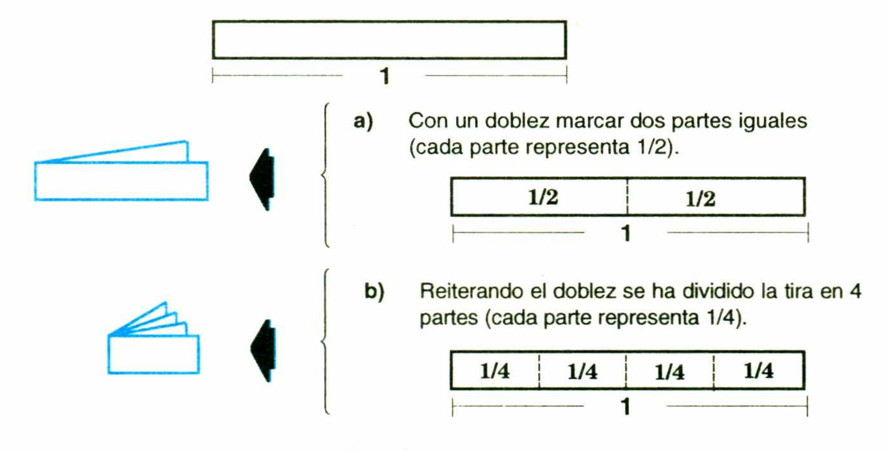
  - El resultado de dividir por 11 se llama **onceavo**; el de dividir por 12 se llama **Doceavo**.
  - El resultado de dividir por 10, 100, 1 000,.... , se llama **décima, centécima, milésima, ... , parte** osea:

$$\frac{\text{Número}}{10} = \text{décima parte del número} \qquad \frac{\text{Número}}{100} = \text{Centésima parte del número}$$

Para indicar la mitad, el tercio, el cuarto, ..., de una cantidad se escribe:

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; .... ***(también se pueden escribir asi: 1/2 ; 1/3 ; 1/4 ; ....)***

Ejemplo 1: Tómese una tira de papel, que representa el 1.



C) Del mismo modo representan $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$ (¿Crees que se puede seguir haciendo dobleces muchos más veces).

Ejemplo 2 : Calcular la mitad de 600 lapiceros, y también el tercio y el quinto.

Resolución:

$\frac{1}{2}$ de 600 lapiceros = 300 lapiceros . (porque: $\frac{600}{2} = 300$)

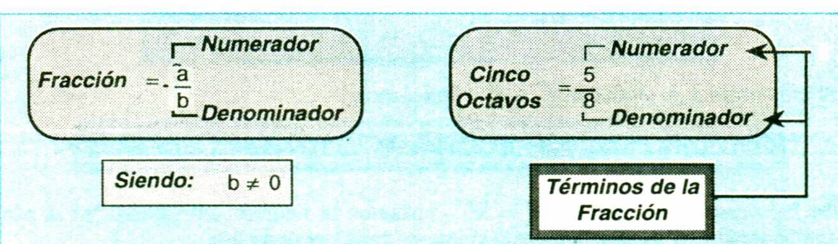
$\frac{1}{3}$ de 600 lapiceros = 200 lapiceros . (porque: $\frac{600}{3} = 200$)

$\frac{1}{5}$ de 600 lapiceros = ... (termina el alumno).

5.2 FRACCIÓN O QUEBRADO

Número fraccionario o quebrado es el que resulta de la reunión de una o varias partes iguales de la **Unidad**.

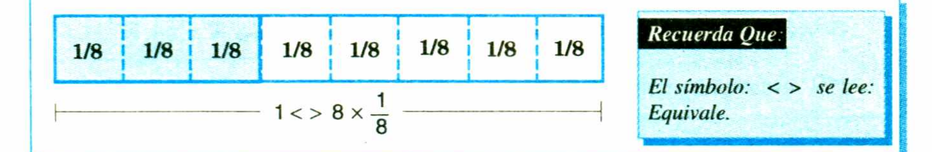
El número fraccionario viene dado por dos números naturales asi:



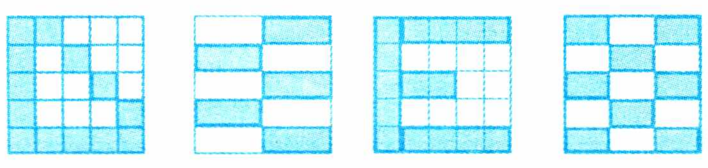
***El denominador**: Indica las partes iguales, en que se ha dividido la **Unidad**.*

***El Númerador**: Indica el número de esas partes que se consideran o se toman de la **Unidad**.*

Fíjate en el dibujo, el rectángulo que representa 1, se ha dividido en 8 partes iguales de las cuales se han tomado 3.



¿Qué fracción representa la parte pintada en cada cuadrado?



Nota: Cuando no se declara qué especie de unidad es la que se ha dividido en partes iguales, resultan números ***Fraccionarios Abstractos****, tales por ejemplo:* $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{9}$; *etc.*

Pero si nos dicen qué clase de cantidad es la que se divide; entonces resultan ***Fracciones Concretas****, tales, por ejemplo:* $\frac{3}{4}$ *de hora;* $\frac{2}{5}$ *de una manzana;* $\frac{7}{9}$ *de un sueldo etc.*

5.2.1 LA FRACCIÓN COMO ELEMENTO DE UN PRODUCTO CARTESIANO

Recordemos que el conjunto de los números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \{......, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

El conjunto de los números enteros sin el **Cero** es:

$$\mathbb{Z}^* = \{......, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

Ahora hallamos el producto: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; obteniendo:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{ ......,(-5,-4); (-4,-3); (-2,-2); (-1,1); (0,2); (2,3); (3,5),...... \}$$

De los pares ordenados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$; hallamos la relación a/b siendo: "a" la primera componente y "b" la segunda componente de cada par ordenado.

Luego; la relación entre los componentes de cada par ordenado son;

$$\mathbb{Q} = \left\{ ......, \frac{-5}{-4}, \frac{-4}{-3}, \frac{-2}{-2}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, ... \right\}$$

Simbólicamente se representa así: $\mathbb{Q} = \{ x / x = \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}\ ,\ b \in \mathbb{Z}^* \}$

("$\mathbb{Q}$" es la agrupación de todo los números racionales)

Nota: Como se habrá observado "$\mathbb{Q}$" incluye al conjunto por lo que se establece que:

$IN \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ *; por la propiedad* ***TRANSITIVA*** *de la inclusión:* $IN \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$

IN

IN : Números Naturales.

$\mathbb{Z}$ ***: Números Enteros.***

$\mathbb{Q}$ ***: Números Racionales.***

5.2.2 FRACCIONES EQUIVALENTES

En ocaciones, nos encontramos con fracciones, que aparentemente no son iguales, pero que son equivalentes.

¿Cómo saber si dos fracciones son equivalentes?

Decimos que dos fracciones son equivalentes si, reducidas a un común denominador, resultan dos fracciones iguales.

Ejemplo 1: Averiguar si son equivalentes las fracciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$

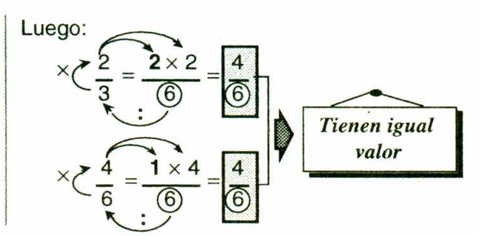
Resolución:

Damos común denominador a 3 y 6, veamos:

3 - 6	2	
3 - 3	3	
1 - 1		

Común Denominador = $2 \times 3 = 6$

Luego:



∴ Las fracciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ si son equivalentes

Graficamente: Los dos rectángulos dibujados son iguales, además tienen pintado igual superficie.

Ejemplo 2: Averiguar si son equivalentes las fracciones: $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$

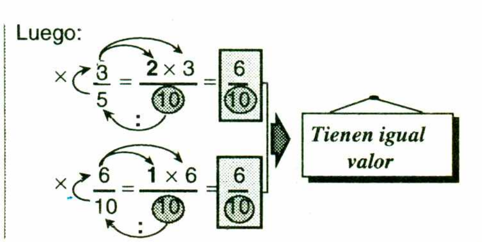
Resolución:

Damos común denominador a 5 y 10.

5 - 10	2	
5 - 5	5	
1 - 1		

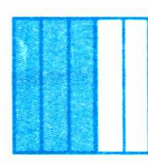
Común Denominador = $2 \times 5 = 10$

Luego:

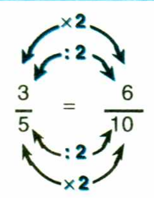


$\therefore$ Las fracciones: $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ son equivalentes.

Graficamente:
Los dos cuadrados dibujados son iguales, además tienen pintado igual superficie.



$$\frac{3}{5} \underset{:2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{6}{10}$$



FRACCIONES EQUIVALENTES

Nota: Si en una fracción se multiplica o divide el numerador y el denominador por el mismo número, la fracción que resulta es equivalente a la primera.

Ejemplos:

a). $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ porque : $\frac{4}{12} = \frac{1 \times \boxed{4}}{3 \times \boxed{4}}$

b). $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque : $\frac{2}{5} = \frac{2 \times \boxed{3}}{5 \times \boxed{3}}$

c). $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ porque : $\frac{8 : \boxed{4}}{20 : \boxed{4}} = \frac{2}{5}$

d). $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ porque : $\frac{14 : \boxed{7}}{21 : \boxed{7}} = \frac{2}{3}$

- **Criterio para Descubrir si Dos Fracciones son Equivalentes:**

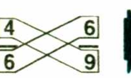
Dos fracciones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si, se verifica la igualdad:

$$\boxed{a \times d = b \times c}$$

Ejemplo 1 : Dí si son equivalentes:

$\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$

Resolución:



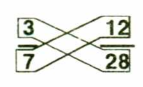
$\underbrace{4 \times 9}= \underbrace{6 \times 6}$

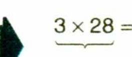
$\boxed{36 = 36}$

Ejemplo 2 : Dí si son equivalentes:

$\frac{3}{7}$ y $\frac{12}{28}$

Resolución:





Observación: *La equivalencia de dos fracciones se indica con el símbolo < > que se lee: **"Es Equivalente a"***

Ejemplos: $\frac{3}{4} <> \frac{6}{8}$; $\frac{2}{3} <> \frac{6}{9}$

* *En la práctica para indicar la equivalencia de dos fracciones se empleará el signo = leyéndose **"Es igual a"** en vez de **"Es equivalente a"**.*

5.2.3 CLASE DE FRACCIONES EQUIVALENTES

La clase de fracciones equivalentes está constituido por todas las fracciones equivalentes entre si:

Observa los siguientes ***ejemplos:***

* Clase de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ ▶ $\left(\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots\ldots\ldots \textit{Infinitos}\right)$ (×2, ×2, ×2)

* Clase de fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ ▶ $\left(\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots\ldots\ldots \textit{Infinitos}\right)$ (×2, ×3, ×4)

* Clase de fracciones equivalentes a $\frac{-2}{5}$ ▶ $\left(\frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} = \frac{-6}{15} = \frac{-8}{20} = \ldots\ldots\ldots \textit{Infinitos}\right)$

* ....
* ....
* ....

Infinitas clases de equivalencia.

Tarea: *Escribe en tu cuaderno de trabajo tres fracciones equivalentes a 3/4; y otras tres fracciones equivalentes a 5/3.*

5.2.4 REPRESENTANTE CANÓNICO DE UN NÚMERO RACIONAL

Sabes que un mismo número racional viene representado por muchas fracciones (infinitas). pues bién, **llamamos representante canónico de un número racional a la fracción de denominador positivo, más sencilla (simplificada) de todas las de su clase.**

Ejemplo: Las fracciones equivalentes: $\frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{18}{27} = \frac{8}{12} = \ldots\ldots,$

Representan el mismo número racional. La fracción más sencilla (simplificada) de todas ellas es 2/3. por lo tanto, el representante canónico del número racional, que representan dichas fracciones, es 2/3. (Recuerda que, para expresar una fracción en su forma más sencilla o simplificada, se divide el númerador y denominador de la misma por su máximo común divisor).

Escribe: Cuál es el representante canónico del número racional representado por la clase de fracciones: $\left(\ldots\ldots\ldots \frac{9}{6} = \frac{27}{18} = \frac{81}{54} = \frac{243}{162} = \ldots\ldots\ldots\right).$

Si la fracción tuviese denominador negativo, puede convertirse en positivo multiplicando numerador y denominador por - 1. Asi, por ejemplo, el representante canónico de la clase de fracciones:

a). $\left\{ \ldots\ldots, \frac{1}{-1}, \frac{2}{-2}, \frac{3}{-3}, \ldots\ldots \right\} = \frac{-1}{1}$

Se multiplica Numerador y Denominador por -1, obteniendo: $\frac{-1}{1}$

b). $\left\{ \ldots\ldots, \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \ldots\ldots \right\} = \frac{1}{4}$

c). $\left\{ \ldots\ldots, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{6}, \frac{-6}{9}, \frac{-8}{12}, \ldots\ldots \right\} = \frac{-2}{3}$

Representantes Canónicos

5.2.5 FRACCIONES RECÍPROCAS

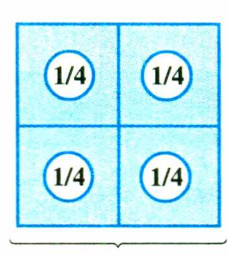
Son las que tienen los términos iguales o invertidos.

Ejemplos:

$\frac{5}{8}$ y $\frac{8}{5}$ *(Son fracciones recíprocas)*

$\frac{3}{7}$ y $\frac{7}{3}$ *(Son fracciones recíprocas)*

5.2.6 FRACCIONES PROPIAS E IMPROPIAS



4/4 (Fracción Impropia)

_ El cuadrado de la figura le hemos dividido en cuatro partes iguales.

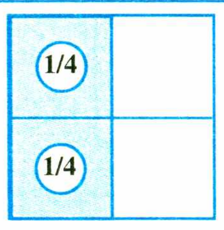
Si te pregunto cuántas partes hay de negro, me responderas que cuatro.

De las cuatro partes, cuatro son negros, también me prodrías responder que todo el cuadrado, esto es, la **Unidad Entera**, es negro.

- Si divides una manzana en cinco partes y te comes las cinco, te has comido 5/5 de manzana, esto es, la manzana entera.

- Toma una galleta, divídela en 8 partes. Si te comes las 8 partes, esto es 8/8 de galleta, te habrás comido la galleta entera.

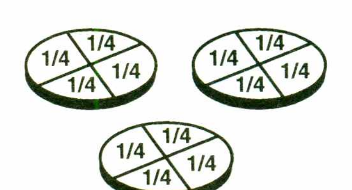
Asi pues, las fracciones que tienen el **Numerador** igual al **Denominador** valen la Unidad, y si valen la Unidad, realmente, no son una fracción; por ello se les llama **Fracciones Impropias**.



Si las fracciones valen menos que la **Unidad**, como $\frac{2}{4}$. Se llaman **Fracciones Propias**.

2/4 (Fracción Propia)

Fíjate el Dibujo.



- Son tres galletas divididos en cuatro partes iguales, si tomas dos partes de galleta 2/4, has tomado una fracción **Menor que la Unidad**, pero si tomas 10 partes de galletas 10/4, has tomado una fracción mayor que la **Unidad**, pues has tomado dos galletas y media. Las fracciones que; como 10/4, valen más que la **Unidad**, también se llaman **Fracciones Impropias.**

Fracciones Propias: *Son aquellas que valen menos que la* ***UNIDAD.***

Ejemplos: $\frac{4}{7}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{23}{36}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{35}{43}$

También se sabe decir: que una ***Fracción Propia*** *es aquella, cuando el numerador es menor que el denominador.*

Fracción propia $= \frac{a}{b}$ ***; Siendo: a < b***

Fracciones Impropias: *Son aquellas fracciones que valen igual o más que la* ***UNIDAD.***

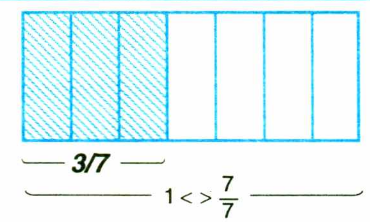
Ejemplos: $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{13}{11}$; $\frac{36}{23}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{43}{35}$

También se sabe decir: que una ***Fracción Impropia*** *es aquella, cuando el numerador es mayor que el denominador.*

Fracción Impropia $= \frac{a}{b}$ ***; Siendo: a > b***

I) Representar por Medio de Gráficos las Fracciones siguientes.

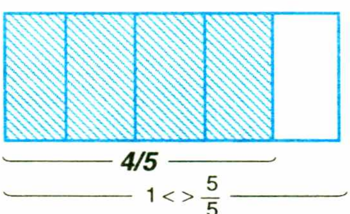
a). $\frac{3}{7}$; Significa que la figura geométrica que se tomará en este caso es el rectángulo, que se va ha dividir en 7 partes iguales de las cuales se achurarán (sombrearán) 3 de ellos. (Ver figura).



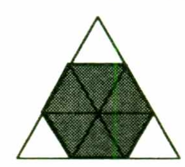
$\therefore$ $\frac{3}{7}$ = ***Fracción Propia***

b) $\frac{4}{5}$; Significa que la figura geométrica (rectángulo), se va ha dividir en 5 partes iguales de las cuales se sombrearán 4.

$\therefore$ $\frac{4}{5}$ = ***Fracción Propia***



c) $\frac{6}{9}$; significa que la figura geométrica (triángulo). se va ha dividir en 9 partes iguales de las cuales se sombrearán 6.



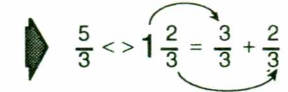
- Toda la figura = $\frac{9}{9} <> 1$
- Parte sombreada = $\frac{6}{9}$

$\therefore$ $\frac{6}{9}$ = ***Fracción Propia***

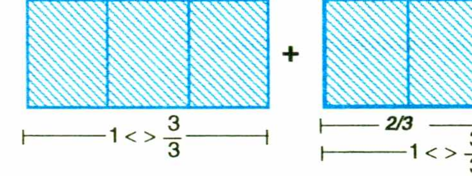
d) $\frac{5}{3}$; en este caso como el numerador es mayor que el denominador convertimos dicha fracción a mixto, veamos:

$$5 \,\underline{|\,3}\quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$
$$2 \quad 1$$

$\frac{5}{3} <> 1\frac{2}{3}$; significa que en gráfica habrá un rectángulo completo (3/3) más otro rectángulo donde se ubicarán los 2/3 restantes, asi:



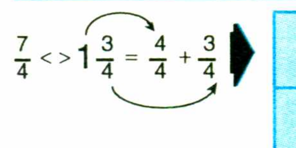
$$\frac{5}{3} <> 1\frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$$

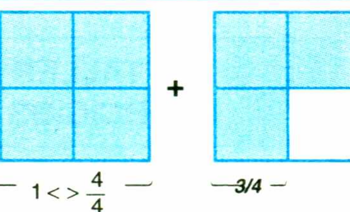


$\therefore$ $\frac{5}{3}$ = ***Fracción Impropia***

e) $\frac{7}{4}$; lo convertimos a mixto, veamos:

$$7 \,\underline{|\,4}\quad \Rightarrow \quad \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$
$$3 \quad 1$$

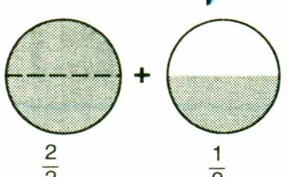




$\therefore$ $\frac{7}{4}$ = ***Fracción Impropia***

f) $\frac{3}{2}$; lo convertimos a mixto; veamos: $3 \underline{\lfloor 2}$; $1 \quad 1$ ▶ $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} <> 1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ ▶



$\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ = ***Fracción Impropia***

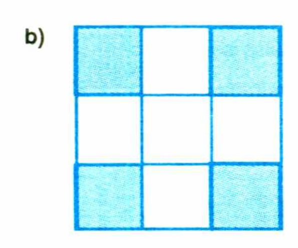
II) Escribe la Fracción que Representa la Parte Achurada (Sombreada) de los siguientes Dibujos.

a)

- *La figura se ha dividido en 8 partes iguales de las cuales se han achurado 3.*

  Luego: La parte achurada representa los 3/8.

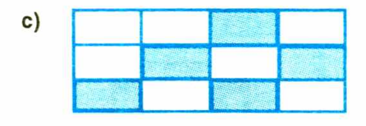
b)



- *La figura se ha dividido en 9 partes iguales de las cuales se han achurado 4.*

  Luego: La parte achurada representa los 4/9.

c)



- *La figura se ha dividido en 12 partes iguales de las cuales se han achurado 5.*

  Luego: La parte achurrada representa los 5/12.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 36

Ejercicio 1 : Copie cada conjunto de fracciones equivalentes y añada a cada uno tres fracciones equivalentes más.

a). $\left\{\frac{1}{6}; \frac{2}{12}; \frac{3}{18}; \ldots\ldots\right\}$	c). $\left\{\frac{3}{2}; \frac{6}{4}; \frac{24}{16}; \ldots\ldots\right\}$	e). $\left\{\frac{1}{5}; \ldots\ldots\ldots\right\}$
b). $\left\{\frac{3}{8}; \frac{6}{16}; \frac{9}{24}; \ldots\ldots\right\}$	d). $\left\{\frac{4}{9}; \frac{12}{27}; \frac{24}{54}; \ldots\ldots\right\}$	f). $\left\{\frac{2}{7}; \ldots\ldots\ldots\right\}$

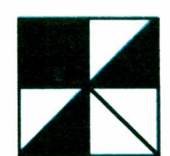
Ejercicio 2 : En cada conjunto, una de la fracciones no es equivalente a ninguna de las otras. ¿Cuál es esa fracción?

a). $\left\{\frac{1}{3}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}; \frac{6}{18}; \frac{7}{24}\right\}$	c). $\left\{\frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \frac{8}{12}; \frac{12}{16}; \frac{15}{20}\right\}$	e). $\left\{\frac{3}{8}; \frac{6}{16}; \frac{9}{24}; \frac{12}{36}; \frac{15}{40}\right\}$
b). $\left\{\frac{5}{4}; \frac{10}{6}; \frac{15}{12}; \frac{20}{16}; \frac{25}{20}\right\}$	d). $\left\{\frac{4}{18}; \frac{6}{24}; \frac{5}{20}; \frac{3}{12}; \frac{2}{8}\right\}$	f). $\left\{\frac{2}{7}; \frac{6}{21}; \frac{10}{35}; \frac{16}{56}; \frac{9}{28}\right\}$

Ejercicio 3 : Para cada figura, escriba un par de fracciones equivalentes a la fracción que resulta de comparar el área de la región achurada con respecto.

Ejemplo:

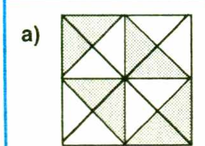
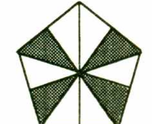
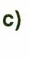
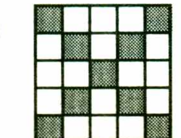
- El cuadrado se ha dividido en 8 partes iguales de los cuales se han achurado 4 de ellas; siendo la fracción entre las partes achuradas y el cuadrado: $\frac{4}{8}$

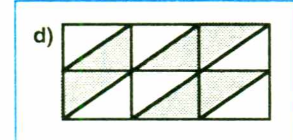


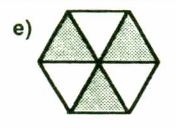
Luego: El par de fracciones equivalentes a $\frac{4}{8}$ son las siguientes:

$$\frac{4}{8} = \frac{4\times 2}{8\times 2} = \frac{8}{16}; \quad \frac{4}{8} = \frac{4\times 3}{8\times 3} = \frac{12}{24}$$

$\therefore$ El par de fracciones equivalentes a $\frac{4}{8}$ son: $\frac{8}{16}$ y $\frac{12}{24}$

a) 	**b)**  	**c)** 





Ejercicio 4 : Diga qué parte del conjunto de cuadraditos se ha indicado con el número señalado.

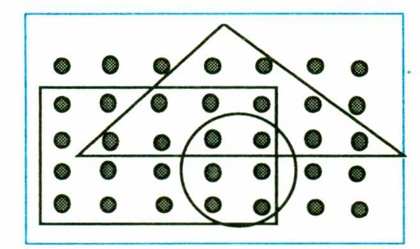
1	1	1	2	2
2	2	2	2	2
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3

a) 1 ...... (—)

b) 2 ...... (—)

c) 3 ...... (—)

Ejercicio 5 : Diga qué parte del conjunto de puntos está dentro.



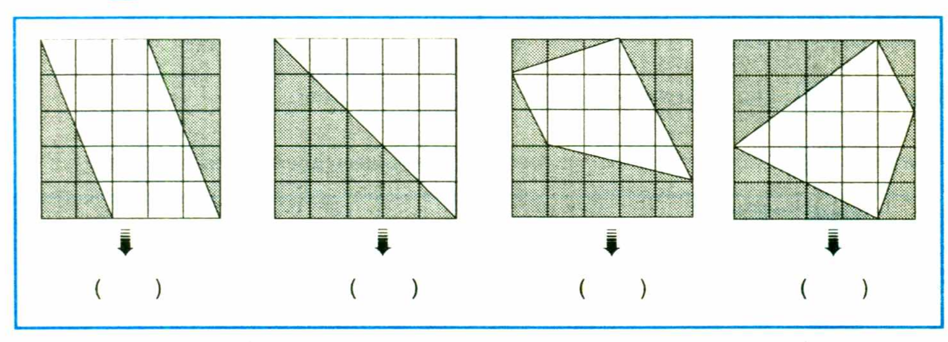
a) del triángulo ... ( )

b) del rectángulo ... ( )

c) de la circunferencia ... ( )

d) del rectángulo y la circunferencia ... ( )

Ejercicio 6 : Escriba una fracción que nos diga qué parte de cada cuadrado se ha sombreado.



Ejercicio 7 : Representa por medio de figuras geométricas (rectángulos, cuadrados, círculos, etc.) las fracciones siguientes:

a). $\frac{6}{8}$	c). $\frac{3}{10}$	e). $\frac{8}{13}$	g). $\frac{4}{3}$	i). $\frac{11}{9}$
b). $\frac{7}{9}$	d). $\frac{4}{7}$	f). $\frac{9}{5}$	h). $\frac{5}{2}$	j). $\frac{8}{6}$

Ejercicio 8 : Considera los siguientes pares de fracciones y dí si son equivalentes o no lo son:

a). $\frac{7}{8}$ y $\frac{14}{16}$	c). $\frac{21}{42}$ y $\frac{1}{2}$	e). $\frac{13}{27}$ y $\frac{26}{56}$
b). $\frac{3}{9}$ y $\frac{6}{18}$	d). $\frac{4}{-6}$ y $\frac{6}{-9}$	f). $\frac{17}{24}$ y $\frac{34}{49}$

Ejercicio 9 : De las siguientes fracciones, hay una que no es equivalente a 3/8. Dí cuál es:

$$\frac{21}{56};\ \frac{39}{104};\ \frac{33}{88};\ \frac{18}{48};\ \frac{36}{96};\ \frac{30}{48}$$

Ejercicio 10 : Completa en cada caso la fracción para que resulte equivalente a la otra fracción.

a). $\frac{3}{9} = \frac{\square}{54}$	c). $\frac{3}{8} = \frac{39}{\square}$	e). $\frac{\square}{72} = \frac{3}{8}$
b). $\frac{7}{16} = \frac{\square}{80}$	d). $\frac{7}{11} = \frac{\square}{132}$	f) $\frac{3}{\square} = \frac{48}{64}$

Ejercicio 11 : Halla tres fracciones equivalentes a la fracción $\frac{5}{1}$ que tengan, respectivamente, como denominador 3, 12y 16.

Ejercicio 12 : Qué nombre reciben cada par de fracciones, que acontinuación se dan:

a). $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$	c). $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{11}$	e). $\frac{9}{5}$ y $\frac{5}{9}$	g). $\frac{23}{12}$ y $\frac{40}{7}$
b). $\frac{8}{4}$ y $\frac{4}{8}$	d). $\frac{19}{21}$ y $\frac{29}{43}$	f). $\frac{13}{34}$ y $\frac{34}{13}$	h). $\frac{71}{49}$ y $\frac{50}{36}$

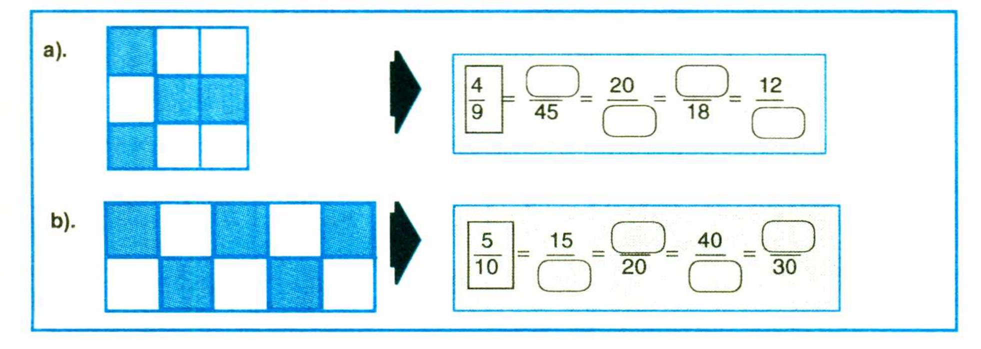
Ejercicio 13 : Escribe 5 fracciones mayores que la unidad, y otras 5 menores que la unidad.

Ejercicio 14 : ¿Cuáles de las fracciones valen la unidad?

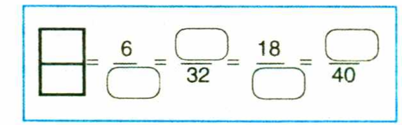
$$\frac{3}{5};\ \frac{7}{8};\ \frac{6}{6};\ \frac{5}{3};\ \frac{4}{4};\ \frac{9}{7};\ \frac{121}{112};\ \frac{273}{273};\ \frac{13}{24};\ \frac{7}{7}$$

Ejercicio 15 : ¿Es lo mismo $\frac{1}{0}$ que $\frac{0}{1}$? Razona la respuesta.

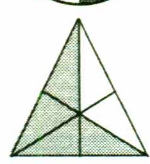
Ejercicio 16 : ¿Completa estas fracciones para que resulten equivalentes a las dadas.

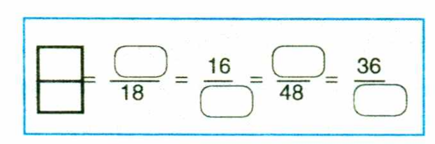


c).



d).



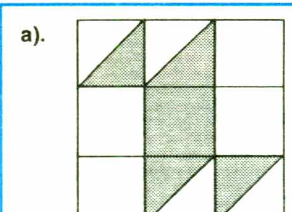


Ejercicio 17 : Calcula el representante canónico del número racional al que pertenecen las fracciones: $\frac{24}{36}, \frac{8}{12}, \frac{72}{108}, \frac{80}{120}, \frac{88}{132}$

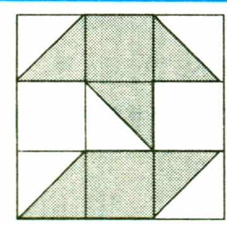
Ejercicio 18 : El representante canónico de un número racional es $\frac{5}{8}$. ¿Pertenece a él la fracción $\frac{65}{104}$? Razona la respuesta.

Ejercicio 19 : ¿Qué parte del cuadrado, representa cada una de las partes sombreadas.

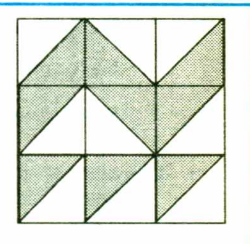
a).



b).



c).



Ejercicio 20 : Se ha llenado una botella de vino hasta 3/8. ¿Qué fracción de la botella te queda por llenar.

A. Conversión de una Fracción Impropia en Número Mixto.

Recuerda que **Fracciones Impropias** son aquellas que valen igual o más que la **UNIDAD**, como $\frac{11}{4}$

Para convertir una fracción impropia en número mixto se divide el numerador por el denominador (toda fracción representa una división).

Asi: $\frac{11}{4}$ = 11 ⌊4 ; 3 2 ; El resultado es 2, y 3 entre 4, osea: $\mathbf{2}\,\frac{3}{4}$

$\therefore$ $2\frac{3}{4}$ Es un número mixto porque se compone de entero y fracción

$\frac{25}{6} = \begin{array}{r|l} 25 & \underline{6} \\ 1 & 4 \end{array}$; El resultado es 4, y 1 entre 6; osea: $4\frac{1}{6}$

$\therefore$ $4\frac{1}{6}$ Es un número mixto porque se compone de entero y fracción

Nota: No todas las fracciones impropias al dividir el numerador por el denominador, dan lugar a números mixtos sino que algunas fracciones tienen valor de enteros, como: $\frac{12}{3} = 4$; $\frac{20}{4} = 5$ *estas fracciones reciben el nombre de* ***Fracciones Aparentes.***

B. Conversión de un Número Mixto en Fracción Impropia.

Naturalmente será un proceso inverso al anterior. Se multiplica el entero por el denominador y se le suma el numerador, a este resultado se le pone por denominador el de la fracción.

- Convertimos en fracciones el número mixto $2\frac{3}{5}$

  - Multiplicamos el entero por el denominador: $2 \times 5 = 10$.
  - Se le suma el numerador: $10 + 3 = 13$.
  - Se le pone por denominador el de la fracción, obteniendo: $\frac{13}{5}$

- Convierte el número mixto $3\frac{4}{7}$ en fracción impropia.

$$3\frac{4}{7} = \frac{7 \times 3 + 4}{7} = \frac{25}{7}$$

- Convierte el número mixto $15\frac{2}{3}$ en fracción impropia.

$$15\frac{2}{3} = \frac{3 \times 15 + 2}{3} = \frac{47}{3}$$

C. Conversión de un Número Entero en Forma Fraccionaria.

1. Todo número entero se puede convertir en fraccionaria al ponerle como denominador la **Unidad**.

Ejemplos: $6 = \frac{6}{1}$; $9 = \frac{9}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$; $13 = \frac{13}{1}$

2. Se multiplica y divide el entero por el número que deseamos que sea el denominador. Asi:

Si queremos convertir el número 3 en fracción con denominador 8, hacemos lo siguiente: $3 = 3 \times \frac{8}{8} = \frac{24}{8}$

* Convertimos el entero 5 en fracción con denominador 7 obteniendo: $5 = 5 \times \frac{7}{7} = \frac{35}{7}$

> ***La Operación** que acabas de realizar se fundamenta en que "Un número no varía si se multiplica y se divide por un misma cantidad".*
>
> *Ejemplo:* $\mathbf{9 = 9 \times \frac{4}{4} = \frac{36}{4}}$

5.2.7 FRACCIONES IRREDUCTIBLES

> Se dice que una fracción es irreductible si su numerador y su denominador son primos entre si, es decir, sino tienen divisor común alguno aparte de la **Unidad**.

Ejemplos: $\frac{5}{7}; \frac{-9}{4}; \frac{1}{8}; \frac{-2}{5}; \frac{4}{11}; \frac{7}{2}; \frac{-15}{4}; \frac{28}{3}$

5.2.8 SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

> Simplificar una fracción es encontrar otra que le sea equivalente y que tenga sus términos más pequeños. Para simplificar la fracción se deviden numerador y denominador por los factores comunes que se observen.

Ejemplo 1: Simplificar: $\frac{480}{720}$

Resolución:

Dividimos al numerador y denominador sucesivamente por 10, 8 y finalmente por 3, dando respectivamente.

$$\frac{480}{720} = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{\overset{6}{\cancel{\overset{48}{\cancel{480}}}}}}}{\underset{3}{\cancel{\underset{9}{\cancel{\underset{72}{\cancel{720}}}}}}} \quad :10 \quad :8 \quad :3$$

$$\therefore \boxed{\frac{480}{720} = \frac{2}{3}}$$

Ejemplo 2: Simplificar: $\frac{210}{120}$

Resolución:

Dividimos al numerador y denominador sucesivamente por 2, 3 y finalmente por 5, dando respectivamente.

$$\frac{210}{120}=\frac{105}{60}=\frac{35}{20}=\boxed{\frac{7}{4}}$$

$\frac{\not{210}}{\not{120}}$: 2 → $\frac{\not{105}}{\not{60}}$: 3 → $\frac{\not{35}}{\not{20}}$: 5 → $\frac{7}{4}$

$\therefore \boxed{\frac{210}{120}=\frac{7}{4}}$

* **Simplificación de una Fracción Por Divisiones Sucesivas**.

Ejemplo 1: Simplificar: $\frac{480}{720}$

Resolución:

En primer lugar, hallamos el M.C.D de los términos de la fracción;

Veamos:

	1	2
720	480	**240**
240	0	

➡ **(M.C.D)**

- Al dividir por **240**, ambos términos de la fracción $\frac{480}{720}$ tendremos:

$$\frac{480}{720}=\frac{\left(\frac{480}{240}\right)}{\left(\frac{720}{240}\right)}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Luego: $\frac{480}{720}$, se ha reducido a su más simple expresión como: $\frac{2}{3}$

Otro Método: *Factorizamos los términos en el producto de sus factores primos; los términos de la fracción propuesta se factorizan así:*

$$\frac{480}{720}=\frac{\not{2}\times\not{2}\times\not{2}\times\not{2}\times 2\times\not{3}\times\not{5}}{\not{2}\times\not{2}\times\not{2}\times\not{2}\times\not{3}\times 3\times\not{5}}=\frac{2}{3}$$

Ejemplo 2: Simplificar: $\frac{198}{126}$

Resolución:

Por divisiones sucesivas hallaremos el M.C.D. de los términos de la fracción.

Veamos:

	1	1	1	3
198	126	72	54	**18**
72	54	18	0	

➡ **(M.C.D)**

- Al dividir entre **18** ,ambos términos de la fracción dada, tendremos:

$$\frac{198}{126}=\frac{\left(\frac{198}{18}\right)}{\left(\frac{126}{18}\right)}=\boxed{\frac{11}{7}}$$

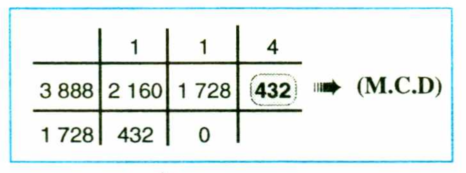
$\therefore \boxed{\frac{198}{126}=\frac{11}{7}}$

Ejemplo 3: Simplificar: $\frac{2160}{3888}$

Resolución:

Por divisiones sucesivas hallaremos el M.C.D. de los términos de la fracción:

Veamos:



	1	1	4
3 888	2 160	1 728	**432**
1 728	432	0	

- Al dividir entre **432**, ambos términos de la fracción dada, tendremos:

$$\frac{2\,160}{3\,888} = \frac{\left(\frac{2\,160}{432}\right)}{\left(\frac{3\,888}{432}\right)} = \frac{5}{9} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{2\,160}{3\,888} = \frac{5}{9}}$$

5.2.9 AMPLIACIÓN DE FRACCIONES

Se llama asi al proceso de transformación de una fracción cualquiera en otra equivalente cuando se multiplica al numerador y al denominador por un mismo número entero distinto de **Cero**.

- A partir de una fracción pueden realizarse ampliaciones sucesivas en forma ilimitada.

$$\frac{3}{7} = \left\{\frac{6}{14}, \frac{9}{21}, \frac{12}{28}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

(×2, ×3, ×4)

$$\frac{1}{4} = \left\{\frac{2}{8}; \frac{3}{12}; \frac{4}{16}; \frac{5}{20}; \frac{6}{24}; \ldots\ldots\right\}$$

$$\frac{2}{5} = \left\{\frac{4}{10}; \frac{6}{15}; \frac{8}{20}; \frac{10}{25}; \ldots\ldots\right\}$$

$$\frac{4}{9} = \left\{\frac{8}{18}; \frac{12}{27}; \frac{16}{36}; \frac{20}{45}; \ldots\ldots\right\}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 37

Ejercicio 1 : Convierte en fracción los siguientes números mixtos:

a). $3\frac{4}{5} =$	d). $7\frac{2}{3} =$	g). $19\frac{3}{8} =$	j). $121\frac{11}{17} =$
b). $5\frac{2}{7} =$	e). $9\frac{12}{15} =$	h). $35\frac{4}{9} =$	k). $316\frac{26}{31} =$
c). $4\frac{5}{8} =$	f). $8\frac{9}{10} =$	i). $47\frac{5}{13} =$	l). $578\frac{18}{23} =$

Ejercicio 2 : Convierte en números mixtos las siguientes fracciones:

a). $\frac{11}{3} =$	d). $\frac{39}{5} =$	g). $\frac{87}{11} =$	j). $\frac{124}{37} =$
b). $\frac{17}{2} =$	e). $\frac{58}{7} =$	h). $\frac{126}{13} =$	k). $\frac{673}{49} =$
c). $\frac{21}{4} =$	f). $\frac{73}{9} =$	i). $\frac{236}{78} =$	l). $\frac{1\,276}{125} =$

Ejercicio 3 : Completar las siguientes igualdades:

a). $\frac{345}{17} = 20\frac{\square}{17}$	c). $\frac{1\,374}{29} = 47\frac{\square}{29}$	e). $\frac{2\,943}{78} = \square\frac{57}{78}$
b). $\frac{876}{23} = 38\frac{\square}{23}$	d). $\frac{479}{35} = \square\frac{24}{35}$	f). $\frac{5\,218}{123} = \square\frac{52}{123}$

Ejercicio 4 : Diga si cada fracción está, o no, en su expresión mínima.

a). $\frac{10}{12}$ ... (No)	d). $\frac{9}{14}$ ... (Si)	g). $\frac{25}{36}$ ... ( )	j). $\frac{126}{48}$ ... ( )
b). $\frac{15}{24}$ ... ( )	e). $\frac{0}{3}$ ... ( )	h). $\frac{13}{39}$ ... ( )	k). $\frac{173}{91}$ ... ( )
c). $\frac{8}{9}$ ... ( )	f). $\frac{21}{27}$ ... ( )	i). $\frac{11}{44}$ ... ( )	l). $\frac{472}{103}$ ... ( )

Ejercicio 5 : Reducir a su más simple expresión las siguientes fracciones:

a). $\frac{6}{40}$ =	d). $\frac{36}{54}$ =	g). $\frac{324}{540}$ =	j). $\frac{342}{1\,596}$ =
b). $\frac{12}{18}$ =	e). $\frac{135}{445}$ =	h). $\frac{1\,320}{308}$ =	k). $\frac{1\,780}{4\,200}$ =
c). $\frac{30}{48}$ =	f). $\frac{96}{240}$ =	i). $\frac{378}{462}$ =	l). $\frac{5\,742}{2\,574}$ =

Rpta.

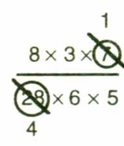
a). $\frac{3}{20}$	b). $\frac{2}{3}$	c). $\frac{5}{8}$	d). $\frac{2}{3}$	e). $\frac{27}{89}$	f). $\frac{2}{5}$
g). $\frac{3}{5}$	h). $\frac{30}{7}$	i). $\frac{9}{11}$	j). $\frac{57}{266}$	k). $\frac{89}{210}$	l). $\frac{29}{13}$

Ejercicio 6 : Simplificar las expresiones siguientes:

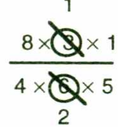
Estudie el ejemplo y luego simplifique cada fracción.

Ejemplo: Simplificar: $\frac{8\times 3\times 7}{28\times 6\times 5}$

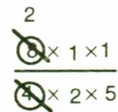
Resolución:



➡ ; Sacamos sétima (Dividimos entre 7), al 7 y al 28, quedando así:



➡ ; Sacamos tercia (Dividimos entre 3), al 3 y al 6, quedando así:



➡ ; Sacamos cuarta (Dividimos entre 4), al 8 y al 4, quedando así:

$\frac{2\times 1\times 1}{1\times 2\times 5}=\frac{1}{5}$

a). $\frac{12\times 9\times 4}{27\times 8\times 5}$	c). $\frac{35\times 12\times 8}{16\times 14\times 15}$	e). $\frac{36\times 900\times 15}{3\,600\times 18}$	g). $\frac{3\,550\times 100}{3\,500\times 9}$
b). $\frac{14\times 25\times 6}{10\times 15\times 28}$	d). $\frac{1\,620\times 13\times 8}{39\times 6\times 5}$	f). $\frac{504\times 100}{8\,000}$	h). $\frac{45\times 60\times 26}{72\times 13\times 48}$

Rpta.

a). $\frac{2}{5}$	b). $\frac{1}{2}$	c). 1	d). 144
e). $\frac{15}{2}$	f). $\frac{63}{10}$	g). $\frac{710}{63}$	h). $\frac{25}{16}$

5.3 Comparación en $\mathbb{Q}$.

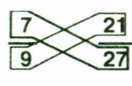
5.3.1 Las Relaciones de "Igualdad"; "Mayor Que" y "Menor Que" en el Conjunto $\mathbb{Q}$.

I. La Relación de Igualdad en $\mathbb{Q}$:

Dado dos números racionales, cuyas fracciones representativas, son: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, podemos afirmar que:

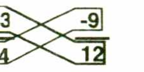
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; sólo si se cumple que: $a \times d = b \times c$

Ejemplo 1:



; porque: $\underbrace{7 \times 27}_{189} = \underbrace{9 \times 21}_{189}$

Ejemplo 2:



; porque: $\underbrace{-3 \times 12}_{-36} = \underbrace{-9 \times 4}_{-36}$

- **PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS RACIONALES.**

*) ***Propiedad Reflexiva:***

Ejemplo: $\frac{5}{11} = \frac{5}{11}$

) ***Propiedad Simétrica:*

Ejemplo: $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

) ***Propiedad Transitiva:

Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ y $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

II. Las relaciones "Mayor" y "menor" en el Conjunto $\mathbb{Q}$.

Ahora vamos a estudiar las diferentes relaciones que existen entre dos fracciones que no son equivalentes es decir, aquellas en las que no se obtienen productos iguales es decir; si: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \Rightarrow a \times d \neq b \times c$

Observamos las siguientes fracciones no equivalentes:

a) $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{8}$; multliplicando en forma cruzada obtenemos:

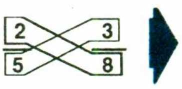
; porque: $\underbrace{4 \times 8}_{32}$ **?** $\underbrace{5 \times 7}_{35}$

32 < 35

(Recuerda que: < significa menor)

Luego, Afirmamos que: $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$; multiplicando en forma cruzada, obtenemos:

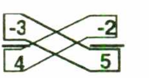


; porque: $\underbrace{2 \times 8}_{16} \;?\; \underbrace{3 \times 5}_{15}$; $16 > 15$

(Recuerda que: > significa mayor)

Luego, Afirmamos que: $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$

c) $\frac{-3}{4}$ y $\frac{-2}{5}$; multiplicando en forma cruzada, obtenemos:



; porque: $\underbrace{-3 \times 5}_{-15} \;?\; \underbrace{-2 \times 4}_{-8}$; $-15 < -8$

Luego, Afirmamos que: $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{5}$

En General: *Dadas las fracciones cualesquiera* $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *; se dice que:*

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *si y sólo si:* $a \times d < b \times c$

Asi mismo se dice que: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ *si y sólo si:* $a \times d > b \times c$

- **Propiedades de las Relaciones Mayor y Menor en $\mathbb{Q}$.**

1º **Propiedad Conexa**:

Dada dos fracciones no equivalentes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$; tenemos que:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \textbf{ó bien} \quad \frac{c}{d} > \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1: Dadas las fracciones: $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$; tenemos que:

$\underbrace{3 \times 6}_{18} \;?\; \underbrace{5 \times 4}_{20}$; $18 < 20$

Luego: $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

Ejemplo 2: Dadas las fracciones: $\frac{-2}{5}$ y $\frac{-3}{9}$; tenemos que:

$$\underbrace{-2\times 9}_{-18} \;?\; \underbrace{-3\times 5}_{-15} \qquad -18 < -15$$

Luego: $\frac{-2}{5} < \frac{-3}{9}$

2º Propiedad Transitiva:

Dadas tres fracciones cualesquiera: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$; tenemos que:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ y } \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

Ejemplo: Dadas las fracciones: $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$; tenemos que:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$$

$$\underbrace{2\times 7}_{14} \;?\; \underbrace{3\times 5}_{15} \quad ; \quad \underbrace{3\times 9}_{27} \;?\; \underbrace{4\times 7}_{28} \quad \therefore \quad 14 < 28$$

14 < 15   27 < 28

Luego:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} \text{ y } \frac{3}{7} < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{4}{9}$$

3º Ley de Tricotomía:

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se cumple necesariamente que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textbf{ ó } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \textbf{ ó } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

5.3.2 FRACCIONES HOMOGÉNEAS Y HETEROGÉNEAS

A **Fracciones Homogéneas:** Son aquellas fracciones que tienen igual denominador.

Ejemplos:

a). $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{9}{4}$

b). $\frac{7}{13}, \frac{3}{13}, \frac{-5}{13}, \frac{-2}{13}$

c). $\frac{11}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{13}{5}$

d). $\frac{-4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{-19}{9}, \frac{23}{9}, \frac{-24}{9}$

B **Fracciones Heterogéneas:** Son aquellas fracciones que tienen diferente denominador.

Ejemplos:

a). $\frac{5}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{11}$ c). $\frac{11}{17}, \frac{5}{8}, \frac{23}{4}, \frac{125}{26}$

b). $\frac{2}{5}, \frac{9}{4}, \frac{7}{8}, \frac{11}{13}$ d). $\frac{45}{13}, \frac{16}{9}, \frac{17}{4}, \frac{72}{40}$

Nota Importante:

Las Fracciones Heterogéneas no se pueden sumar o restar inmediatamente mientras las Fracciones Homogéneas si se puede sumar o restar inmediatamente, veamos:

$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} - \frac{5}{8}$ ▶ *No se puede sumar ni restar para poderlo restar. Damos común denominador, que lo trataremos más luego*

$\frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$ = 3 *medios* + 9 *medios* - 7 *medios* = 5 *medios* $= \frac{5}{2}$

5.3.3 REDUCCIÓN DE FRACCIONES AL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR

Sólo las fracciones que tienen igual denominador pueden sumarse o restarse directamente, cuando las fracciones sean heterogéneas, habrá que convertirlos en otras fracciones equivalentes pero homogéneas. Esta operación consiste en reducir estas fracciones a **Común Denominador**.

Ejemplo: No puedo sumar $\frac{2}{3}$ con $\frac{5}{7}$; porque los tercios no son del mismo valor que los séptimos. Pero si se puede, sin modificar el valor de las fracciones multiplicar ambos términos por un mismo número, lo haré por 7 en la primera y por 3 en la segunda, lo cual dará: $\frac{2\times 7}{3\times 7}$ y $\frac{5\times 3}{7\times 3}$; respectivamente: $\frac{14}{21}$ y $\frac{15}{21}$; y como los ventiunavos son iguales, podré sumarlos o restarlos.

Reducir las fracciones a **Común Denominador**, consiste en hallar otras fracciones respectivamente iguales a las propuestas, pero que tengan iguales denominadores.

1ER CASO: Reducir a común denominador dos fracciones cuyos denominadores son números primos entre si.

Ejemplo 1: Reducir a mínimo común denominador: $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{8}$

Multiplicamos por 8 los términos de la primera fracción y por 5 los términos de la segunda fracción, y efectuando los productos tendremos:

$$\frac{3\times 8}{5\times 8}=\frac{24}{40} \quad y \quad \frac{7\times 5}{8\times 5}=\frac{35}{40}$$

Ejemplo 2: Reducir a mínino común denominador: $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{4}$

Multiplicamos por 4 los términos de la primera fracción y por 7 los términos de la segunda fracción y efectuando los productos, tendremos:

$$\frac{2\times 4}{7\times 4}=\frac{8}{28} \quad y \quad \frac{3\times 7}{4\times 7}=\frac{21}{28}$$

***Regla**: Para reducir a común denominador dos fracciones que tienen denominadores primos entre sí, se multiplican ambos términos de cada una de las fracciones por el denominador de la otra.*

Sean las fracciones: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ *; para que tengan igual denominador se procede así:*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times d}{b\times d} \quad y \quad \frac{c\times b}{b\times d}$$

Regla de Productos Cruzados

***Ejemplo**: Transformar a denominador común las fracciones:* $\frac{5}{4}$ y $\frac{6}{7}$

***Resolución**:*

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{5\times 7}{4\times 7};\ \frac{6\times 4}{4\times 7}=\frac{35}{28};\ \frac{24}{28} \quad \therefore \quad \frac{5}{4};\ \frac{6}{7}=\frac{35}{28};\ \frac{24}{28}$$

2^DO CASO: Reducción de Varias Fracciones a su Mínimo Común Denominador:

Ya sabemos que el denominador común es común múltiplo de los denominadores; por lo tanto el mínimo común denominador será el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo 1: Reduzca a su mínimo común denominador las fracciones: $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$ y $\frac{9}{40}$

Resolución: Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores: 12, 18 y 40; Asi:

12 - 18 - 40	2
6 - 9 - 20	2
3 - 9 - 10	2
3 - 9 - 5	3
1 - 3 - 5	3
1 - 1 - 5	5
1 - 1 - 1	

m.c.m.(12, 18 y 40) = $2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5 = 360$

- **Disposición de las Operaciones**:

$$\frac{7}{12} = \frac{30 \times 7}{360} = \frac{210}{360} \qquad \frac{5}{18} = \frac{20 \times 5}{360} = \frac{100}{360} \qquad \frac{9}{40} = \frac{9 \times 9}{360} = \frac{81}{360}$$

> ***Regla**: Para reducir fracciones a su mínimo común denominador:*
>
> ***1.** Se reducen estas fracciones a su más simple expresión.*
>
> ***2.** Se busca el **m.c.m**. de los denominadores.*
>
> ***3.** El **m.c.m.** de los denominadores, se divide por el denominador de cada fracción y dichos resultados se multiplican por el numerador de cada fracción.*

Ejemplo 2: Reduzca a su mínimo común denominador las fracciones: $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{20}$ y $\frac{7}{12}$

***Resolución**:*

1. Se reducen las fracciones a su más simple expresión, en este caso reducimos la fracción: $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Luego: $\frac{5}{9}, \frac{8}{20}$ y $\frac{7}{12} = \frac{5}{9}, \frac{2}{5}$ y $\frac{7}{12}$

2. Buscamos el m.c.m. de los denominadores.

9	5	12	2
9	5	6	2
9	5	3	3
3	5	1	3
1	5	1	5
1	1	1	

m.c.m.(9, 5 y 12) = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

- **Disposición de las Operaciones**:

$$\frac{5}{9} = \frac{20 \times 5}{180} = \frac{100}{180} \qquad \frac{2}{5} = \frac{36 \times 2}{180} = \frac{72}{180} \qquad \frac{7}{12} = \frac{15 \times 7}{180} = \frac{105}{180}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Cada par de fracciones, reducirlas a su más simple expresión y decir cuál es mayor:

a). $\frac{15}{21}$ y $\frac{16}{40}$	c). $\frac{15}{18}$ y $\frac{32}{48}$	e). $\frac{36}{48}$ y $\frac{120}{180}$	g). $\frac{112}{32}$ y $\frac{90}{54}$
b). $\frac{72}{80}$ y $\frac{180}{450}$	d). $\frac{42}{63}$ y $\frac{28}{35}$	f). $\frac{72}{120}$ y $\frac{60}{160}$	h). $\frac{75}{275}$ y $\frac{115}{299}$

2 Las fracciones que siguen nombran varios números racionales. ¿Cuál de ellos es menor?

$$\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{9}{13}$$

3 Las fracciones que siguen nombran varios números racionales. ¿Cuál de ellos es el mayor?

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$$

4 Reducir al común denominador las fracciones siguientes:

a). $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$	c). $\frac{2}{7}$ y $\frac{13}{6}$	e). $\frac{9}{13}$ y $\frac{7}{15}$	g). $\frac{8}{9}$ y $\frac{16}{7}$
b). $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$	d). $\frac{7}{11}$ y $\frac{3}{14}$	f). $\frac{6}{17}$ y $\frac{3}{19}$	h). $\frac{21}{8}$ y $\frac{4}{9}$

5 Reducir al común denominador las fracciones siguientes:

a). $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$	c). $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{9}$	e). $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$ y $\frac{4}{7}$
b). $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$	d). $\frac{8}{7}$; $\frac{5}{2}$ y $\frac{11}{13}$	f). $\frac{3}{11}$; $\frac{6}{5}$ y $\frac{1}{6}$

6 Reducir a común denominador las fracciones siguientes:

a). $\frac{5}{8}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{18}$	c). $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{15}$ y $\frac{2}{18}$	e). $\frac{11}{2}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{20}$ y $\frac{13}{16}$
b). $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{6}{15}$ y $\frac{4}{25}$	d). $\frac{4}{7}$; $\frac{16}{20}$; $\frac{9}{27}$ y $\frac{8}{13}$	f). $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{14}$; $\frac{5}{70}$ y $\frac{2}{28}$

5.3.4 NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS, NEGATIVOS Y NULO

Propiedad de Orden y Densidad de los Números Racionales.

Como sabes, el número racional viene representado por una fracción $\frac{a}{b}$; par ordenado de números enteros, luego será: $\frac{a}{b} > 0$; ó bién: $\frac{a}{b} < 0$; ó bien $\frac{a}{b} = 0$.

En el **Primer Caso** se dice que el número racional a / b es positivo, en el **Segundo Caso** que es negativo, y en el **Tercero** que es número racional nulo ó 0. El número racional cero siempre será de la forma $\frac{0}{b}$ (nunca $\frac{a}{0}$).

Asi, la fracción $\frac{-3}{4}$ representa al número racional negativo, porque $\frac{-3}{4} < 0$; y la fracción $\frac{0}{5}$ al número racional **Cero**, porque $\frac{0}{5} = 0$.

De la siguientes fracciones dí cuales representan números racionales positivos, cuales negativos y cual es el número racional cero.

$$\frac{-4}{5}, \frac{4}{-15}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{-5}, \frac{8}{4}, \frac{5}{7}, \frac{0}{4}$$

* Las fracciones: $\frac{5}{3}$, $\frac{-5}{-5}$ y $\frac{8}{4}$; representan números racionales positivos.

* Las fracciones: $\frac{-4}{5}$, $\frac{4}{-15}$ y $\frac{5}{-7}$; representan números racionales negativos.

* La fracción: $\frac{0}{4}$; representa el número racional **Cero**.

Signos en una Fracción:

* *Una fracción es **Positiva** si ambos términos tienen el **Mismo Signo**.*

Es decir: $\frac{+a}{+b}$ ***ó*** $\frac{-a}{-b}$ • *En la fracción:* $\frac{3}{8}$ *los signos + ; se sobre entienden.*

** *Una fracción es **Negativa** si ambos términos tienen **Diferente Signo**.*

Es decir: $\frac{+a}{-b}$ ***ó*** $\frac{-a}{+b}$

• *Toda fracción de **Signo Negativo** se puede escribir de tres formas:*

$\frac{-3}{7}$, $\frac{3}{-7}$ ***ó*** $-\frac{3}{7}$ *, siendo la segunda la que menos se usa.*

Ordenación de los Números Racionales.

- En la ordenación de los números racionales te conviene saber:

* Cualquier número **Racional Negativo** es menor que **Cero.**

Ejemplos: $-\frac{3}{8}<0$; $\frac{-5}{11}<0$; $\frac{-7}{3}<0$

* **Cero** es menor que cualquier número **Racional Positivo.**

Ejemplos: $0<\frac{7}{3}$; $0<\frac{5}{8}$; $0<\frac{11}{17}$

* Cualquier número **Racional Negativo** es menor que cualquier número **Racional Positivo.**

Ejemplos: $-\frac{3}{11}<\frac{5}{7}$; $\frac{-4}{9}<\frac{7}{8}$; $\frac{-2}{31}<\frac{1}{4}$

** De dos números **Racionales Positivos,** representados por fracciones del **Mismo Denominador**, es menor el que tiene **Menor Numerador.**

Ejemplos: $\frac{3}{11}$ y $\frac{7}{11}$ ▶ $\frac{3}{11}<\frac{7}{11}$; $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{8}$ ▶ $\frac{3}{8}<\frac{5}{8}$

** De dos números **Racionales Negativos**, representados por fracciones del **Mismo Denominador**, es menor el que tiene **Mayor Numerador.**

Ejemplos: $\frac{-2}{9}$ y $\frac{-4}{9}$ ▶ $\frac{-4}{9}<\frac{-2}{9}$; $\frac{-7}{11}$ y $\frac{-5}{11}$ ▶ $\frac{-7}{11}<\frac{-5}{11}$

** De dos números **Racionales Positivos,** representados por fracciones del **Mismo Numerador**, es menor el que tiene **mayor Denominador.**

Ejemplos: $\frac{5}{9}$ y $\frac{5}{3}$ ▶ $\frac{5}{9}<\frac{5}{3}$; $\frac{12}{7}$ y $\frac{12}{11}$ ▶ $\frac{12}{11}<\frac{12}{7}$

Nota: Si dos fracciones no tienen el mismo denominador se reducen a común denominador con lo que facilmente se observará cuál de ellos es la menor, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: ¿Cuál de las dos fracciones: $\frac{9}{12}$ y $\frac{5}{4}$ es mayor?

Resolución:

De las fracciones: $\frac{9}{12}$ y $\frac{5}{4}$; damos común denominador, asi:

12	-	4	2
6	-	2	2
3	-	1	3
1	-	1	

Común Denominador (12 y 4) = $2 \times 2 \times 3 = 12$

Luego:

$$\frac{9}{12} = \frac{1 \times 9}{12} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{12} = \frac{15}{12}$$

Como las dos fracciones tienen igual denominador será mayor el que tenga mayor numerador osea:

$\frac{15}{12}$ es mayor que $\frac{9}{12}$. $\left(\frac{15}{12} > \frac{9}{12}\right)$

$$\therefore \quad \frac{15}{12} > \frac{9}{12} \text{ ó } \frac{5}{4} > \frac{9}{12}$$

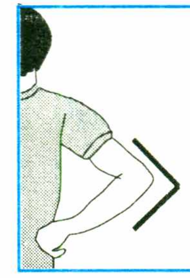
Recuerda que:

Que también se puede aplicar el ***Producto Cruzado****, veamos:*

$$\frac{9}{12} \times \frac{5}{4} \quad \underbrace{9 \times 4}_{36} \;?\; \underbrace{12 \times 5}_{60}$$

$$36 < 60$$

De esta última expresión podemos afirmar que: $\frac{9}{12} < \frac{5}{4}$ ó $\frac{5}{4} > \frac{9}{12}$ $\quad \therefore \quad \frac{9}{12} < \frac{5}{4}$ ó $\frac{5}{4} > \frac{9}{12}$



Recomendación:

Para recordar el signo de orden " > " (mayor), acuerdate del codo derecho. (ver figura)

* *Una vez que aprendas el signo " > " (mayor) por simple deducción diremos que "< " es el signo menor.*

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE FRACCIONES

Problema 1: Ordenar de mayor a menor las fracciones: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$

Resolución:

PRIMERA FORMA: Damos común denominador; Asi:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & - & 9 & - & 6 & 2 \\ 5 & - & 9 & - & 3 & 3 \\ 5 & - & 3 & - & 1 & 3 \\ 5 & - & 1 & - & 1 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

Comun Denominador $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \boxed{90}$

Luego:

$$\frac{2}{5} = \frac{18 \times 2}{(90)} = \frac{36}{(90)} \quad (\textit{menor})$$

$$\frac{7}{9} = \frac{10 \times 7}{(90)} = \frac{70}{(90)} \quad (\textit{mediano})$$

$$\frac{5}{6} = \frac{15 \times 5}{(90)} = \frac{75}{(90)} \quad (\textit{mayor})$$

Cuando los denominadores son iguales será mayor el que tenga mayor numerador.

Ordenando las fracciones de mayor a menor o en forma descendente se tiene: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$

SEGUNDA FORMA: De las fracciones: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$; damos común numerador, veamos:

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & - & 7 & - & 5 & 2 \\ 1 & - & 7 & - & 5 & 5 \\ 1 & - & 7 & - & 1 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

Común Numerador: $2 \times 5 \times 7 = \boxed{70}$

Luego:

$$\times \; \frac{7}{9} = \frac{(70)}{10 \times 9} = \frac{(70)}{90}$$

$$\times \; \frac{2}{5} = \frac{(70)}{35 \times 5} = \frac{(70)}{175}$$

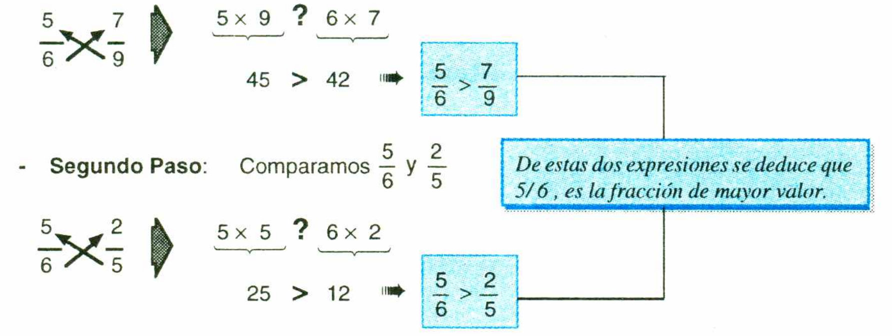
$$\times \; \frac{5}{6} = \frac{(70)}{14 \times 6} = \frac{(70)}{84}$$

Cuando los numeradores son iguales será mayor el que tenga menor denominador.

Ordenando las fracciones de mayor a menor se tiene: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$

TERCERA FORMA: Para ordenar las fracciones: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$, también se aplica la regla de productos cruzados, veamos:

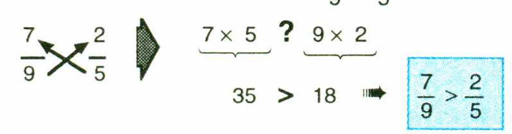
- **Primer Paso**: Comparamos $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$



- **Segundo Paso**: Comparamos $\frac{5}{6}$ y $\frac{2}{5}$

Como ya sabemos cual es la fracción de **Mayor** valor, ahora sólo nos queda saber de las dos fracciones que quedan cuál es la **Menor**. veamos:

- **Tercer Paso**: Comparamos $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$



$\frac{7}{9} > \frac{2}{5}$

La fracción de menor valor de las tres fracciones dadas es **2 / 5**.

Como ya sabemos cuál es la fracción de mayor valor **(5 / 6)** y la fracción de menor valor **(2 / 5)**, la otra fracción que queda **(7 / 9)** será la de valor medio.

$\therefore$ ***Ordenando:*** Las fracciones de mayor a menor son: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{5}$

Problema 2 : Escribe las fracciones de denominador 20, comprendidas entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$

Resolución:

Damos común denominador

5 - 4	2
5 - 2	2
5 - 1	5
1 - 1	

Común Denominador: $2 \times 2 \times 5 = 20$

Luego:

$\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{20} = \frac{8}{20}$; $\frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{20} = \frac{15}{20}$

Ahora, calculamos las fracciones comprendidas entre $\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$, veamos:

$\frac{8}{20}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{10}{20}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{13}{20}$; $\frac{14}{20}$; $\frac{15}{20}$

$\frac{8}{20} \rightarrow$ **$\frac{2}{5}$** ; $\frac{15}{20} \rightarrow$ **$\frac{3}{4}$**

Fracciones Comprendidas entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$: $\frac{9}{20}$; $\frac{10}{20}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{13}{20}$; $\frac{14}{20}$

∴ Las fracciones comprendidas entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ son: $\frac{9}{20}$; $\frac{10}{20}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{13}{20}$; $\frac{14}{20}$.

Problema 3: ¿Cuál es la fracción comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$

Resolución:

Para saber cuál es la fracción comprendida entre dos fracciones, se hace la semisuma, osea se suman las dos fracciones y su resultado se divide entre 2.

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3}{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

➧ ($\frac{1}{2}$ es la fracción comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$)

∴ La fracción comprendida, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{2}$

Problema 4: ¿Cuántos octavos hay en 5 unidades?

Resolución:

Primera Forma:

$$5 = \frac{5 \times 8}{8} = \frac{\boxed{40}}{8}$$

Nota: Como las 5 unidades se van a convertir a octavos; se ha multiplicado y se ha dividido × 8 al número 5.

∴ En 5 unidades hay 40 octavos

Segunda Forma: ¿Cuántos octavos hay en 5 unidades?

$$x \cdot \frac{1}{8} = 5$$

De donde: $x = 5 . 8$ ➠ $x = 40$ ➠ ***Esto significa que en 5 unidades hay 40 octavos***

Problema 5: ¿Cuántos tercios hay en 7 unidades?

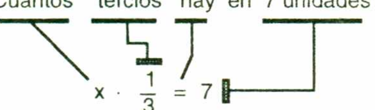
Resolución:

- **Primera Forma**: Para convertir las 7 unidades a tercios, multiplicamos y dividimos por 3, al número 7. Asi:

$$7 = \frac{7 \times 3}{3} = \frac{\boxed{21}}{3}$$

➠ ∴ En 7 unidades hay 21 tercios

- **Segunda Forma**: ¿Cuántos tercios hay en 7 unidades?



$$x \cdot \frac{1}{3} = 7$$

De donde: $x = 7 \cdot 3$ ➠ $x = 21$ ➠ ***Esto significa que en 7 unidades hay 21 tercios.***

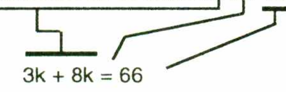
Problema 6: Al simplificar una fracción obtuvimos 3/8 . Sabiendo que la suma de los términos de la fracción es 66. Calcular la diferencia de los mismos.

Resolución:

Sabemos que la fracción simplificada = $\frac{3}{8}$

- La fracción antes de simplificarse era de la forma: $\frac{3k}{8k}$ ....(I)

Del enunciado: Suma de los términos de la fracción es 66.

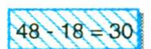


$$3k + 8k = 66$$

$$11k = 66$$

De donde: $k = \frac{66}{11} = 6 \rightarrow \quad \therefore \quad k = 6$ ***Reemplazamos el valor de "k" en la expresión (I).***

Fracción antes de simplificarse: $\frac{3k}{8k} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{18}{48}$

Luego, la diferencia de sus términos de dicha fracción es:  $48 - 18 = 30$

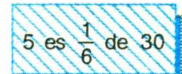
Problema 7: ¿Qué fracción de 30 es 5?

Resolución:

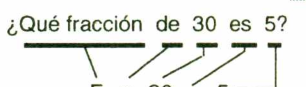
- En primer lugar identificamos el **"Todo"**, siendo en este caso el número 30 y en segundo lugar identificamos **"La Parte"**, recordando que con respecto a la **Unidad,** los términos de una fracción expresan:

$$\frac{\textbf{"La parte"}}{\textbf{"El Todo"}}$$

Luego, la fracción pedida es: $\frac{5}{30}$ | ***Dividimos los dos términos entre 5.***

Simplificando queda asi: $\frac{1}{6}$ ➠ $\therefore$  5 es $\frac{1}{6}$ de 30

Otra Forma: ¿Qué fracción de 30 es 5?

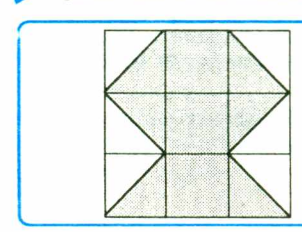


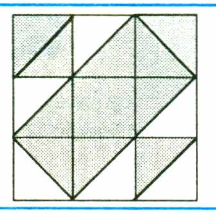
$$F \times 30 = 5$$

Recuerda que: **"de"** significa en matemática multiplicación.

Despejando F: $F = \frac{\not{5}}{\not{30}} = \frac{1}{6}$ ➡ $\therefore$ $F = \frac{1}{6}$

Problema 8: ¿Qué fracción del cuadrado, representa la región sombreada?





Resolución:

Trasladando áreas, los cuadrados quedan como los que mostramos:

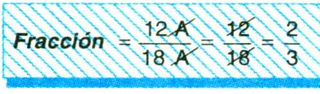
a)

- a cada área ◣, le damos valor de A.

  Región Sombreada = 12A

  * Area del cuadrado (total) = 18A

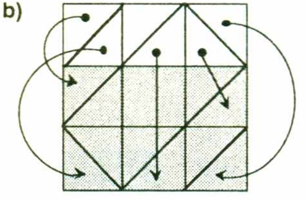
$$\textbf{Fracción} = \frac{\textbf{Area Región Sombreada}}{\textbf{Area Total}}$$



$$\textbf{Fracción} = \frac{12\not{A}}{18\not{A}} = \frac{\not{12}}{\not{18}} = \frac{2}{3}$$

Rpta.

b)



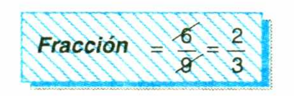
- Al lado de cada cuadradito le damos valor de 1

  * Area región sombreada: (rectángulo de lados 2 y 3)

área región sombreada = base × altura = $3 \times 2 = 6$

* Area del cuadrado (total) = $(\text{lado})^2 = (3)^2 = 9$

$$\textbf{Fracción} = \frac{\textbf{Area Región Sombreada}}{\textbf{Area Total}}$$



$$\textbf{Fracción} = \frac{\not{6}}{\not{9}} = \frac{2}{3}$$

Rpta.

Problema 9: Un televisor pesa 10 kg más un quinto de su peso total ¿Cuánto pesa el televisor?

Resolución:

Sea: T = peso total del televisor

Del enunciado: Un televisor pesa 10 kg más un quinto de su peso total

Planteo: $T = 10\ Kg + \frac{1}{5}T$

$5T = 50\ kg + 1T \rightarrow 5T - 1T = 50\ kg \rightarrow 4T = 50kg \quad \therefore \quad T = \frac{50}{4}\ Kg = 12,5\ Kg$

Rpta: El televisor pesa 12,5 kg

Problema 10 : Una botella de gaseosa de litro y medio de capacidad. Esta con líquido hasta sus 3/4. ¿Cuántos litros de gaseosa tenemos?

Resolución:

Para su mejor entendimiento, veamos el gráfico siguiente:

- De acuerdo al gráfico, la cantidad de líquido es $\frac{3}{4}$ de la capacidad, osea:

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{2}\ Lt. = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}\ Lt.$$

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{3}{2}\ Lt. = \frac{9}{8}\ Lt.$$

Líquido = $\frac{3}{4}$

Capacidad = $\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{2}\ Lt}\ Lt$

Rpta: En la botella tenemos $\frac{9}{8}\ Lt = 1\frac{1}{8}\ Lt.$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 38

Ejercicio 1 : Indica el valor (Positivo, negativo o nulo) de los números racionales representados por las fracciones siguientes:

$$-\frac{8}{9};\ \frac{7}{-6};\ \frac{8}{3};\ \frac{-3}{-14};\ \frac{0}{15};\ \frac{-2}{-7};\ \frac{9}{-11};\ \frac{-6}{-4}$$

Ejercicio 2 : Escribe las fracciones de denominador 6, comprendidas entre $\frac{4}{2}$ y $\frac{9}{3}$

Ejercicio 3 : Ordena de menor a mayor las fracciones siguientes:

a). $\frac{7}{9};\ \frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$	c). $\frac{3}{9};\ \frac{6}{5};\ \frac{7}{9}$ y $\frac{4}{7}$	e). $\frac{6}{8};\ \frac{9}{3};\ \frac{4}{5};\ \frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$
b). $\frac{3}{8};\ \frac{5}{8}$ y $\frac{7}{9}$	d). $\frac{7}{13};\ \frac{5}{11};\ \frac{4}{9}$ y $\frac{6}{7}$	f). $\frac{4}{9};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{3};\ \frac{6}{7}$ y $\frac{5}{12}$

Ejercicio 4 : Escribe en los espacios libres el signo > ó < ; según corresponda:

a). $\frac{3}{5}\ \square\ \frac{6}{7}$	c). $\frac{11}{25}\ \square\ \frac{4}{9}$	e). $\frac{-3}{5}\ \square\ \frac{-6}{8}$	g). $\frac{-15}{23}\ \square\ \frac{-7}{8}$
b). $\frac{7}{11}\ \square\ \frac{3}{13}$	d). $\frac{16}{17}\ \square\ \frac{15}{16}$	f). $\frac{-6}{11}\ \square\ \frac{-5}{13}$	h). $\frac{123}{141}\ \square\ \frac{134}{162}$

Ejercicio 5 : De todas estas fracciones ¿Cuál representa al número menor?

$$\frac{6}{11};\ \frac{6}{7};\ \frac{6}{9};\ \frac{6}{17};\ \frac{6}{15};\ \frac{6}{19};\ \frac{6}{21};\ \frac{6}{33};\ \frac{6}{41}$$

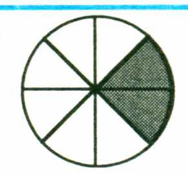
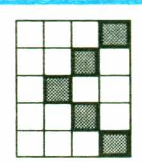
Ejercicio 6 : De estas cuatro fracciones. ¿Cuál representa al número menor y cuál al mayor?

$$\frac{3}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{2}{3}$$

Ejercicio 7 : Calcule los numeradores que faltan.

a). $\frac{3}{8} < \frac{\square}{16} < \frac{4}{8}$	d). $\frac{5}{7} < \frac{\square}{14} < \frac{6}{7}$	g). $\frac{0}{4} < \frac{\square}{8} < \frac{1}{4}$
b). $\frac{1}{2} < \frac{\square}{8} < \frac{6}{8}$	e). $\frac{4}{9} < \frac{\square}{18} < \frac{5}{9}$	h). $\frac{7}{8} < \frac{\square}{48} < \frac{11}{12}$
c). $\frac{6}{10} < \frac{\square}{20} < \frac{7}{10}$	f). $\frac{2}{3} < \frac{\square}{24} < \frac{3}{4}$	i). $\frac{15}{20} < \frac{\square}{40} < \frac{4}{5}$

Ejercicio 8 : Cada figura sugiere un par de fracciones equivalentes. ¿Cuáles son?

a).	b).	c).
		

Ejercicio 9 : Copie y llene cada $\square$.

a) Si: $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ y $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$; Entonces : $\frac{3}{4} < \square$.

b) Si: $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} > \square$; Entonces : $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$.

c) Si: $\square > \frac{2}{4}$ y $\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$; Entonces : $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.

d) El enunciado: $\frac{5}{6} > \frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ Significa $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ y $\square > \square$

Ejercicio 10 : Ordena de mayor a menor las fracciones siguientes:

a). $-\frac{5}{3}$; $-\frac{4}{6}$ y $-\frac{3}{7}$	c). $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{11}$ y $-\frac{6}{18}$	e). $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{7}$ y $-\frac{5}{9}$
b). $-\frac{5}{7}$; $-\frac{2}{5}$ y $-\frac{4}{9}$	d). $-\frac{4}{6}$; $-\frac{2}{7}$ y $-\frac{3}{8}$	f). $-\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{8}$ y $-\frac{11}{13}$

Ejercicio 11 : ¿Cuál es la fracción comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$? ***Rpta.*** 3/8

Ejercicio 12 : ¿Cuántos novenos hay en 6 unidades? ***Rpta.*** 54

Ejercicio 13 : ¿Cuántos doceavos hay en 13 unidades? ***Rpta.*** 156

Ejercicio 14 : ¿Cuántos tercios hay en 20 unidades? ***Rpta.*** 60

Ejercicio 15 : ¿Cuántos octavos hay en 1/4 ? ***Rpta.*** 2

Ejercicio 16 : Escribe las fracciones de denominador 56, comprendidas entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{3}{8}$

Ejercicio 17 : Al simplificar una fracción, obtuvimos 5/11. sabiendo que la suma de los términos de la fracción es 128. calcular la diferencia de los mismos. ***Rpta.*** 48

Ejercicio 18 : Al simplificar una fracción, obtuvimos 13 / 17. sabiendo que la diferencia de los términos de la fracción es 20. Calcular la suma de los mismos. ***Rpta.*** **150**

Ejercicio 19 :

a) ¿Qué fracción de 42 es 7?

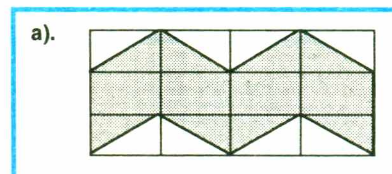
b) ¿Qué fracción de 120 es 15?

c) ¿Qué fracción de de 75 es 5?

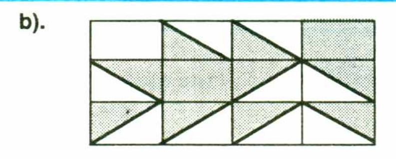
d) ¿Que fracción de 90 es 18?

Ejercicio 20 :¿Qué fracción del rectángulo, representa la región sombreada?

a).



b).

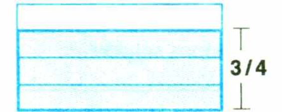


Ejercicio 21 : Una mesa pesa 6 kg más dos tercios de su peso total. ¿Cuánto pesa la mesa? ***Rpta.*** **18 Kg.**

Ejercicio 22 : Una botella de vino de litro un cuarto de capacidad. Está con líquido hasta sus 2/5. ¿Cuántos litros de vino tenemos? ***Rpta.*** **1/2 litro**

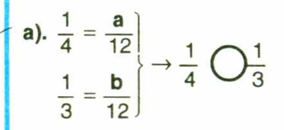
Ejercicio 23 : Compare los números racionales siguientes usando partes de regiones.

Ejemplo: $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$



a). $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$	b). $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$	c). $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$	d). $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$	e). $\frac{7}{6}$, $\frac{6}{5}$

Ejercicio 24 : Calcule a y b. Después, indique cuál de los signos, > ó < , debe ir en cada ◯

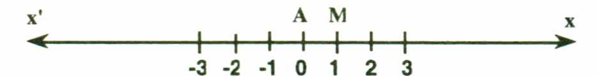


a). $\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}=\frac{a}{12}\\ \frac{1}{3}=\frac{b}{12}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{1}{4} \bigcirc \frac{1}{3}$	**c).** $\left.\begin{matrix}\frac{3}{4}=\frac{a}{36}\\ \frac{7}{9}=\frac{b}{36}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{3}{4} \bigcirc \frac{7}{9}$	**e).** $\left.\begin{matrix}\frac{5}{8}=\frac{a}{48}\\ \frac{7}{12}=\frac{b}{48}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{5}{8} \bigcirc \frac{7}{12}$
b). $\left.\begin{matrix}\frac{5}{3}=\frac{a}{6}\\ \frac{5}{2}=\frac{b}{6}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{5}{3} \bigcirc \frac{5}{2}$	**d).** $\left.\begin{matrix}\frac{2}{5}=\frac{a}{35}\\ \frac{3}{7}=\frac{b}{35}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{2}{5} \bigcirc \frac{3}{7}$	**f).** $\left.\begin{matrix}\frac{1}{3}=\frac{a}{90}\\ \frac{7}{30}=\frac{b}{90}\end{matrix}\right\}\rightarrow \frac{1}{3} \bigcirc \frac{7}{30}$

5.3.5 LA RECTA NÚMERICA

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

La Recta Numérica: Si sobre una recta indefinida xx', marcamos un punto fijo A. Origen que represente el número 0, y llevamos en los dos sentidos (tanto a la derecha como a la izquierda) un segmento como unidad de longitud AM.

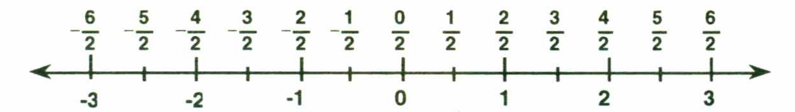


Resulta que:

a) Los puntos de división representan los números enteros (los positivos a la derecha y los negativos a la izquierda).

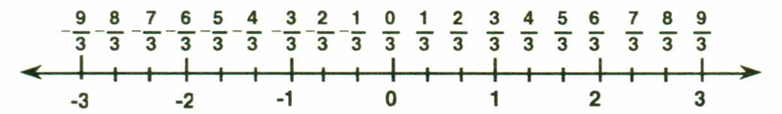
b) Los números racionales de denominador "n", quedarán representados por cada uno de los puntos de división al dividir cada uno de los segmentos de longitud en "n" partes iguales, al variar "n" obtenemos todos los números racionales.

Supongamos que el segmento unidad utilizado anteriormente se divide en dos segmentos iguales y que uno de estos segmentos se utiliza para marcar puntos a la derecha y a la izquierda del origen A. la recta quedaría asi:



Como se observará cada segmento que aparecen en la recta numérica tiene el entero 2 como denominador; esto debido a que los puntos igualmente espaciados, se obtuvieron dividiendo un segmento unidad en dos partes iguales.

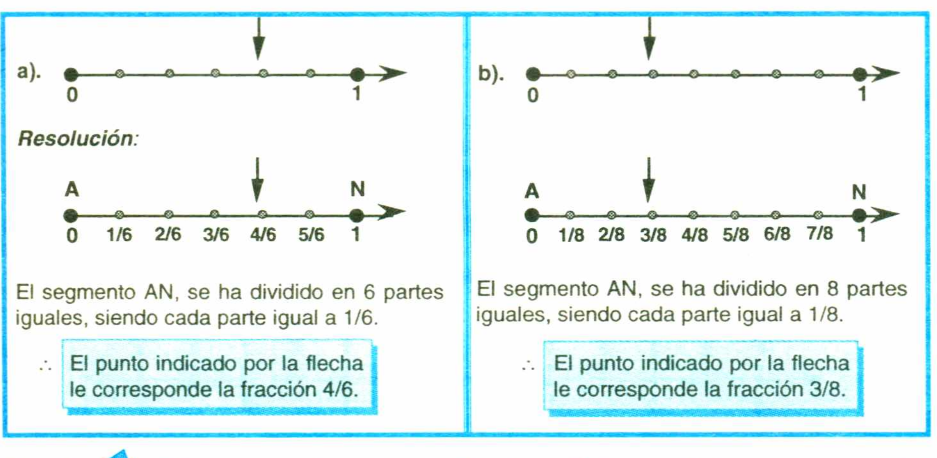
Otro Ejemplo: Dividimos el segmento unidad en tres partes iguales y **representémoslo** en una recta numérica:



En este caso aparece el denominador 3 porque el segmento tomado como **Unidad** fue dividido en tres partes iguales.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE NÚMEROS RACIONALES

Ejercicio 1: Escriba la fracción que nombre al número racional que corresponde al punto indicado por la flecha en cada recta numérica.



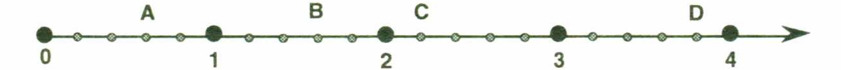
a). El segmento AN, se ha dividido en 6 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/6.

∴ El punto indicado por la flecha le corresponde la fracción 4/6.

b). El segmento AN, se ha dividido en 8 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/8.

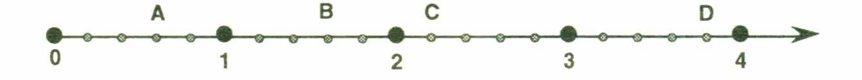
∴ El punto indicado por la flecha le corresponde la fracción 3/8.

Ejercicio 2 : Esta recta numérica tiene la **Escala en Quintos**. ¿Qué números racionales corresponden a los puntos A, B, C y D?



Resolución:

- Como se observará cada segmento **Unidad**, se ha dividido en 5 partes iguales siendo el valor de cada parte de 1/5.



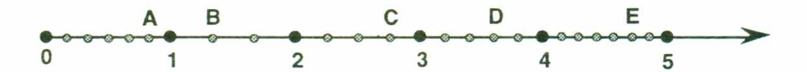
Luego: Para el punto A, le corresponde la fracción: 3/5.

Para el punto B, le corresponde la fracción: 8/5.

Para el punto C, le corresponde la fracción: 11/5.

Para el punto D, le corresponde la fracción: 19/5.

Ejericcio 3 : ¿Qué número corresponde a cada uno de los puntos A, B, C, D y E?



Resolución:

- El segmento de 0 a 1, se ha dividido en 6 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/6; entonces: al punto **A** le corresponde 5/6.

- El segmento de 1 a 2, se ha dividido en 3 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/3; entonces: al punto **B** le corresponde: $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

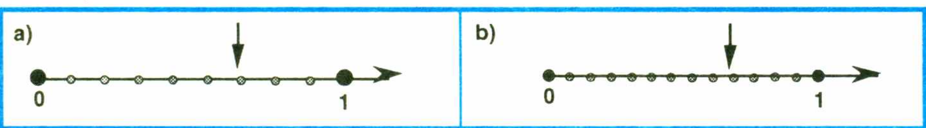
- El segmento de 2 a 3, se ha dividido en 4 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/4; entonces; al punto **C** le corresponde: $2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

- El segmento de 3 a 4, se ha dividido en 5 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/5; entonces: al punto **D** le corresponde: $3+\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$

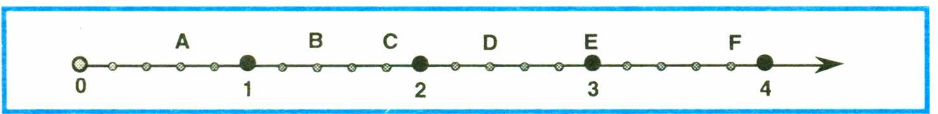
- El segmento de 4 a 5, se ha dividido en 7 partes iguales, siendo cada parte igual a 1/7; entonces: al punto **E** le corresponde: $4+\frac{5}{7}=\frac{33}{7}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

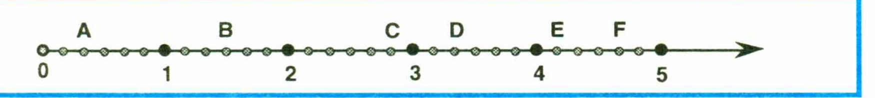
Ejercicio 1 : Escriba tres fracciones que nombren al número racional que corresponde al punto indicado por la flecha en cada recta numérica.



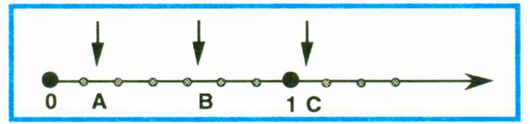
Ejercicio 2 : ¿Qué número racional corresponde a cada uno de los puntos A, B, C, D, E, y F



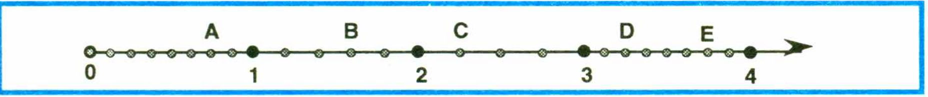
Ejercicio 3 : Esta recta numérica tiene la **Escala en Sextos**. ¿Qué números racionales, corresponden a los puntos A, B, C, D, E, y F.



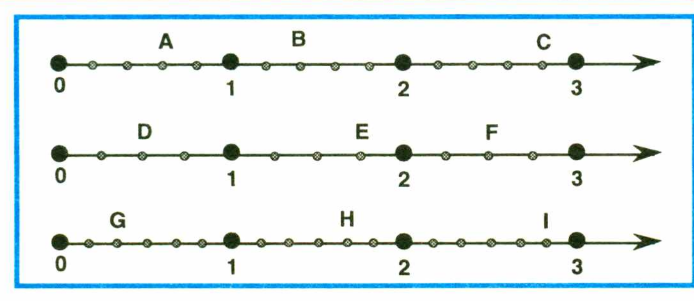
Ejercicio 4 : Las flechas señalan puntos en el medio de dos puntos de la recta numérica. ¿Qué número corresponde al punto de cada letra?



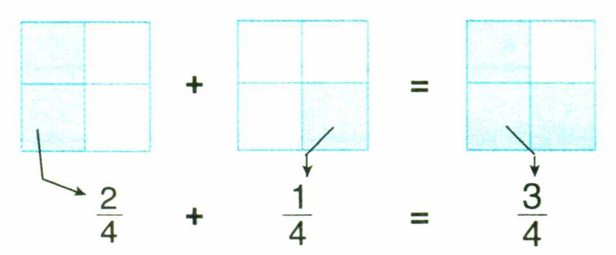
Ejercicio 5 : ¿Qué número corresponde a cada uno de los puntos A, B, C, D y E.



Ejercicio 6 : Escriba en forma simplificada, la fracción que corresponde a cada letra.



Ahora, veamos un ejemplo gráfico:



B. Que los Números Racionales estén Representados por Fracciones de Distinto Denominador (Fracciones Heterogéneas).

Cuándo las fracciones son heterogéneas. Para poder sumarlas hay que convertirlas en fracciones homogéneas, dándoles un común denominador.

Ejemplo 1 : Sumar: $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{7}$

Resolución:

- Damos común denominador.

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & - & 6 & - & 7 & 2 \\ 3 & - & 3 & - & 7 & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 7 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

Común Denominador = $2 \times 3 \times 7 = \boxed{42}$

Luego:

$$\frac{1}{3} = \frac{14 \times 1}{\boxed{42}} = \frac{14}{\boxed{42}}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{\boxed{42}} = \frac{35}{\boxed{42}}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6 \times 3}{\boxed{42}} = \frac{18}{\boxed{42}}$$

Sumando las fracciones homogéneas halladas, se tiene:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{7} = \frac{14}{42} + \frac{35}{42} + \frac{18}{42} = \frac{14 + 35 + 18}{42} = \frac{67}{42}$$

Ejemplo 2 : Efectuar: $\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{2}{10}$

Resolución:

Damos común denominador:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 10 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Común Denominador = $2 \times 3 \times 5 = 30$

Luego:

$$\frac{3}{5} = \frac{6 \times 3}{30} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{10 \times 4}{30} = \frac{40}{30}$$

$$\frac{2}{10} = \frac{3 \times 2}{30} = \frac{6}{30}$$

Sumando las fracciones homogéneas halladas se tiene:

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{2}{10} = \frac{18}{30} + \frac{40}{30} + \frac{6}{30} = \frac{18 + 40 + 6}{30} = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}$$

PARA LA ADICIÓN DE DOS O TRES FRACCIONES SE PUEDE APLICAR LA REGLA DE PRODUCTOS CRUZADOS.

- **PARA DOS FRACCIONES:**

Ejemplo 1 : Efectuar: $\frac{1}{9} + \frac{2}{5}$

Resolución:

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{5} = \frac{5 \times 1 + 9 \times 2}{9 \times 5} = \frac{5 + 18}{45} = \boxed{\frac{23}{45}}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

Ejemplo 2 : Efectuar: $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$

Resolución:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{4 \cdot 8} = \frac{24 + 20}{32} = \frac{44}{32} = \boxed{\frac{11}{8}}$$

- **Para Tres Fracciones:**

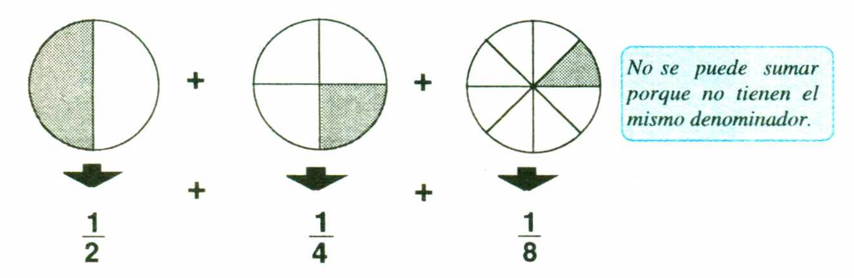
Ejemplo: Efectuar: $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{5}$

Resolución:

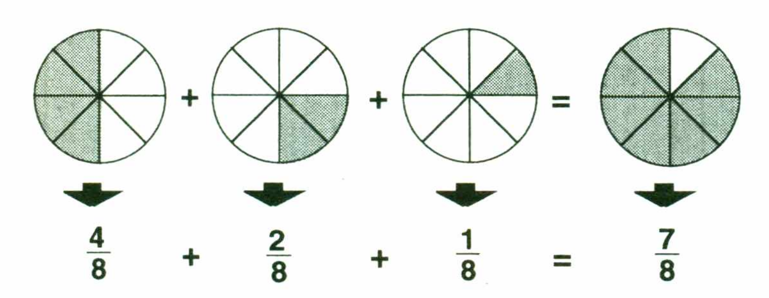
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{5}=\frac{3\times5\times1+4\times5\times2+4\times3\times7}{4\times3\times5}=\frac{15+40+84}{60}=\boxed{\frac{139}{60}}$$

Generalizando: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{d\times f\times a+b\times f\times c+b\times d\times e}{b\times d\times f}$

* Veamos un Ejemplo Gráfico:



Reducción a Común Denominador:



ADICIÓN DE NÚMEROS MIXTOS

1º Se suman las partes enteras, siendo el resultado la parte entera de la suma.

2º Se suman las partes fraccionarias, siendo el resultado, la parte fraccionaria de la suma.

Ejemplo 1 : Efectuar: $3\frac{2}{7} + 5\frac{3}{7}$

Resolución:

- Se suman las partes enteras, osea: $3 + 5 = \boxed{8}$
- Se suman las partes fraccionarias, osea: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \boxed{\frac{5}{7}}$

Luego: **Suma Total =** $8 + \frac{5}{7} = 8\frac{5}{7}$ ***Rpta.***

- También se pueden sumar los números mixtos reduciéndolos a números fraccionarios quedando asi convertida la operación en una suma normal de fracciones.

Pongamos el mismo ejemplo anterior: efectuar: $3\frac{2}{7} + 5\frac{3}{7}$

Resolución:

Convertimos los números mixtos en fracciones, asi:

$$3\frac{2}{7} = \frac{7\times 3 + 2}{7} = \frac{23}{7}$$

$$5\frac{3}{7} = \frac{7\times 5 + 3}{7} = \frac{38}{7}$$

Luego: $\frac{23}{7} + \frac{38}{7} = \frac{23+38}{7} = \frac{61}{7}$ ➡ $61 \div 7$: cociente 8, residuo 5

$$\therefore\ 3\frac{2}{7} + 5\frac{3}{7} = 8\frac{5}{7}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5} + 4\frac{2}{3}$

Resolución:

- Se suman las partes enteras: $3 + 2 + 4 = \boxed{9}$
- Se suman las partes fraccionarias: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = ?$

Damos Común Denominador:

2 - 5 - 3	2
1 - 5 - 3	3
1 - 5 - 1	5
1 - 1 - 1	

Común Denominador = $2\times 3\times 5 = 30$

$$\frac{1}{2} = \frac{15\times 1}{30} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{6\times 1}{30} = \frac{6}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{10\times 2}{30} = \frac{20}{30}$$

Luego: $\frac{15}{30} + \frac{6}{30} + \frac{20}{30} = \frac{15+6+20}{30} = \frac{41}{30}$

Pero: $\boxed{\frac{41}{30} = 1\frac{11}{30}}$

$\therefore$ **Suma Total =** $\boxed{9} + \boxed{1\frac{11}{30}} = 10\frac{11}{30}$ ***Rpta.***

OTRA FORMA:

Convertimos los mixtos a fracciones, asi: $3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5} + 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} + \frac{11}{5} + \frac{14}{3}$

Luego, damos común denominador a:

2 - 5 - 3	2		
1 - 5 - 3	3		
1 - 5 - 1	5		
1 - 1 - 1			

Común Denominador =

$2 \times 3 \times 5 = 30$

Donde:

$$\frac{7}{2} + \frac{11}{5} - \frac{14}{3} = \frac{15 \times 7 + 6 \times 11 + 10 \times 14}{\boxed{30}}$$

$$\frac{7}{2} + \frac{11}{5} - \frac{14}{3} = \frac{105 + 66 + 140}{\boxed{30}} = \frac{311}{30} = 10\,\frac{11}{30}$$ ***Rpta.***

ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS

1º Se convierte el número entero en fracción.

2º Se realiza la operación.

Ejemplo 1: Efectuar: $3 + \frac{2}{5}$

Resolución:

Convertimos el número 3 a fracciones de denominador 5

Asi: $3 = \frac{3 \times 5}{5}$; de donde : $3 = \frac{15}{5}$

Luego: $3 + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$

OTRA FORMA:

$$3 + \frac{2}{5} = \frac{5 \times 3 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

×

5.4.2 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES:

Propiedad Conmutativa:
*La suma de dos números racionales no cambia si se altera el **Orden** de los sumandos.*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Ejemplo: $\frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{5}$

Propiedad Asociativa: *La suma de tres números racionales no cambia si se altera la **Agrupación** de los sumandos.*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo: $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$

Propiedad de Clausura: *Si dos o más números son racionales la suma de ellos también es racional.*

Ejemplo: $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ ***Entonces:*** $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20} \in \mathbb{Q}$

ELEMENTO NEUTRO PARA LA ADICIÓN DE FRACCIONES

*Recuerda que llamamos elemento **Neutro** en la adición, al número que introducido en dicha operación no altera al resultado, en los números enteros es el 0.*

En los números racionales es: $\frac{0}{d}$ *; siendo "d" un número entero distinto de cero (0).*

Diremos, pués, que existe un número racional $\frac{0}{d}$ *tal que todos los números racionales* $\frac{a}{b}$ *se cumple:*

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{d} = \frac{a}{b}$$

ELEMENTO OPUESTO DE UNA FRACCIÓN, LLAMADO TAMBIÉN SIMÉTRICO ADITIVO

*A cualquier número racional se le puede **Asociar** otro número racional llamado **Opuesto**, de tal forma que la suma de ambos dé como resultado el número cero o elemento neutro de la adición.*

*En general, dos números son opuestos cuando, sumados dan **Cero**.*

Así: *El opuesto de* $\frac{a}{b}$ *es* $-\frac{a}{b}$*; porque:* $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b}$ y

El opuesto de $-\frac{a}{b}$ *es* $\frac{a}{b}$ *; porque:* $-\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = \frac{0}{b}$

- *En consecuencia para hallar el opuesto de un número racional basta cambiar de signo osea, si es positivo se cambiará por negativo o viceversa.*

5.4.3 SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Sustracción de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, llamados **Minuendo** y **Sustraendo**, respectivamente, es la operación que tiene por objeto hallar otro número racional $\frac{x}{y}$, llamado **Diferencia**, tal que sumado al sustraendo $\frac{c}{d}$ nos dé el minuendo $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \quad \text{Significa que: } \frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Esto es, **diferencia + sustraendo = minuendo**

Lo mismo que en $\mathbb{Z}$, en el conjunto $\mathbb{Q}$ la sustracción se reduce a una Adición asi que:

*Para restar dos números racionales, se **Suma el Minuendo al Opuesto del Sustraendo.***

En la sustracción de números racionales pueden darse dos casos:

A. Que los Números Racionales esten Representados por Fracciones de Igual Denominador (Fracciones Homogéneas).

En este caso se restan los numeradores, y a esta resta se le pone el mismo denominador.

Ejemplo: Sustraer: $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$

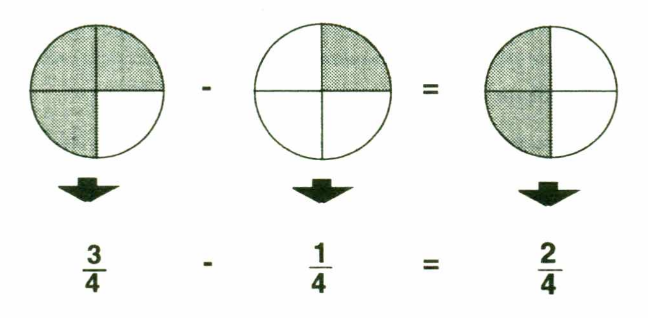
Resolución:

Esta operación consiste en la resta de:

8 novenos - 5 novenos = 3 novenos

$$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{8-5}{9} = \frac{\not{3}}{\not{9}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

* Veamos un ejemplo gráfico:



$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

B. **Que los Números Racionales estén Representados por Fracciones de Distinto Denominador (Fracciones Heterogéneas).**

Cuando las fracciones son heterogéneas. Para poderlas restar hay que convertirlas en fracciones homogéneas, dándoles un común denominador.

Ejemplo (1): Restar: $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$

Resolución:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = ?$ Damos común denominador:

4	-	5	2	
2	-	5	2	**Común Denominador =**
1	-	5	5	$2 \times 2 \times 5 = 20$
1	-	1		

Luego:

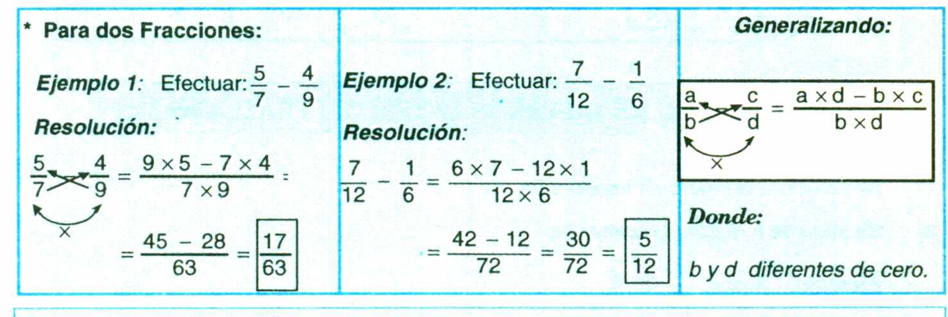
$$\frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{20} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{20} = \frac{8}{20}$$

De Donde: $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$

$$\therefore \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$$

PARA LA RESTA DE DOS O TRES FRACCIONES SE PUEDE APLICAR LA REGLA DE PRODUCTOS CRUZADOS



* **Para dos Fracciones:**

Ejemplo 1: Efectuar: $\frac{5}{7} - \frac{4}{9}$

Resolución:

$$\frac{5}{7} - \frac{4}{9} = \frac{9 \times 5 - 7 \times 4}{7 \times 9} = \frac{45 - 28}{63} = \boxed{\frac{17}{63}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $\frac{7}{12} - \frac{1}{6}$

Resolución:

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7 - 12 \times 1}{12 \times 6} = \frac{42 - 12}{72} = \frac{30}{72} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

Donde:

b y d diferentes de cero.

* **Para tres Fracciones:**

Ejemplo: Efectuar: $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}$

Resolución:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{8 \times 4 \times 2 + 3 \times 4 \times 5 - 3 \times 8 \times 3}{3 \times 8 \times 4}$$

$$= \frac{64 + 60 - 72}{96} = \frac{52}{96} = \boxed{\frac{13}{24}}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \mp \frac{e}{f} = \frac{d \times f \times a \pm b \times f \times c \mp b \times d \times e}{b \times d \times f}$$

Donde:

b, d y f diferentes de cero.

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS MIXTOS

1º Se restan las partes enteras, siendo el resultado la parte entera de la resta.

2º Se restan las partes fraccionarias, siendo el resultado, la parte fraccionaria de la resta.

Ejemplo 1: Restar: $2\frac{2}{3}$ de $5\frac{4}{5}$

Resolución:

- Resta de las partes enteras: $5 - 2 = \boxed{3}$
- Resta de las partes fraccionarias: $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3\times 4 - 5\times 2}{5\times 3} = \frac{12-10}{15} = \boxed{\frac{2}{15}}$

Luego: ➡ $5\frac{4}{5} - 2\frac{2}{3} = \boxed{3} + \boxed{\frac{2}{15}} = 3\frac{2}{15}$

OTRA FORMA: $5\frac{4}{5} - 2\frac{2}{3}$; Convertimos los mixtos a fracciones

$5\frac{4}{5} = \frac{5\times 5 + 4}{5} = \boxed{\frac{29}{5}}$; $2\frac{2}{3} = \frac{3\times 2 + 2}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$

Luego: $\boxed{\frac{29}{5}} - \boxed{\frac{8}{3}} = \frac{29\times 3 - 5\times 8}{5\times 3} = \frac{87-40}{15} = \frac{47}{15} = \begin{array}{r|l} 47 & 15 \\ \hline 2 & 3 \end{array} = 3\frac{2}{15}$

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS

1º Se convierte el entero en fraccionario.

2º Se procede a realizar la operación.

Ejemplo: Restar: $\frac{3}{4}$ de 5

Resolución:

$$5 - \frac{3}{4} = ?$$

Convertimos el 5 a fracción de denominador 4, Asi: $5 = \frac{5\times 4}{4} = \frac{20}{4}$

Luego: $5 - \frac{3}{4} = \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{20-3}{4} = \frac{17}{4} = \begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ \hline 1 & 4 \end{array} = 4\frac{1}{4}$

OTRA FORMA:

$$5 - \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4 - 3}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

OPERACIONES COMBINADAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN EN $\mathbb{Q}$

Ejemplo 1: Efectuar: $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{9}$

Resolución:

Por la regla de productos cruzados, obtenemos:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{9} = \frac{4 \times 9 \times 3 + 8 \times 9 \times 5 - 8 \times 4 \times 1}{8 \times 4 \times 9} = \frac{108 + 360 - 32}{288} = \frac{436}{288}$$

Simplificando ésta última fracción: $\frac{436}{288} : 4 = \frac{109}{72}$ Luego: $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{9} = \frac{109}{72}$

OTRA FORMA *Efectuar:* $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{9}$

- Damos común denominador:

8	4	9	2
4	2	9	2
2	1	9	2
1	1	9	3
1	1	3	3
1	1	1	

Común Denominador =

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

Luego: $\frac{3}{8} + \frac{5}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9 \times 3 + 18 \times 5 - 8 \times 1}{72} = \frac{27 + 90 - 8}{72} = \frac{109}{72}$

Ejemplo 2: Efectuar: $R = \left(\frac{5}{9} - \frac{7}{4} + \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{13}{6} + \frac{5}{9}\right)$

Resolución:

- Suprimimos parentesis, los términos del segundo paréntesis cambian de signo,

$R = \cancel{\frac{5}{9}} - \frac{7}{4} + \cancel{\frac{3}{8}} - \cancel{\frac{3}{8}} + \frac{13}{6} - \cancel{\frac{5}{9}}$; Anulamos las fracciones opuestas.

$$R = \frac{13}{6} - \frac{7}{4} = \frac{13 \times 4 - 6 \times 7}{6 \times 4} = \frac{52 - 42}{24} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{24}} = \frac{5}{12}$$

Ejemplo 3: Efectuar: $M=\left[\frac{7}{4}-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]-\left[\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)\right]$

Resolución:

- En primer lugar efectuamos las restas que hay en cada parentesis; asi:

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\times3-5\times1}{5\times3}=\frac{6-5}{15}=\boxed{\frac{1}{15}}$$

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{5\times3-4\times2}{4\times5}=\frac{15-8}{20}=\boxed{\frac{7}{20}}$$

- La expresión "M" quedaría asi: $M=\left[\frac{7}{4}-\frac{1}{15}\right]-\left[\frac{5}{8}-\frac{7}{20}\right]$

- Suprimimos corchetes, los términos del segundo paréntesis cambian de signo por estar precedido del signo -, obteniendo: $M=\frac{7}{4}-\frac{1}{15}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$

- Damos común denominador:

4	-15	- 8	-20	2
2	-15	- 4	-10	2
1	-15	- 2	- 5	2
1	-15	- 1	- 5	3
1	- 5	- 1	- 5	5
1	- 1	- 1	- 1	

Común Numerador:

$2\times2\times2\times3\times5=120$

Luego: $$M=\frac{7}{4}-\frac{1}{15}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=\frac{30\times7-8\times1-15\times5+6\times7}{\boxed{120}}$$

$$M=\frac{7}{4}-\frac{1}{15}-\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=\frac{210-8-75+42}{\boxed{120}}=\frac{169}{120}\Rightarrow\ \therefore\ \boxed{M=\frac{169}{120}}$$

Ejemplo 4: Efectuar: $N=\left(5\frac{2}{3}+2\frac{3}{2}-4\right)-\left[\frac{7}{2}-\left(9\frac{1}{4}-5\right)\right]$

Resolución:

- En primer lugar transformamcs los números mixtos a fracción, veamos.

$$N=\left(5\frac{2}{3}+2\frac{3}{2}-4\right)-\left[\frac{7}{2}-\left(9\frac{1}{4}-5\right)\right]\Rightarrow N=\left(\frac{17}{3}+\frac{7}{2}-4\right)-\left[\frac{7}{2}-\left(\frac{37}{4}-5\right)\right]$$

$$N=\left(\frac{17}{3}+\frac{7}{2}-4\right)-\left[\frac{7}{2}-\left(\frac{37-4\times5}{4}\right)\right]$$

$$N=\left(\frac{17}{3}+\frac{7}{2}-4\right)-\left[\frac{7}{2}-\frac{17}{4}\right]$$; Suprimimos el corchete y cambiando de signo a sus términos, por estar precedido del signo —

$$N=\frac{17}{3}+\cancel{\frac{7}{2}}-4-\cancel{\frac{7}{2}}+\frac{17}{4}$$; Anulamos las fracciones opuestas $\boxed{N=\frac{17}{3}-\frac{4}{1}+\frac{17}{4}}$

Damos común denominador:

3 - 1 - 4	2	
3 - 1 - 2	2	**Común Denominador =**
3 - 1 - 1	3	$2 \times 2 \times 3 = 12$
1 - 1 - 1		

Luego: $N = \frac{17}{3} - \frac{4}{1} + \frac{17}{4} = \frac{4 \times 17 - 12 \times 4 + 3 \times 17}{12} = \frac{68 - 48 + 51}{12} = \frac{71}{12}$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE FRACCIONES

Problema 1: De una pieza de tela se han vendido sucesivamente $18\frac{9}{10}$ metros y $8\frac{1}{2}$ metros, y sobra un retazo de $15\frac{3}{5}$ metros. ¿Cuál era el largo original de la pieza?

Resolución:

Recordamos que lo que se vende más lo que sobra de la pieza de tela nos dá la longitud de la pieza.

Luego: Longitud de la pieza = $18\frac{9}{10} + 8\frac{1}{2} + 15\frac{3}{5}$

Longitud de la pieza = $(18 + 8 + 15) + \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)$

Su Común Denominador es 10

Longitud de la pieza = $41 + \frac{1 \times 9 + 5 \times 1 + 2 \times 3}{10}$

Longitud de la pieza = $41 + \frac{20}{10} = 41 + 2 = 43$

Rpta: El largo original de la pieza es de 43 metros.

Problema 2: Hallar el valor del minuendo de la siguiente sustracción: $\frac{a}{b} - \frac{17}{3} = \frac{5}{3}$

Resolución:

De la expresión: $\frac{a}{b} - \frac{17}{3} = \frac{5}{3}$; pasamos $-\frac{17}{3}$ al segundo miembro con signo cambiado osea positivo.

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3} + \frac{17}{3} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5 + 17}{3} = \frac{22}{3} \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{22}{3}}$$

Rpta: El valor del minuendo $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{22}{3}$

Problema 3: Hallar el valor del sustraendo de la siguiente sustracción: $\frac{4}{7} - \frac{a}{b} = \frac{1}{7}$

Resolución:

De la expresión: $\frac{4}{7} - \frac{a}{b} = \frac{1}{7}$; transponemos términos de la siguiente manera:

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{4-1}{7} = \frac{a}{b} \rightarrow \boxed{\frac{3}{7} = \frac{a}{b}}$$

Rpta: El valor del sustraendo $\frac{a}{b}$ es igual a 3/7.

Problema 4: A Manuel le entregan $\frac{2}{4}$ de una tableta de chocolate y después $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte de la tableta recibió y qué parte de la tableta quedó?

Resolución:

La tableta de chocolate representa la unidad. Osea: 1

Lo que le entregan a Manuel $= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

Lo que queda de la tableta = La tableta de chocolate - Lo que entregan a Manuel

Lo que queda de la tableta $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Rpta: Manuel recibió 3/4 del chocolate y lo que queda es 1/4 .

Problema 5: ¿Cuánto le falta a $\frac{2}{5}$ para ser igual a $\frac{2}{3}$?

Resolución:

Sea: "x" lo que falta a $\frac{2}{5}$ para ser igual a $\frac{2}{3}$.

Luego: $\frac{2}{5} + x = \frac{2}{3}$;Pasamos $\frac{2}{5}$ al segundo miembro con signo cambiado, osea con -.

$$x = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}$$

Rpta: Lo que le falta a 2/5 para ser igual a 2/3 es 4/15.

Problema 6 : ¿Cuánto le sobra a 7/4 para ser igual a 2/3.

Resolución:

Sea "x" lo que le sobra a 7/4 para ser igual a 2/3.

Luego: $\frac{7}{4} - x = \frac{2}{3}$; Transponiendo términos, obtenemos:

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{3} = x \rightarrow \frac{7\times 3 - 4\times 2}{4\times 3} = x \rightarrow \frac{21-8}{12} = x \rightarrow \boxed{x = \frac{13}{12}}$$

Rpta: Lo que le sobra a 7/4 para ser igual a 2/3 es 13/12.

Problema 7 : La edad de un hijo es la sexta parte de la edad de su padre. Las edades de los dos juntos suman 42 años. ¿Cuál es la edad del padre y cuál la del hijo?

Resolución:

Sean: $\begin{cases} \text{Edad del Padre} = x \\ \text{Edad del Hijo} = \frac{x}{6} \end{cases}$

Del enunciado: $x + \frac{x}{6} = 42$ años ➡ $\frac{6x + x}{6} = 42$ años

$\frac{7x}{6} = 42$ años ➡ $x = \frac{\cancel{42}\times 6}{\cancel{7}}$ años $= 6\times 6$ años ∴ $\boxed{x = 36 \text{ años}}$

Rpta: La edad del padre es: x = 36 años y la edad del hijo es : $\frac{x}{6} = \frac{36}{6} = 6$ años.

Problema 8 : Un obrero haría un trabajo en 12 días, y su hijo en 20 días, si trabajan juntos en qué fracción del trabajo aventaja el padre al hijo en un día?

Resolución:

Sea, el trabajo = t

El obrero haría el trabajo "t" en 12 días → en 1 día haría: $\frac{t}{12}$

Su hijo haría el trabajo "t" en 20 días → en 1 día haría: $\frac{t}{20}$

Luego, la ventaja sería: $\boxed{\frac{t}{12} - \frac{t}{20} = \frac{20t - 12t}{12\times 20} = \frac{\cancel{8}t}{\cancel{12}\times 20} = \frac{\cancel{2}t}{3\times \cancel{20}} = \frac{1t}{3\times 10} = \frac{t}{30} = \frac{1}{30}t}$

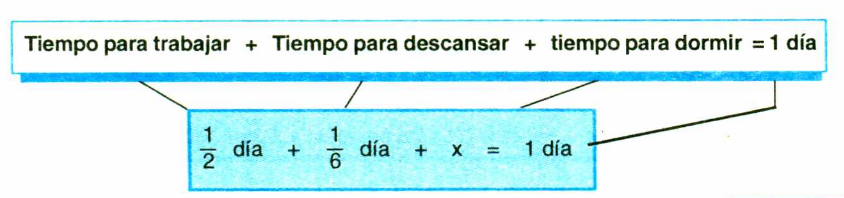
Rpta: El padre aventaja al hijo en $\frac{1}{30}$ del trabajo.

Problema 9: Si una persona emplea la mitad del día para trabajar y la sexta parte del día para descansar. ¿Cuánto del día le queda para dormir?

Resolución:

Sea: x = lo que queda del día para dormir

Del enunciado; plantamos lo siguiente:



Transponemos términos: $x = 1 \text{ día} - \frac{1}{2} \text{ día} - \frac{1}{6} \text{ día} \Rightarrow x = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \text{ día}$

Común Denominador es 6

$$x = \left(\frac{6 \times 1 - 3 \times 1 - 1}{6}\right) \text{ día} = \frac{2}{6} \text{ día} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{1}{3} \text{ día}}$$

Rpta: Lo que queda para dormir es $\frac{1}{3}$ del día

Problema 10: La suma de dos números es 5/6 y su diferencia es 1/6. ¿Cuáles son esos números?

Resolución:

Sean los dos números: a y b.

Del enunciado, planteamos lo siguiente: a + b = 5/6 .... (1)

a - b = 1/6 .... (2)

Nota: **Σ. m.a.m:** *Significa sumar miembro a miembro.*

$$\Sigma. \text{ M.A.M: } 2a = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$2a = 1 \rightarrow \quad \therefore \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Luego, reemplazamos el valor de "a" en la expresión (1): $a + b = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{5}{6}$

De donde: $b = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5 \times 2 - 6 \times 1}{6 \times 2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{b = \frac{1}{3}}$

Rpta: Los números pedidos son: 1/2 y 1/3.

OTRA FORMA

Recuerda que este tipo de problemas, también se resuelve, aplicando las formas ya estudiadas en capítulos anteriores, veamos:

Número Mayor $= \dfrac{S + D}{2}$

y

Número Menor $= \dfrac{S - D}{2}$

Siendo: **S = suma de dos números**
D = diferencia de dos números

Luego: Número Mayor $= \dfrac{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{6}{6}}{2}$ ➡ ∴ Número Mayor $= \dfrac{1}{2}$

Número Menor $= \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{4}{6}}{2} = \dfrac{4}{12}$ ➡ ∴ Número Menor $= \dfrac{1}{3}$

Problema 11 : Si al numerador y denominador de la fracción 4/13 le sumamos 5. ¿áumenta o disminuye de valor y en cuánto?

Resolución:

- Fracción inicial = 4/13
- Fracción que se obtiene al agregar 5 al numerador y denominador: $\dfrac{4 + 5}{13 + 5} = \dfrac{9}{18}$

Luego, hacemos la comparación entre la fracción inicial y la fracción final, asi:

$\dfrac{4}{13} \times \dfrac{9}{18}$ ➡ $\underbrace{4 \times 18}_{72}$ **?** $\underbrace{13 \times 9}_{117}$ → $72 < 117$ (Esto nos indica que la fracción 4/13 aumenta su valor)

Ahora para saber en cuento aumenta restamos:

$$\frac{9}{18} - \frac{4}{13} = \frac{1}{2} - \frac{4}{13} = \frac{1 \times 13 - 2 \times 4}{2 \times 13} = \frac{5}{26}$$

Rpta: La fracción 4/13 aumenta en 5/26.

Problema 12 : ¿Cuánto hay que restarle a $8\frac{1}{2}$ para que sea igual a la suma de $2\frac{1}{3}$ y $5\frac{1}{2}$?

Resolución:

Este tipo de problema, se plantea así: $8\frac{1}{5} - x = 2\frac{1}{3} + 5\frac{1}{2}$

$$\frac{41}{5} - x = \frac{7}{3} + \frac{11}{2}$$; *Transponemos términos*

$$\frac{41}{5} - \frac{7}{3} - \frac{11}{2} = x$$; *Damos Común Denominador, siendo este igual a 30*

$$\frac{6\times41 - 10\times7 - 15\times11}{30} = x \rightarrow \frac{246 - 70 - 165}{30} = x \rightarrow \boxed{\frac{11}{30} = x}$$

Rpta: Lo que hay que restarle a $8\frac{1}{5}$ para que sea igual a la suma de $2\frac{1}{3}$ y $5\frac{1}{2}$ es 11/30

Problema 13 : Un obrero puede hacer un trabajo en 6 días y otro menos hábil en 8 días ¿Qué fracción del trabajo hacen juntos en un día?

Resolución:

El obrero puede hacer su trabajo en 6 días ➠ En 1 día hará: $\frac{1}{6}$ trabajo.

El otro menos hábil puede hacer el mismo trabajo en 8 días ➠ En 1 día hará: $\frac{1}{8}$ trabajo.

Luego: En 1 día juntos harán: $\frac{1}{6}$ trabajo $+$ $\frac{1}{8}$ trabajo

En 1 día juntos harán $= \left(\frac{1\times8 + 6\times1}{6\times8}\right)$trabajo $= \frac{14}{48}$ trabajo

En 1 día juntos harán $= \frac{7}{24}$

Rpta: Juntos en 1 día harán 7/24 del trabajo.

Problema 14 : Un depósito contiene 40 litros de leche y 16 de agua, se extraen 21 litros de la mezcla. ¿Cuántos litros de leche salen?

Resolución:

Litros de mezcla = 40 litros de leche + 16 litros de agua.

Litros de mezcla = 56

Luego, hallamos la porción o fracción de cada parte de la mezcla

$$\text{Fracción de leche en la mezcla} = \frac{\text{Litros de Leche}}{\text{Litros de Mezcla}} = \frac{40}{56}$$; *Simplificando se tiene:*

$$\text{Fracción de leche en la mezcla} = \frac{5}{7}$$

Esto quiere decir que $\frac{5}{7}$ de la mezcla es leche. También se podría decir que por cada 7 litros de mezcla 5 son de leche.

$$\text{Fracción de Agua en la mezcla} = \frac{\text{Litros de Agua}}{\text{Litros de Mezcla}} = \frac{16}{56}$$; *Simplificando se tiene*

$$\text{Fracción de Agua en la mezcla} = \frac{2}{7}$$

Esto quiere decir que $\frac{2}{7}$ de la mezcla es agua. También se podría decir que cada 7 litros de mezcla 2 litros son de agua

Si se extraen 21 litros de la mezcla, los cinco sétimos es leche y los dos sétimos es agua. Veamos:

$$\text{Leche} = \frac{5}{7}(21\ \text{Litros}) = 5\,(3\ \text{Litros}) = \boxed{15\ \text{Litros}}$$

$$\text{Agua} = \frac{2}{7}(21\ \text{Litros}) = 2\,(3\ \text{Litros}) = \boxed{6\ \text{Litros}}$$

Rpta: En 21 litros de mezcla, salen 15 litros de leche.

Problema 15 : Un depósito contiene 96 litros de un líquido P, 36 litros de un líquido Q y 24 litros de un líquido R. Se extraen 78 litros de mezcla. ¿Cuántas litros del líquido "P" salen?

Resolución:

Litros de mezcla = 96 litros + 36 litros + 24 litros

= 156 litros

Luego, hallamos la porción o fracción de cada parte de líquido.

- Fracción del líquido en la mezcla $P = \dfrac{\text{Litros del líquido P}}{\text{Litros de mezla}} = \dfrac{96}{156} = \dfrac{24}{39}$

- Fracción del líquido en la mezcla $Q = \dfrac{\text{Litros del líquido Q}}{\text{Litros de mezla}} = \dfrac{36}{156} = \dfrac{9}{39}$

- Fracción del líquido en la mezcla $R = \dfrac{\text{Litros del líquido R}}{\text{Litros de mezla}} = \dfrac{24}{156} = \dfrac{2}{13}$

Si se extraen 78 litros de la mezcla, entonces del líquido P extrae:

$$\text{Líquido P} = \frac{24}{\cancel{39}_{1}}(\cancel{78}^{2}\text{ litros}) = 48$$

Líquido P = 48 litros

Rpta. En 156 litros de mezcla, salen 48 litros del líquido P.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 39

Ejercicio 1 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - \frac{1}{5}$	e). $\frac{7}{8} + 3\frac{1}{4} + \frac{5}{12}$	i). $\frac{5}{30} + \frac{7}{42} + \frac{9}{54}$
b). $2\frac{3}{5} - \frac{4}{3} + \frac{7}{2} + \frac{3}{8}$	f). $4\frac{1}{2} - 6\frac{1}{7} + 1\frac{2}{6}$	j). $\frac{7}{35} + \frac{3}{18} + \frac{7}{105}$
c). $\frac{11}{4} + \frac{3}{6} + \frac{2}{7} + \frac{1}{2}$	g). $\frac{13}{20} + \frac{5}{8} - \frac{6}{9} + \frac{7}{4}$	k). $\frac{7}{9} + \frac{5}{24} + \frac{11}{36}$
d). $\frac{7}{3} - \frac{2}{8} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10}$	h). $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} - 4 + \frac{2}{6}$	l). $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{10}$

Rpta.

a). $1\frac{43}{60}$	b). $5\frac{17}{120}$	c). $4\frac{1}{28}$	d). $2\frac{7}{12}$	e). $4\frac{13}{24}$	f). $\frac{-13}{42}$
g). $2\frac{43}{120}$	h). $\frac{1}{3}$	i). $\frac{1}{2}$	j). $\frac{13}{30}$	k). $1\frac{7}{24}$	l). $1\frac{59}{120}$

Ejercicio 2 : Efectuar las sumas siguientes:

a). $3\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6}$	d). $3\frac{9}{10} + 4\frac{4}{5}$	g). $19\frac{3}{8} - 13\frac{3}{4}$
b). $1\frac{2}{5} + 6\frac{2}{7}$	e). $23\frac{9}{10} + 32\frac{1}{5}$	h). $4\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} + 6\frac{4}{3}$
c). $2\frac{4}{9} + 3\frac{1}{9}$	f). $14\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3}$	i). $11\frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} + 5\frac{15}{16}$

Rpta.

a). $6\frac{1}{2}$	c). $5\frac{5}{9}$	e). $56\frac{1}{10}$	g). $5\frac{5}{8}$	i). $19\frac{5}{16}$
b). $7\frac{24}{35}$	d). $8\frac{7}{10}$	f). $5\frac{5}{6}$	h). $17\frac{1}{2}$	

Ejercicio 3 : Halle los numeradores p y q

a). $6\frac{1}{5} = \frac{p}{5} + \frac{1}{5}$ ▶ $6\frac{1}{5} = \frac{q}{5}$	c). $3\frac{2}{3} = \frac{p}{3} + \frac{2}{3}$ ▶ $3\frac{2}{3} = \frac{q}{3}$
b). $5\frac{1}{4} = \frac{p}{4} + \frac{1}{4}$ ▶ $5\frac{1}{4} = \frac{q}{4}$	d). $7\frac{4}{5} = \frac{p}{5} + \frac{4}{5}$ ▶ $7\frac{4}{5} = \frac{q}{5}$

Ejercicio 4 : Determine el numerador "x" y también la fracción impropia para "y".

a). $6\frac{1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = y$	d). $4\frac{3}{8} = \frac{x}{8} + \frac{3}{8} = y$	g). $12\frac{3}{4} = \frac{x}{4} + \frac{3}{4} = y$
b). $10\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = y$	e). $6\frac{2}{3} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = y$	h). $8\frac{4}{9} = \frac{x}{9} + \frac{4}{9} = y$
c). $3\frac{2}{5} = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} = y$	f). $3\frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = y$	i). $7\frac{5}{6} = \frac{x}{6} + \frac{5}{6} = y$

Ejercicio 5 : ¿Cuáles son los numeradores que faltan?

a). $\frac{5}{3} = 1 + \frac{\square}{3}$	d). $\frac{13}{3} = 4 + \frac{\square}{3}$	g). $\frac{127}{20} = 6 + \frac{\square}{20}$
b). $\frac{12}{5} = 2 + \frac{\square}{5}$	e). $\frac{35}{8} = 4 + \frac{\square}{8}$	h). $\frac{135}{24} = 5 + \frac{\square}{24}$
c). $\frac{27}{4} = 6 + \frac{\square}{4}$	f). $\frac{65}{6} = 10 + \frac{\square}{6}$	i). $\frac{629}{37} = 17 + \frac{\square}{37}$

Ejercicio 6 : ¿Cuánto le falta a la suma de: $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{11}$ y $\frac{1}{3}$ para ser igual a la unidad?

Rpta. $\frac{25}{231}$

Ejercicio 7 : De un tonel se han retirado sucesivamente $45\frac{1}{3}$ litros, $66\frac{5}{6}$ litros y aun quedan $97\frac{5}{6}$ litros. Hallar la capacidad del tonel.

Rpta. 210 Litros

Ejercicio 8 : ¿Qué longitud hay que añadir $39\frac{2}{5}$ metros, para tener $64\frac{1}{5}$ metros?

Rpta. $24\frac{4}{5}$ m

Ejercicio 9 : Tenia derecho a percibir los $\frac{4}{5}$ de una suma de dinero. Por ahora sólo me dieron los $\frac{5}{12}$. ¿Cuánto se me debe aún?

Rpta. $\frac{23}{60}$

Ejercicio 10 : La edad de un hijo es las $\frac{3}{5}$ partes de la edad de su padre. Las edades de los dos juntos se diferencian en 16 años. ¿Cuál es la edad del padre y cuál la del hijo?

Rpta. 40 y 24 años

Ejercicio 11 : Una ama de casa compra 3 kilos de carne, $\frac{3}{4}$ kg de arroz; $1\frac{3}{5}$ kg de frutas y $2\frac{1}{3}$ kg de verduras. ¿Qué peso tuvo que llevar?

Rpta. $7\frac{41}{60}$ Kg

Ejercicio 12 : Sara dispone del día libre que tiene, de la siguiente forma: la sexta parte se dedica a leer; la quinta parte a ver televisión, los 3/8 del día para dormir y el resto del día para pasear. ¿Qué parte del día dedica a pasear?

Rpta. $\frac{31}{120}$

Ejercicio 13 : ¿Qué conviene más, recibir sucesivamente $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ kg de caramelos o recibir sucesivamente $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{8}$ kg de caramelos?

Rpta. $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{8}$ Kg

Ejercicio 14 : La suma de dos números es $\frac{5}{7}$ y su diferencia es $\frac{3}{7}$ ¿Cuáles son esos números?

Rpta. $\frac{4}{7}$ y $\frac{1}{7}$

Ejercicio 15 : César mide $1\frac{3}{5}$ metros y su hermano julio mide $1\frac{2}{3}$ metros. ¿Cuál de ellos es más alto?

Rpta. Julio

Ejercicio 16 : Un obrero haría un trabajo en 10 días y su hijo en 15 días si trabajan juntos en que fracción del trabajo aventaja el padre al hijo en un día?

Rpta. $\frac{1}{30}$

Ejercicio 17 : Un obrero debía realizar un trabajo en 5 días. Después de trabajar 3 días ¿Qué fracción de trabajo le queda por hacer?

Rpta. $\frac{2}{5}$ del trabajo

Ejercicio 18 : Dadas las fracciones $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$ y $\frac{4}{9}$. Halla la diferencia entre la mayor y la menor, y la suma de las otras dos.

Rpta. $\frac{5}{18}$ y $\frac{7}{12}$

Ejercicio 19 : Un grifo llena un depósito en 3 horas. ¿Qué fracción del depósito llena en 30 minutos?

Rpta. $\frac{1}{6}$ del deposito

Ejercicio 20 : Un obrero puede hacer un trabajo en 4 días y otro menos hábil en 10 días. ¿Qué fracción del trabajo hacen juntos en un día?

Rpta. $\frac{7}{20}$ del trabajo

Ejercicio 21 : De una cuenta que me debían, me han pagado primero la tercera parte, y luego, la mitad ¿Qué fracción de la cuenta me han pagado? ¿Qué fracción de la cuenta me queda por cobrar?

Rpta. Pagaron 5 / 6 ; quedan por cobrar 1 / 6

Ejercicio 22 : Un boticario llena con agua tres frascos que contienen respectivamente, el primero $4\frac{2}{5}$ litros, el segundo $1\frac{3}{5}$ litros, y el tercero tanto como los dos anteriores juntos. ¿Cuál es la cantidad de agua que vertió en total en estos frascos?

Rpta. 12 Litros

Ejercicio 23 : De una pieza de tela que tenía $60\frac{5}{6}$ metros, se han cortado $28\frac{1}{6}$ metros, y después $15\frac{2}{3}$ metros. El resto se ha vendido a 13 soles el metro. ¿Cuánto se ha sacado de la venta de esa tercera parte?

Rpta. 221 soles

Ejercicio 24 : Un deposito contiene 60 litros de vino y 25 de agua. Se extraen 34 litros de la mezcla. ¿Cuántos litros de vino salen?

Rpta. 24 Litros

Ejercicio 25 : Un deposito contiene 72 litros de un líquido A; 24 litros de un líquido B y 16 litros de un líquido C. Se extraen 56 litros de mezcla. ¿Cuántos litros del líquido "B" salen?

Rpta. 12 Litros

5.5 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$.

5.5.1 MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$.

Multiplicar números racionales es multiplicar fracciones, donde la multiplicación con fracciones tiene la misma finalidad que la **Multiplicación con Números Enteros**. Los diversos casos que se pueden presentar pueden reducirse a los siguientes:

1ER CASO: Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores para formar el numerador del producto, y se multiplican los denominadores para formar el denominador del producto.

Ejemplos: a). $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$ b). $\frac{6}{11} \times \frac{4}{3} = \frac{6 \times 4}{11 \times 3} = \frac{24}{33}$

2DO CASO: Una fracción de otra fracción es igual a una fracción por otra fracción.

Ejemplo: $\frac{4}{3}$ de $\frac{12}{2} = \frac{4 \times 12}{3 \times 2} = \frac{48}{6}$

3ER CASO: Para multiplicar varias fracciones, se multiplican los numeradores para formar el numerador del producto, y se multiplican los denominadores para formar el denominador del producto.

Ejemplo: $\frac{6}{5} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{6 \times 8 \times 1}{5 \times 3 \times 2} = \frac{48}{30}$

4TO CASO: Para multiplicar una fracción por un entero se multiplica el numerador de la fracción por el entero y se pone el mismo denominador.

Ejemplos: a). $\frac{2}{5} \times 10 = \frac{2 \times 10}{5} = \frac{20}{5}$ b). $8 \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4}$

5TO CASO: Para multiplicar entre sí dos números mixtos se les transforma en quebrados impropios y se efectúa la multiplicación como cuando se multiplican entre si dos fracciones. Después se vuelve a transformar el quebrado impropio, que es el resultado, en número mixto.

Ejemplo: $2\frac{3}{4} \times 5\frac{2}{7} = \frac{11}{4} \times \frac{37}{7} = \frac{11 \times 37}{4 \times 7} = \frac{407}{28} = 14\frac{15}{28}$

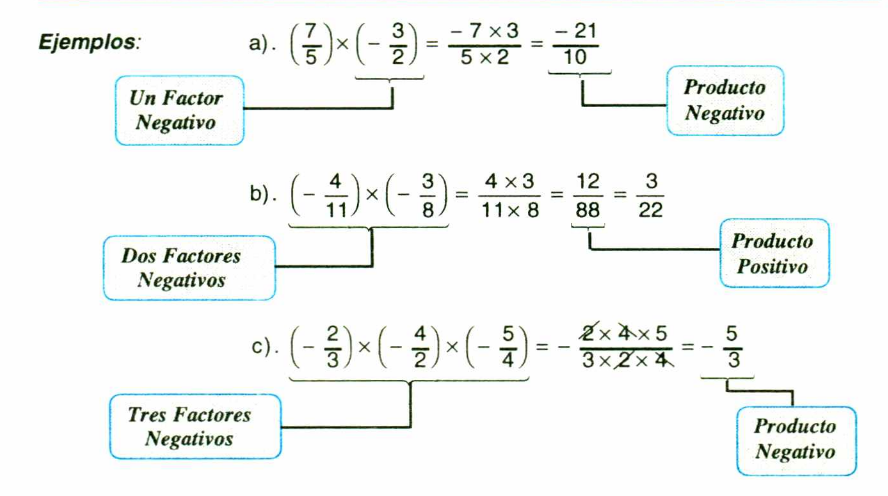
$$\begin{array}{r|l} 407 & 28 \\ \underline{28\downarrow} & 14 \\ 127 & \\ \underline{112} & \\ 15 & \end{array}$$

5.5.2 SIGNO DEL PRODUCTO DE NÚMEROS RACIONALES

Puesto que un número racional viene representado por un par ordenado de números enteros $\frac{a}{b}$, para saber el signo que ha de tener el producto de números racionales se sigue la misma norma que para el producto de números enteros; osea:

$(+) \times (+) = (+)$
$(-) \times (-) = (+)$
$(+) \times (-) = (-)$
$(-) \times (+) = (-)$

Observación: *Si el número de factores negativos es **Impar**, el producto es negativo, en los restantes casos es positivo.*



Ejemplos:

a). $\left(\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{-21}{10}$

b). $\left(-\frac{4}{11}\right) \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{4 \times 3}{11 \times 8} = \frac{12}{88} = \frac{3}{22}$

c). $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{\cancel{2} \times \cancel{4} \times 5}{3 \times \cancel{2} \times \cancel{4}} = -\frac{5}{3}$

5.5.3 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

I. Propiedad Conmutativa:

*Esta propiedad se enuncia diciendo que **El Orden de los Factores no Altera el Producto**.*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

Ejemplos: a). $\frac{5}{7} \times \frac{11}{3} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{7}$ b). $\frac{-3}{4} \times \frac{5}{-2} = \frac{5}{-2} \times \frac{-3}{4}$

II. Propiedad Asociativa:

*Esta propiedad se enuncia diciendo que **Dos o Más Factores se pueden Sustituir por su Producto**.*

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo: $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{12}{7} = \left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{12}{7} = \frac{5}{6} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{12}{7}\right)$

III. Propiedad Distributiva de la Multiplicación con Respecto a la Adición.

Esta propiedad se enuncia diciendo que para multiplicar una suma por un número, se ha de multiplicar cada sumando por dicho número y sumar después los resultados.

Dados los racionales: $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ ➠ $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$

Ejemplo: a). $\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\right)$

b). $\frac{2}{7}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}\right)$

IV. Elemento Neutro de los Números Racionales, Respecto a la Multiplicación.

Llamamos elemento neutro de la multiplicación al número que, introducido en dicha operación, no altera el resultado. El elemento neutro de los números racionales, respecto a la multiplicación, es la ***Unidad****, definida por la clase* $\frac{a}{a}$ *, en donde "a" significa cualquier número entero, excepto el Cero;*

Por Ejemplo: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, ... etc .

Aplicación del Elemento Neutro:

a). $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{8}$ c). $\frac{11}{5}=\frac{11}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{44}{20}$

b). $\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{3}=\frac{21}{6}$ d). $\frac{6}{13}=\frac{6}{13}\times\frac{5}{5}=\frac{30}{65}$

Es decir: Para todo $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$; $\frac{a}{b}\times 1=\frac{a}{b}$

V. Elemento Simétrico (Llamado También Inverso o Recíproco), de los Números Racionales, Respecto a la Multiplicación.

Todos los números racionales, excluido el ***Cero****, tienen Simétrico.*

- *Un número es denominado elemento* ***Simétrico o Recíproco*** *de otro respecto a la multiplicación, si el producto de los dos números da como resultado el elemento neutro osea 1.*

Ejemplos: - *El inverso o recíproco de* $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$ porque: $\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{20}{20}=1$

- *El inverso o recíproco de* $\frac{-3}{8}$ es $\frac{-8}{3}$ porque: $\frac{-3}{8}\times\frac{-8}{3}=\frac{24}{24}=1$

- *El inverso o recíproco de* $\frac{1}{6}$ *es* $\frac{6}{1}$ porque: $\frac{1}{6} \times \frac{6}{1} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} = 1$

- *El inverso o recíproco de* $\frac{0}{9}$ No esta definido

**Pués bien para cada número racional* $\frac{a}{b}$ *distinto de cero, hay un número racional recíproco único* $\frac{x}{y}$ *tal que:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = 1 \ ; \ \text{Donde}: \ \frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

VI. Propiedad de Clausura.

Esta propiedad se enuncia diciendo, si multiplicamos dos números racionales, el resultado también será un número racional.
Es decir.

Si: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ Entonces : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

Ejemplo: $\frac{3}{8} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}$ Entonces : $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \in \mathbb{Q}$

MULTIPLICACIÓN POR CERO:

El producto de cualquier número racional por cero es cero. Así pués:

$$\frac{a}{b} \times 0 = \frac{0}{b} = 0$$

Reciprocamente, si el producto de dos números racionales, es cero, entonces al menos uno de los factores es Cero.

FRACCIÓN DE FRACCIÓN:

Es la expresión que representa una o varias partes iguales de otra fracción.

Así: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$ es una fracción equivalente a $\frac{1}{12}$ porque:

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{6} = \frac{1 \times \frac{1}{6}}{2} = \frac{\frac{1 \times 1}{6}}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 6} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

La expresión $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{2}$ de los $\frac{5}{8}$ se llama **Fracción Múltiple** y equivale a:

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{5}}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Luego: **para reducir una fracción de fracción o fracción múltiple a fracción simple**, se multiplican las fracciones.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Problema 1: De un grifo salen cada minuto 7 quinceavos de litro ¿Cuánto saldrá en cada hora?

Resolución:

Si en 1 minuto salen $\frac{7}{15}$ litro; en 1 hora = 60 minutos saldrá:

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} = \cancel{60}\left(\frac{7}{\cancel{15}} \text{ litro}\right) = 4\ (7 \text{ litros}) = 28 \text{ litros.}$$

Rpta: En cada hora saldrán 28 litros

Problema 2: Dos encomiendas pesan; la primera 5 kilos y tres cuartos y la segunda tres quintos del peso de la primera. ¿Cuál es el peso total?

Resolución:

- Peso de la primera encomienda = $5\frac{3}{4}$ Kilos $= \frac{23}{4}$ Kilos .

- Peso de la segunda encomienda = $\frac{3}{5}$ del peso de la primera $= \frac{3}{5}\left(\frac{23}{4} \text{ Kilos}\right)$

- Peso de la segunda encomienda = $\frac{69}{20}$ Kilos

Luego:

$$\text{Peso total} = \frac{23}{4} \text{ kilos} + \frac{69}{20} \text{ Kilos} = \frac{(5 \times 23 + 69)}{20} \text{ Kilos} = \frac{184}{20} \text{ Kilos}$$

$$\text{Peso total} = \frac{92}{10} \text{ Kilos} = \begin{array}{l|l} 92 & 10 \\ \hline 2 & 9 \end{array} = 9\frac{2}{10} \text{ Kilos}$$

Rpta: El peso total es: $9\frac{2}{10}$ Kilos

Problema 3: Hallar la tercera parte de 36.

Resolución:

$$\underbrace{\text{La tercera parte}}\ \underbrace{\text{de}}\ 36 = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{36} = 12$$

Recuerda que: *Las palabras "de", "de los" nos indican que debemos multiplicar.*

Problema 4 : Hallar la mitad de los dos tercios de 24 unidades.

Resolución:

Del enunciado: La mitad de los dos tercios de 24 unidades; se plantea:

Lo siguiente: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 24 = \frac{1 \times 2 \times 24}{2 \times 3} =$ **8 unidades** ***Rpta.***

Problema 5 : Quisiera comprar un mueble que cuesta 85 soles. Sólo dispongo de los cinco sétimos de 84 soles. ¿Cuánto es lo que falta?

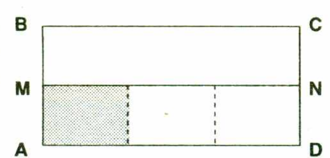
Resolución:

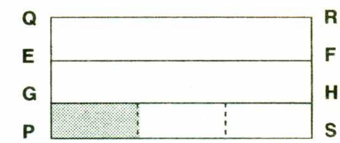
Dinero que dispongo $= \frac{5}{7} \times 84$ soles $= 5 \times 12$ soles $= 60$ soles

Si el mueble cuesta 85 soles, lo que falta es: 85 soles - 60 soles = 25 soles.

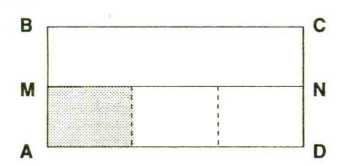
Rpta: **Lo que falta para comprar el mueble es 25 soles**

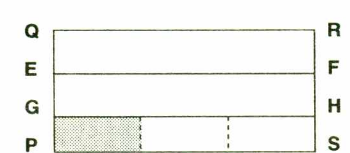
Problema 6 : Que fracción de fracción representa la región sombreada de las figuras mostradas:





Resolución:





De la figura:

$$AMND = \frac{1}{2} \text{ de } ABCD \quad \dots (1)$$

Región sombreada $= \frac{1}{3}$ de AMND ...(2)

Reemplazamos (1) en (2):

Región sombreada $= \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de ABCD

De la figura:

$$PGHS = \frac{1}{3} \text{ de } PQRS$$

Región sombreada $= \frac{1}{3}$ de PGHS

Reemplazamos (1) en (2):

Región sombreada $= \frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de PQRS

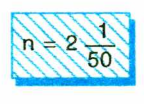
Problema 7: ¿Cuál es el número que multiplicado por $8\frac{1}{3}$ dá como resultado $16\frac{5}{6}$?

Resolución:

Sea: n = número por el que debe multiplicarse con $8\frac{1}{3}$ para dar $16\frac{5}{6}$.

Luego: $8\frac{1}{3}\cdot n = 16\frac{5}{6} \rightarrow \frac{25}{3}\,n = \frac{101}{6}$; despejando "n", se tiene:

$$n = \frac{101}{6} \times \frac{3}{25} = \frac{101 \times 1}{2 \times 25} = \frac{101}{50} = 101 \underline{|50}\;\; 1 \;\; 2 \Rightarrow \therefore$$



$n = 2\frac{1}{50}$ ***Rpta.***

Problema 8: Sara me debe los 5 / 7 de 280 doláres; si me paga los 9 / 14 de 280 doláres. ¿Cuánto me debe?

Resolución:

- **Lo que me debe Sara es:** $\frac{5}{7}$ ((280 dólares) = 5(40 dólares) = 200 dólares
- **Lo que me paga es:** $\frac{9}{14}$ (280 dólares) = 9(20 dólares) = 180 dólares

Lo que aún me debe es: (200 - 180) dólares = 20 dólares ***Rpta.***

Problema 9 : ¿Qué número hay que restarle a los 3/5 de 7/6 para ser igual a los 2/3 de 5/8?

Resolución:

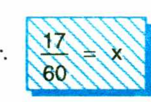
Sea "x" el número pedido.

Luego: $\frac{3}{5} \times \frac{7}{6} - x = \frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{5} \times \frac{7}{2} - x = \frac{1 \times 5}{3 \times 4} \Rightarrow \frac{7}{10} - \frac{5}{12} = x$$

Damos común denominador, siendo este 60.

$$\frac{42 - 25}{60} = x \Rightarrow \therefore$$



$\frac{17}{60} = x$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 40

Ejercicio 1 : Efectua las siguientes multiplicaciones:

a). $\frac{5}{3}\times\frac{6}{10}=$	d). $\frac{15}{8}\times\frac{26}{21}=$	g). $24\times\frac{7}{8}=$	j). $\left(2\frac{1}{8}\right)\times\left(3\frac{1}{2}\right)=$
b). $\frac{3}{4}\times\frac{-5}{3}=$	e). $\left(-\frac{6}{5}\right)\times\frac{10}{27}=$	h). $-4\frac{1}{3}\times 2\frac{1}{5}=$	k). $\left(4\frac{1}{3}\right)\times\left(-2\frac{1}{7}\right)=$
c). $\frac{-4}{3}\times\frac{-2}{3}=$	f). $\frac{3}{5}\times 12=$	i). $3\frac{1}{4}\times 6\frac{1}{3}=$	l). $\left(-3\frac{1}{4}\right)\times\left(-5\frac{1}{6}\right)=$

Ejercicio 2 : En cada una de las expresiones, halle el valor de "n".

a). $\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8}\cdot\frac{n}{6}$	c). $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{n}{4}\cdot\frac{3}{6}$	e). $\frac{11}{13}\cdot\frac{n}{4}=\frac{9}{4}\cdot\frac{11}{13}$
b). $\frac{6}{n}\cdot\frac{5}{12}=\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{15}$	d). $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{n}{3}\cdot\frac{2}{8}$	f). $\frac{21}{8}\cdot\frac{17}{9}=\frac{17}{9}\cdot\frac{21}{n}$

Ejercicio 3 : El ejemplo siguiente ilustra el empleo de fracciones impropias en las multiplicaciones con números mixtos.

$$2\frac{1}{3}\times 4\frac{1}{2}=\,?$$

$$\frac{7}{3}\times\frac{9}{2}=\frac{7\times 9}{3\times 2}=\frac{63}{6}=\begin{array}{r|l} 63 & 6 \\ \hline 3 & 10 \end{array}=\boxed{10\frac{3}{6}}$$

Halle los productos, como en el ejemplo.

a). $1\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$	c). $2\frac{7}{8}\cdot 1\frac{1}{4}$	e). $3\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{3}$	g). $13\frac{3}{5}\cdot 4\frac{3}{17}$
d). $1\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{2}$	d). $6\frac{1}{3}\cdot 5\frac{3}{4}$	f). $3\frac{5}{6}\cdot 2\frac{2}{3}$	h). $8\frac{1}{3}\cdot 20\frac{2}{5}$

Ejercicio 4 : ¿Cuáles son los recíprocos de los siguientes números:

a). $\frac{5}{8}$	d). 8	g). $4\frac{11}{17}$	j). $\frac{99}{100}$
b). $\frac{7}{9}$	e). 10	h). $\frac{127}{31}$	k). $12\frac{5}{8}$
c). $\frac{1}{13}$	f). $1\frac{7}{8}$	i). $\frac{3}{3}$	l). $43\frac{13}{19}$

Ejercicio 5 : Efectua las siguientes multiplicaciones:

a). $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}=$

b). $\frac{11}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{8}{6}=$

c). $1\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=$

d). $\left(\frac{-6}{5}\right)\times\left(\frac{-3}{2}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)=$

e). $\frac{7}{8}\times\left(-\frac{4}{14}\right)\times\left(-\frac{2}{6}\right)=$

f). $3\frac{4}{5}\times\left(-3\frac{1}{4}\right)\times\left(-2\frac{2}{3}\right)=$

g). $\frac{-2}{3}\times\frac{-5}{4}\times\frac{11}{8}\times\frac{-7}{10}=$

h). $\left(-6\frac{1}{4}\right)\times\left(-2\frac{1}{2}\right)\times\left(-3\frac{1}{3}\right)\times\left(-2\frac{1}{7}\right)=$

i). $\left(-2\frac{1}{4}\right)\times\left(-3\frac{1}{6}\right)\times\left(-1\frac{1}{3}\right)\times5\frac{1}{7}=$

Ejercicio 6 : Realiza las siguientes operaciones:

a). $\left(3\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}\right)\times\left(2-\frac{1}{3}\right)=$

b). $\left(6-\frac{1}{3}\right)\times\left(6+\frac{1}{3}\right)=$

c). $\left(3\frac{1}{2}\times2\frac{3}{7}\right)-5\frac{1}{2}=$

d). $\left(5-1\frac{1}{5}\right)\left(6-1\frac{1}{6}\right)=$

e). $\left(\frac{7}{4}-3\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{5}{3}-2\frac{1}{3}\right)=$

f). $\frac{6}{4}\times3\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}\left(2-2\frac{1}{3}\right)=$

g). $3\frac{1}{2}\times4\frac{1}{5}\times1\frac{8}{11}=$

h). $\frac{5}{7}\times2\frac{1}{3}\times2\frac{2}{5}\left(1-1\frac{3}{4}\right)=$

i). $\frac{6}{9}\times3\frac{1}{4}\times\frac{11}{8}\left(1-3\frac{1}{2}\right)=$

Rpta.

a). $-1\frac{17}{18}$	c). 3	e). 1	g). $25\frac{43}{110}$	i). $-7\frac{43}{96}$
b). $35\frac{8}{9}$	d). $18\frac{11}{30}$	f). $\frac{-39}{56}$	h). -3	

Ejercicio 7: ¿Cuánto valen $45\frac{2}{4}$ metros de tela a 8 soles el metro?

Rpta. S/. 364

Ejercicio 8 : ¿Cuánto será el precio de 12 botellas de ácido, si contienen 8 litros y un tercio cada uno, y el precio del ácido es de 6 soles el litro?

Rpta. 600 soles

Ejercicio 9: Un adulto hace 17 inspiraciones por minuto introduciendo cada inspiración, 5 novenos de litro de aire en sus pulmones. ¿Qué volúmen de aire introduce en sus pulmones en 24 horas?

Rpta. 13 600 litros

Ejercicio 10 : Una pieza de tela recién comprada tiene 180 metros de largo y al lavarse pierde los dos cuarenticinco avos de su longitud. Hallar el importe de la venta, a razón de 19 soles el metro.

Rpta. S/. 3 268

Ejercicio 11: Se reparte una herencia de 56 000 soles entre tres hermanos. Al más jóven le ha de tocar 1 octavo, al segundo 3 octavos y al mayor el resto. Calcular lo que recibirá cada uno.

Rpta. 7 000 ; 21 000 y 28 000 soles

Ejercicio 12: Para confeccionar un vestido un sastre emplea 2 metros y tres quintos de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitará para confeccionar 3 docenas de vestidos?

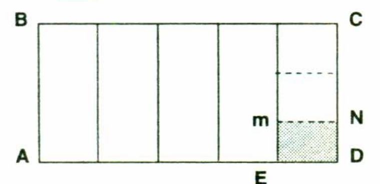
Rpta. $93\frac{3}{5}$ m

Ejercicio 13: Un deposito recibe cada cuarto de hora 18 litros y medio de agua y durante el mismo tiempo pierde 4 litros y dos tercios. ¿Cuántos litros conservará en tres horas y media?

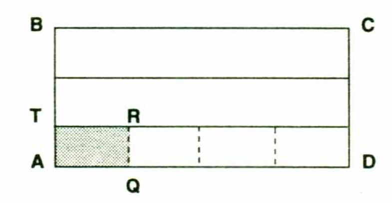
Rpta. $193\ \frac{2}{3}$ Litros

Ejercicio 14: Qué fracción de fracción representa la región sombreada de las figuras mostradas.

a)



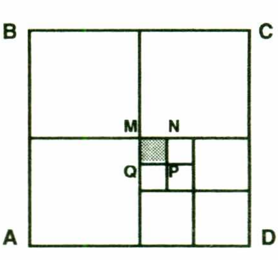
b)



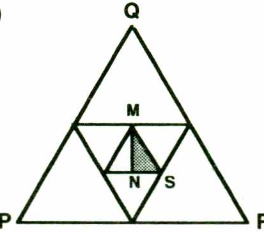
Rpta. a). $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$ de ABCD. b). $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de ABCD.

Ejercicio 15: Qué fracción de fracción de fracción representa la región sombreada de las figuras mostradas. (ABCD es un cuadrado y PQR es un Δ equilátero)

a)



b)

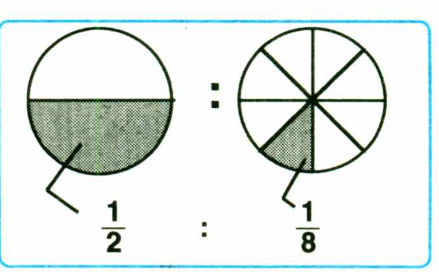


Rpta. a). $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de ABCD. b). $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de PQR

5.6 DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$.

Observa el dibujo: Reflexiona sobre la pregunta. ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{2}$?

Se trata de dividir $\frac{1}{2}$ entre $\frac{1}{8}$.

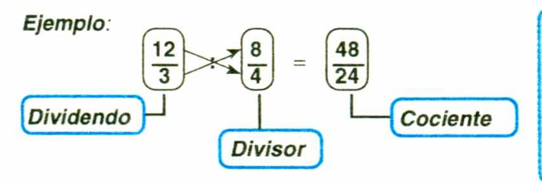


$$\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{1 \times 8}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Es decir, que $\frac{1}{8}$ cabe cuatro veces en $\frac{1}{2}$.

Como la división es la operación inversa a la multiplicación lo haremos de modo Inverso. Asi pues, para dividir dos fracciones se multiplica la "**fracción dividiendo**" por la "**fracción divisor**" invertida.

Ejemplo:



Observa : que si multiplicamos siguiendo el orden de las flechas es igual que invertir la fracción divisor, por ello, oiras decir, algunas veces, que para dividir fracciones o quebrados se multiplican en cruz.

5.6.1 MANERA DE HALLAR EL COCIENTE DE DOS NÚMEROS RACIONALES

Hagamos la siguiente división: $\frac{9}{8} : \frac{3}{16}$

Asi pues: $\frac{9}{8} : \frac{3}{16} = C$

Recuerda que: $D : d = C$ Donde: $D = d \times C$

Por definición tenemos que:

$$\frac{9}{8} = \frac{3}{16} \times C$$

multiplicamos los dos miembros de la igualdad por el inverso del divisor.

$$\frac{9}{8} \times \boxed{\frac{16}{3}} = \frac{3}{16} \times \boxed{\frac{16}{3}} \times C$$

; la igualdad no varia por haber multiplicado ambos miembros por el mismo número.

$$\frac{9}{8} \times \frac{16}{3} = 1 \times C$$

De donde: $\boxed{C = \frac{9}{8} \times \frac{16}{3}}$

Esta última igualdad nos dice que:

Para hallar el cociente de dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso del divisor. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$; **Siendo:** $a \text{ y } c \neq 0$

Ejemplos: a). $\frac{5}{4} : \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$ b). $\frac{-5}{3} : \frac{4}{5} = \frac{-5}{3} \times \frac{5}{4} = \boxed{\frac{-25}{12}}$

La división de dos fracciones, se indica tambien en vez de con **:** , con una raya de fracción, veamos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Donde: **a** y **d** se llaman términos extremos.
b y **c** se llaman términos medios.

- **No Podemos Dividir por el Número Racional Cero.**

Pongamos un ejemplo:

No hay ningún número racional $\frac{x}{y}$ que responda a la división $\frac{8}{2} : \frac{0}{1}$ porque si fuese cierto que $\frac{8}{2} : \frac{0}{1} = \frac{x}{y}$; entonces $\frac{x}{y} \cdot \frac{0}{1} = \frac{8}{2}$, lo cual es imposible, ya que cualquier número racional multiplicado por cero es igual a cero.

5.6.2 DIVISIÓN DE FRACCIÓN:

1º Caso: **Dividir una fracción por un Número Entero.**

Ejemplo: $\frac{8}{15} : 4$

La operación puede hacerse del modo siguiente: $\frac{8}{15} : 4 = \frac{\not{8}}{15 \times \not{4}} = \boxed{\frac{2}{15}}$

Regla: *Para dividir una fracción por un número entero se multiplica el denominador por este número entero.*

2º Caso: **División de un Entero por una Fracción:**

Ejemplo: $6 : \frac{4}{5}$

Resolución:

$$6 : \frac{4}{5} = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{6 \times 5}{4} = \frac{30}{4} = \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 2 & 7 \end{array} = \boxed{7\frac{2}{4}}$$

Regla: *Para dividir un número entero por una fracción se multiplica el número entero por la fracción invertida.*

3º Caso: **Dividir una Fracción por otra Fracción:**

Ejemplo: $\frac{3}{7} : \frac{5}{6}$

Resolución:

$$\frac{3}{7} : \frac{5}{6} = \frac{3}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{7 \times 5} = \boxed{\frac{18}{35}}$$

Regla: *Para dividir una fración por otra fracción, se multiplica la primera fracción por la segunda fracción invertida.*

4º CASO: División entre Números Mixtos:

Como en el caso de la multiplicación de números mixtos, para la división tambien se les ha de convertir en fracciones impropias y la primera fracción impropia se multiplica por la segunda fracción invertida. Finalmente se vuelve el resultado a número mixto.

Ejemplo: $5\frac{2}{3} : 3\frac{4}{5}$

Resolución:

$$5\frac{2}{3} : 3\frac{4}{5} = \frac{17}{3} : \frac{19}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{5}{19} = \frac{17 \times 5}{3 \times 19} = \begin{array}{r|l} 85 & 57 \\ \hline 28 & 1 \end{array} = \boxed{1\frac{28}{57}}$$

*** Casos que se presentan para simplificar fracciones:**

Primer Caso:

$$\frac{\frac{\cancel{a}}{b}}{\frac{\cancel{a}}{c}} = \frac{c}{b}$$

Ejemplo: $\dfrac{\frac{\cancel{12}}{6}}{\frac{\cancel{12}}{2}} = \dfrac{2}{\cancel{6}} = \dfrac{1}{3}$

Segundo Caso:

$$\frac{\frac{a}{\cancel{b}}}{\frac{c}{\cancel{b}}} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo: $\dfrac{\frac{16}{\cancel{8}}}{\frac{2}{\cancel{8}}} = \dfrac{16}{2} = 8$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES (Q)

Problema 1 : Se reparten los seis onceavos de una herencia por partes iguales entre 3 personas. ¿Qué fracción de la herencia le tocará a cada persona?

Resolución:

Sea la Herencia = H

Se reparte los $\frac{6}{11}$ H ; por partes iguales entre 3 personas.

Tocándole a cada persona: $\frac{6}{11}H : 3 = \frac{\cancel{6}}{11 \times \cancel{3}}H = \frac{2}{11}H$

Rpta: A cada persona le tacará $\frac{2}{11}$ de la Herencia H

Problema 2: ¿Cuántos paquetes de kilo y tres cuartos se podrán hacer; con 7 kilos y con 21 kilos.

Resolución:

Un kilo y tres cuartos = $1\frac{3}{4}$ Kg = $\frac{7}{4}$ Kg

- El número de paquetes de $\frac{7}{4}$ Kg que se podrán hacer con 7 kilos son:

$$7 : \frac{7}{4} = \cancel{7} \times \frac{4}{\cancel{7}} = \boxed{4 \text{ paquetes}}$$

y el número de paquetes de $\frac{7}{4}$ Kg que se podrán hacer con 21 kilos son:

$$21 : \frac{7}{4} = \cancel{21} \times \frac{4}{\cancel{7}} = \boxed{12 \text{ paquetes}}$$

Rpta: Con 7 kilos y 21 kilos se puede hacer 4 paquetes y 12 paquetes de $\frac{7}{4}$ Kg .

Problema 3: Si 6 kilos $\frac{3}{4}$ de fruta cuestan 54 soles. ¿Cuánto cuesta 1 kilo?

Resolución:

6 kilos y $\frac{3}{4}$ de frutas = $6\frac{3}{4}$ kilos = $\frac{27}{4}$ kilos

Luego: Si: $\frac{27}{4}$ kilos de fruta cuestan 54 soles

1 kilo costará = 54 soles : $\frac{27}{4}$

1 kilo costará = $\cancel{54}$ soles $\times \frac{4}{\cancel{27}}$ = 2 soles $\times$ 4 = $\boxed{8 \text{ soles}}$

Rpta. 1 kilo de fruta costará 8 soles

Problema 4: ¿Por qué fracción debe dividirse $\frac{7}{12}$ para obtener como cociente $\frac{1}{3}$?

Resolución:

Sea "x" la fracción por la que se debe dividirse $\frac{7}{12}$ para obtener como cociente $\frac{1}{3}$.

De donde: $\frac{7}{12} : x = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{7}{12x} = \frac{1}{3} \rightarrow 7 \cdot 3 = 12x \Rightarrow x = \frac{21}{12} \rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{7}{4}}$

Rpta: La fracción pedida es $\frac{7}{4}$

Problema 5: ¿Por qué fracción debe multiplicarse $\frac{4}{5}$ para obtener como producto $\frac{24}{10}$?

Resolución:

Sea: "x" la fracción por la que debe multiplicarse $\frac{4}{5}$ para obtener como producto $\frac{24}{10}$.

De donde: $\frac{4}{5} \cdot x = \frac{24}{10} \rightarrow x = \frac{\cancel{24}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \rightarrow x = \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1} \rightarrow \boxed{x = 3}$

Rpta: La fracción pedida es: $\frac{3}{1}$

Problema 6: Un comerciante dividió una pieza de tela de 57 metros en retazos de 4 metros y tres cuartos, que vendió a 8 soles el metro. Hallar el número de retazos y el precio de venta de un retazo.

Resolución:

Medida de cada retazo = $4\frac{3}{4}$ metros $= \frac{19}{4}$ metros .

Medida de la pieza de tela = 57 metros.

Luego:

El número de retazos de $\frac{19}{4}$ metros $= 57 : \frac{19}{4}$

El número de retazos de $\frac{19}{4}$ metros $= \cancel{57} \times \frac{4}{\cancel{19}} = 3 \times 4 =$ 12 retazos

Ahora, hallamos el precio de venta de un retazo = $\frac{19}{4} \times 8$ soles = 38 soles

Rpta: El número de retazos es 12 y el precio de venta de cada retazo es 38 soles.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 41

Ejercicio 1 : Efectuar las siguientes divisiones:

a). $\frac{5}{4} : 2 = \square$	d). $60 : \frac{3}{5} = \square$	g). $25 : \frac{5}{9} = \square$	j). $\frac{3}{36} : 7 = \square$
b). $\frac{9}{7} : 3 = \square$	e). $80 : \frac{8}{5} = \square$	h). $63 : 3\frac{1}{2} = \square$	k). $24 : \frac{8}{3} = \square$
c). $12 : \frac{4}{3} = \square$	f). $70 : 2\frac{1}{2} = \square$	i). $\frac{7}{17} : 3 = \square$	l). $72 : \frac{9}{8} = \square$

Ejercicio 2 : Efectuar las divisiones siguientes:

a). $\frac{9}{24} : \frac{11}{12} = \square$	d). $\frac{13}{16} : \frac{3}{8} = \square$	g). $\frac{7}{8} : 8\frac{1}{4} = \square$	j). $15\frac{4}{7} : 3\frac{7}{6} = \square$
b). $\frac{21}{22} : \frac{3}{14} = \square$	e). $\frac{14}{21} : \frac{-7}{3} = \square$	h). $60\frac{21}{25} : 15\frac{2}{7} = \square$	k). $7\frac{1}{6} : 14\frac{1}{3} = \square$
c). $\frac{81}{82} : \frac{7}{9} = \square$	f). $3\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \square$	i). $14\frac{2}{9} : 2\frac{3}{4} = \square$	l). $5\frac{3}{5} : 5\frac{1}{4} = \square$

Ejercicio 3 : Halla el valor de "x" en las siguientes igualdades:

a). $0 : \frac{5}{6} = x$	d). $x : \frac{4}{7} = 1$	g). $\frac{3}{4} : x = \frac{3}{4}$	j). $\frac{4}{7} : x = \frac{4}{7}$
b). $x : \frac{7}{9} = 0$	e). $\frac{6}{11} : x = 1$	h). $\frac{5}{7} : \frac{7}{5} = x$	k). $\left(\frac{3}{4} : \frac{3}{4}\right) : x = \frac{3}{4}$
c). $1 : \frac{3}{5} = x$	f). $x : \frac{5}{8} = \frac{8}{5}$	i). $\left(\frac{2}{5} : x\right) : \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$	l). $\frac{5}{12} : \left(\frac{5}{12} : x\right) = \frac{5}{12}$

Ejercicio 4 : Un campo de 4 quintos de hectárea se ha dividido en 12 parcelas iguales. ¿Cuál es la superficie de cada parte?

Rpta. $\frac{1}{15}$ Ha

Ejercicio 5 : Un panetón costó 6 soles y se repartió en 10 partes iguales. ¿Como se llama cada parte? ¿Cuánto cuesta cada parte?

Rpta. 1 décimo, S/. $\frac{3}{5}$

Ejercicio 6 : ¿Cuántos retazos de 5 octavos se podrán obtener de una pieza de 15 metros, de 20 metros, de 25 metros y de 45 metros?

Rpta. 24; 32; 40 y 72 retazos

Ejercicio 7 : Una cocina de gas quema 710 litros de gas en 7 horas y media otra cocina gasta 640 litros en 5 horas y media. ¿ Cuál es la que más gasta y cuánto en cada hora?

Rpta. La que gasta más es la de 640 litros y gasta en cada hora $116\frac{4}{11}$ litros

Ejercicio 8 : En 10 días de 8 horas de trabajo, un tejedor hizo los 5 octavos de una pieza de tela. ¿Qué fracción de la pieza es la que hace en un día? y en una hora?

Rpta. En 1 día hace: $\frac{1}{16}$ de la pieza de tela y en 1 hora hace: $\frac{1}{128}$ de la pieza de tela.

Ejercicio 9 : ¿Por qué fracción debe dividirse $\frac{11}{14}$ para obtener como cociente $\frac{1}{7}$?

Rpta. $\frac{11}{2}$

Ejercicio 10 : ¿Por qué fracción debe multiplicarse $\frac{8}{21}$ para obtener como producto $\frac{16}{9}$?

Rpta. $\frac{14}{3}$

Ejercicio 11 : Para pasar una calle de 16 metros de ancho. ¿Cuántos pasos de 4 sétimos de metro habrá que dar? con pasos de 2 tercios? con pasos de 4 quince avos de metro? de 8 quintos de metro?

Rpta. 28, 24, 60 y 10 pasos

Ejercicio 12 : Un hombre compró 5 metros y tres cuartos de tela que han costado 405 soles. Comprobada la compra se halló que soló se le entregaron 4 metros y siete octavos. ¿Qué cantidad de tela habrá que devolver el vendedor?

Rpta. $\frac{7}{8}$

Ejercicio 13 : Una botella de 3 cuartos de litro ha sido vertida en vasos iguales. ¿Qué capacidad tiene cada vaso si con la botella se han podido llenar 1) 4 vasos; 2) 6 vasos; 3) 24 copitas.

Rpta. 3/16 litro, 1/8 litro y 1/32 litro

Ejercicio 14 : Halla una fracción equivalente a cada una de las siguientes expresiones:

Ejemplo: Halla el equivalente a: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$

Resolución:

Para este tipo de ejercicios es recomendable aplicar la "Regla de Productos Cruzados" osea:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$$

Ademas se aplicará la Inversa de una fracción:

$$\frac{1}{\frac{n}{d}}=\frac{d}{n}$$

Tarea

A). $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\boxed{\frac{3}{1}+\frac{1}{2}}}}$ ▶ $=\frac{3\cdot 2+1\cdot 1}{1\cdot 2}=\frac{7}{2}$

B). $1+\cfrac{1}{1+\boxed{\cfrac{1}{\frac{7}{2}}}}$ ▶ $=\frac{2}{7}$

C). $1+\cfrac{1}{\boxed{\frac{1}{1}+\frac{2}{7}}}$ ▶ $=\frac{1\cdot 7+1\cdot 2}{1\cdot 7}=\frac{9}{7}$

D). $1+\cfrac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{1}{1}+\frac{7}{9}=\frac{1\cdot 9+1\cdot 7}{1\cdot 9}=\frac{16}{9}$

$$\therefore\quad \boxed{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\frac{16}{9}}$$ **Rpta.**

a). $5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}$

b). $4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$

c). $6-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{6}}}$

d). $3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{5}}}$

e). $1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2}}}$

f). $7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{3}}}$

g). $1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

h). $2+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2}}}}$

i). $2-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$

Rpta.

a) $\frac{75}{13}$ **b)** $\frac{41}{9}$ **c)** $\frac{139}{29}$ **d)** $\frac{29}{11}$ **e)** $\frac{12}{19}$

f) $\frac{186}{25}$ **g)** $\frac{3}{4}$ **h)** $\frac{248}{105}$ **i)** $\frac{34}{21}$

5.7 POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$.

La potenciación de un número racional es el resultado de multiplicar por si mismo tantas veces una fracción como indica el exponente, por lo que para elevar una fracción representante de un número racional, a una potencia se elevará cada uno de sus términos a dicha potencia.

Asi: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}_{}$ ó $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{\boxed{2^4}}{\boxed{3^4}} = \frac{16}{81}$

(4 veces 2 / 3)

En General:

$$\underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \frac{a}{b}}_{} = \text{Potencia} \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = P}$$

(**n veces a / b**)

Donde:

- n : exponente natural
- $\frac{a}{b}$: base Racional o fracción
- P : Potencia

Ejemplos:

a). $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

b). $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125}$

c). $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

d). $\left(\frac{-3}{2}\right)^4 = \frac{(-3)^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

Como observarás, las operaciones con potencias de números racionales se realizan de manera análoga a como se realizan con los números enteros. Por todo ello es muy importante que repases y tengas muy en cuenta la regla de los signos de multiplicación de números enteros.

5.7.1 POTENCIA DE UN NÚMERO RACIONAL EXPRESADO EN FORMA MIXTA

Se reduce el número mixto a una fracción equivalente y se opera según norma general.

Ejemplo: a). $\left(3\,\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{17^2}{5^2} = \boxed{\frac{289}{25}}$ b). $\left(1\,\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \boxed{\frac{125}{64}}$

5.7.2 SUMA Y RESTA DE POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES

Aunque las fracciones representantes de números racionales tengan igual base o exponente, hay que efectuar las operaciones indicadas antes de hacer la suma o la resta.

a). $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} + \frac{2^2}{5^2} = \frac{9}{16} + \frac{4}{25}$

b). $\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} + \frac{1^3}{4^3} = \frac{8}{27} + \frac{1}{64}$

c). $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{16}{9} - \frac{4}{9}$

Recuerda que:

i). $\left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{c}{d}\right)^n \neq \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^n$

ii). $\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{x}{y}\right)^m \neq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+m}$

5.7.3 MULTIPLICACIÓN DE POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Para multiplicar potencias de números racionales en forma fraccionaria de igual base, se suman los exponentes y se conserva la misma base.

Observa: *Calculamos el producto:* $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ *; potencias de la misma base.*

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

De donde: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Luego: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ **Ejemplo:** $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^6 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3+6} = \left(\frac{4}{5}\right)^9$

5.7.4 DIVISIÓN DE POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES

Para dividir potencias de números racionales en forma fraccionaria de igual base, se restan los exponentes y se conserva la misma base.

Observa: *Calculamos el cociente de:* $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^3$ *; potencias de la misma base, el resultado cociente será igual a un número que multiplicado por el divisor* $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ *dé como producto el dividendo* $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

Osea: **Cociente** $\times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Teniendo en cuenta la regla de multiplicación de potencias de igual base la única potencia que satisface la igualdad anterior es $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Luego: $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ **Ejemplo:** $\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^{7-4} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

5.7.5 POTENCIA DE UNA POTENCIA DE UN NÚMERO RACIONAL

Potencia de una potencia de un número racional es otra potencia de ese mismo número con exponente igual al producto de los exponentes.

Observa: *Calculemos la siguiente potencia:* $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2$

Por definición de Potencia se tiene: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

y por producto de potencias de igual base: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

Lo que nos dice que: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$ **Ejemplo:** $\left[\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3\times 6} = \left(\frac{5}{4}\right)^{18}$

5.7.6 POTENCIA DE UN NÚMERO RACIONAL CON EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

Conviene que recuerdes que la potencia de un número entero con exponente negativo, es igual a la unidad dividida por la misma cantidad con exponente positivo. Asi decimos que: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

Pues bien la potencia de un número racional representado por una fracción con exponente entero negativo, es igual a otra fracción con el mismo exponente positivo, cuya ordenación esta invertida. Asi decimos que: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Veamos porqué: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} =$; **Pero** : $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ **y** $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

Luego: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2^2} : \frac{1}{3^2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{2^2} \times 3^2 = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Con lo cual queda demostrado la norma dada para hallar la potencia de un número con exponente negativo.

Ejemplo: $\left(\frac{8}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{8}\right)^2 = \frac{4^2}{8^2} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

Observaciones:

* *La expresión:* $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5$*; si es una potencia de potencia.*

** *La expresión:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{2^5}$*; no es una potencia de potencia.*

Veamos la diferencia que existe entre estas dos expresiones:

$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{2^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{32}$ ▶ $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{32}$

*** *Al simplificar hay que tener presente lo siguiente.*

a). $\frac{2+6}{2\times 3}$; *no se puede simplificar un sumando con un factor.*

b). $\frac{4+12}{4+3}$; *no se puede simplificar un sumando con otro sumando en una fracción.*

c). $\frac{6\times 8}{6\times 4}$; *en este caso si se puede simplificar un factor con otro factor en una fracción.*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 42

Ejercicio 1 : Resuelve las siguientes operaciones:

a). $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \square$	e). $\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \square$	i). $\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \square$	m). $\left(-3\frac{1}{4}\right)^2 = \square$
b). $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \square$	f). $\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \square$	j). $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 = \square$	n). $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3 = \square$
c). $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \square$	g). $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \square$	k). $\left(1\frac{3}{2}\right)^5 = \square$	o). $\left(-5\frac{1}{2}\right)^4 = \square$
d). $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \square$	h). $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 = \square$	l). $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 = \square$	p). $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5 = \square$

Ejercicio 2 : Resuelve las siguientes operaciones:

a). $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$	d). $\left(4 + \frac{5}{2}\right)^3 =$	g). $\left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{9}\right)^2 =$	j). $\left(5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{6}\right)^2 =$
b). $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$	e). $\left(\frac{2}{5} \times \frac{10}{8}\right)^2 =$	h). $2\frac{1}{3} - \left(1\frac{1}{3}\right)^2 =$	k). $\left(3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2}\right)^2 =$
c). $\left(3 - \frac{2}{3}\right)^2 =$	f). $\left(\frac{3}{7} \times \frac{21}{6}\right)^3 =$	i). $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$	l). $\left(-\frac{1}{3}\right)^6 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 =$

Rpta. **a)** $\frac{41}{72}$ **b)** $\frac{241}{100}$ **c)** $\frac{49}{9}$ **d)** $\frac{2\,197}{8}$ **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** $\frac{27}{8}$ **g)** $\frac{1}{36}$ **h)** $\frac{5}{9}$ **i)** 0 **j)** $\frac{625}{36}$ **k)** $\frac{81}{100}$ **l)** $-\frac{215}{729}$

Ejercicio 3 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 =$	d). $\left(\frac{6}{5}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 =$	g). $\left(\frac{6}{5}\right)^4 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 =$
b). $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right) =$	e). $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$	h). $\left(\frac{7}{2}\right)^3 : \left(\frac{7}{2}\right) =$
c). $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$	f). $\left(-\frac{1}{2}\right)^6 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$	i). $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^3 =$

Ejercicio 4 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right]^{4} =$	d). $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{3} =$	g). $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2}\right\}^{3} =$
b). $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2} =$	e). $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right]^{2} =$	h). $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^{2}\right\}^{2} =$
c). $\left[\left(\frac{-3}{4}\right)^{2}\right]^{2} =$	f). $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{3}\right]^{2} =$	i). $\left\{\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{2}\right]^{2}\right\}^{2} =$

Ejercicio 5 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$	d). $\left(\frac{6}{7}\right)^{-2} =$	g). $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7} =$	j). $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-3} =$
b). $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} =$	e). $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$	h). $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} =$	k). $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-3} =$
c). $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$	f). $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} =$	i). $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1} =$	l). $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}\right]^{-1} =$

Rpta.

a). $\frac{2}{3}$	c). $\frac{64}{27}$	e). $\frac{81}{16}$	g). 2 187	i). $\frac{1}{9}$	k). $\frac{64}{15\,625}$
b). $\frac{25}{4}$	d). $\frac{49}{36}$	f). 32	h). $\frac{49}{4}$	j). $\frac{27}{64}$	l). $\frac{1}{216}$

Ejercicio 6 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\left(\frac{3}{8}\right)^{0} \times \frac{1}{3^{0}} =$	d). $\left(-\frac{3}{8}\right)^{0} \times \frac{5}{3} =$	g). $\frac{3^{0}}{9} \times \left(\frac{7}{4}\right)^{0} \times \frac{5}{4^{0}} =$	***Recuerda que:*** $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$; Si: $b \neq 0$
b). $\frac{5^{0}}{7} \times \frac{5}{6^{0}} =$	e). $\left(\frac{8}{5}\right)^{0} \times 4 =$	h). $\left(\frac{8}{11} \times \frac{3^{0}}{4}\right)^{0} \times \frac{3}{6^{0}} =$	***Ejemplo:***
c). $\left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{8}\right)^{0} =$	f). $\frac{8}{9^{0}} \times \frac{3}{8^{0}} =$	i). $12^{0} \times \frac{4}{5^{0}} \times \left(\frac{7^{0}}{2} \times 4^{0}\right) =$	$\left(\frac{2}{7}\right)^{0} = 1$

Rpta. **a)** 1 **b)** 5/7 **c)** 1 **d)** 5/3 **e)** 4 **f)** 24 **g)** 5/9 **h)** 3 **i)** 2

Ejercicio 7 : Efectue las siguientes operaciones:

a). $\left(-\frac{2}{5}\right)^{2^{2}} =$	c). $\left(-\frac{3}{4}\right)^{2^{5}} =$	e). $\left(-\frac{5}{3}\right)^{3^{4}} =$
b). $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{3}} =$	d). $\left(\frac{1}{6}\right)^{3^{2}} =$	f). $\left(\frac{2}{3}\right)^{5^{2}} =$

Rpta. a). $\frac{16}{625}$ b). $\frac{1}{256}$ c). $\left(\frac{3}{4}\right)^{32}$ d). $\frac{1}{6^{9}}$ e). $\left(\frac{-5}{3}\right)^{81}$ f). $\left(\frac{2}{3}\right)^{25}$

5.8 RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Lo mismo que en la potencia existe analogía en la radicación de números enteros y números racionales.

Raiz enésima de un número es otro número cuya potencia de grado "n" es igual al número.

$\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^{n} = a$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = y \Rightarrow y^{n} = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$

Donde:

- $\frac{a}{b}$: **se llama radicando y es un número racional.**
- n : **se llama índice y es un número natural ($n \geq 2$)**
- y : **se llama raíz.**
- $\sqrt{}$: **le llamamos operador radical.**

* La raiz enésima de una fracción representante de un número fraccional, se obtiene hallando la raíz "n" del numerador y la raíz "n" del denominador.

Asi que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

Ejemplo:

a). $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$ b). $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Recuerda que:

* *Si el índice es **Impar**, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.*

Ejemplos: a). $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-3}{2}$ b). $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$

** *Si el índice es **Par**, y el radicando positivo, la raíz tiene dos valores, uno positivo y el otro negativo.*

Ejemplos: a). $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \pm\frac{5}{9}$ b). $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \pm\frac{1}{2}$

*** *Si el índice es **Par** y el radicando negativo, la raíz no tiene solución en el conjunto de los números racionales.*

Así: $\sqrt{-9}$ = *No tiene solución en el conjunto de los números racionales.*

5.8.1 RAÍZ DE UN PRODUCTO DE NÚMEROS RACIONALES

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

Ejemplos:

a). $\sqrt{\frac{4}{16}\times\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{4}{16}}\times\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{2}{4}\times\frac{3}{5} = \frac{\not{6}}{\not{20}} = \frac{3}{10}$

b). $\sqrt[3]{\frac{6}{27}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{\frac{\not{6}}{27}\times\frac{1}{\not{6}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

5.8.2 RAIZ DE RAIZ DE UN NÚMERO RACIONAL $\mathbb{Q}$.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[p\,q\,r]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos: a). $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{5}{6}}} = \sqrt[4\times3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[12]{\frac{5}{6}}$

b). $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{2}{7}}}} = \sqrt[2\times5\times3]{\frac{2}{7}} = \sqrt[30]{\frac{2}{7}}$

5.8.3 RAIZ DE UNA POTENCIA

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

a). $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ b). $\sqrt{\left(\frac{8}{15}\right)} = \left(\frac{8}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$

5.8.4 POTENCIA DE UNA RAÍZ

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Ejemplos:

a). $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^2}$ b). $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3$

5.8.5 OPERACIONES COMBINADAS

Cuando aparecen operaciones combinadas de Adición, Sustracción, Multiplicación, División, Potenciación y Radicación.

1) Primero eliminamos todos los signos de colección efectuando las operaciones interiores.
2) Luego se efectuan las Raices y Potencias.
3) A continuación se efectuan las Multiplicaciones y Divisiones.
4) Por último se efectuan las Adiciones y Sustracciones, en el orden en que aparecen.

Ejemplo 1: Efectuar: $M = \dfrac{\sqrt{\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\times 35}}{\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right)}$

Resolución:

En primer lugar, hallamos el valor de la expresión que encierra cada paréntesis.

Asi: * $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1\cdot 4+1\cdot 3-1\cdot 2}{12} = \frac{5}{12}$ ** $\left(3+\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{4}$

En segundo lugar, reemplazamos los valores hallados en la expresión "M", obteniendo:

$$M = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}\times\left(\frac{5}{12}\right)\times 35}}{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}\times 35\times 4}{35} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$$

$\therefore$ $M = 2$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Efectuar: $R = \sqrt[3]{\left[\dfrac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}}\right]\times\left(\frac{5}{27}\right)}$

Resolución:

$$R = \sqrt[3]{\left[\dfrac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}}\right]\times\left(\frac{5}{27}\right)}$$

$$2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{5} = \frac{1+4}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}\times\frac{5}{27}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{25}{4}}{\frac{1}{4}}\times\frac{5}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ $R = \frac{5}{3}$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 43

Ejercicio 1 : Halle el resultado de:

a). $\sqrt{\frac{81}{100}} =$	d). $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} =$	g). $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}} =$	j). $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$
b). $\sqrt{\frac{121}{144}} =$	e). $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} =$	h). $\sqrt[3]{\frac{-27}{1728}} =$	k). $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} =$
c). $\sqrt{\frac{169}{625}} =$	f). $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{27}} =$	i). $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$	l). $\sqrt[4]{\frac{10\,000}{625}} =$

Ejercicio 2 : Halle el resultado de:

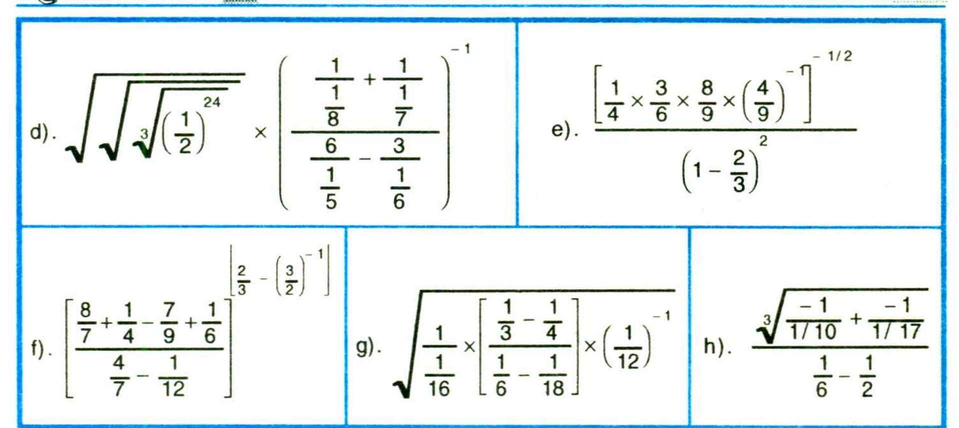
a). $\sqrt{\frac{9}{16} \times \frac{4}{81}} =$	d). $\sqrt[3]{\frac{27}{8} \times \frac{1}{125}} =$	g). $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^{36}}}}} =$	j). $\left(\frac{36}{100}\right)^{3/2} =$
b). $\sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{27}{4}} =$	e). $\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}} =$	h). $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^{6}}}} =$	k). $\left(\frac{1}{4}\right)^{5/2} =$
c). $\sqrt{\frac{2}{18} \times \frac{1}{49}} =$	f). $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^{40}}} =$	i). $\left(\frac{16}{81}\right)^{1/2} =$	l). $\left(\frac{16}{25}\right)^{-3/2} =$

Rpta.

a). $\frac{1}{6}$	b). $\frac{3}{2}$	c). $\frac{1}{21}$	d). $\frac{3}{10}$	e). $\frac{1}{4}$	f). $\frac{9}{25}$
g). $\frac{1}{6}$	h). $\frac{2}{3}$	i). $\frac{4}{9}$	j). $\frac{27}{125}$	k). $\frac{1}{32}$	l). $\frac{125}{64}$

Ejercicio 3 : Halle el resultado de:

a). $\left[\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right]^2$	b). $\sqrt{\left[\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{6}}\right] \times \left(\frac{19}{39}\right)^{-1}}$	c). $\left(\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{15}}\right)\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \frac{1}{3^2}}$



Rpta. a). 4 b). $\frac{39}{19}$ c). $\frac{3}{5}$ d). $\frac{1}{5}$ e). 18 f). 1 g). 12 h). 9

5.9 REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El número racional puede tener representante que sea fracción decimal o que no lo sea. En este tema trataremos de los números racionales representados por fracciones decimales o equivalentes, ademas trataremos de los números racionales representados por fracciones no decimales.

5.9.1 Fracciones Decimales.

Fracción decimal es toda fracción que tiene por numerador un número entero cualquiera y por denominador la unidad seguida de ceros, es decir una potencia de diez.

Ejemplos: $\frac{2}{10}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{36}{10}$; $\frac{8}{100}$; $\frac{11}{1000}$; $\frac{3}{100}$; ....

Asi, del conjunto de los números fraccionarios, separamos un subconjunto formado por las fracciones decimales.

La **Unidad Fraccionaria Decimal** viene dada por una fracción que tiene por unidad, y por denominador la unidad seguida de ceros.

Ejemplos: $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1\,000}$; $\frac{1}{10\,000}$; ....

5.9.2 FRACCIONES EQUIVALENTES

Existen fracciones que aparentemente no son decimales, como por ***ejemplo:***

$$\frac{2}{5} ; \frac{3}{4} ; \frac{5}{200} ; \frac{4}{250}$$

pero que son equivalentes a otras cuyo denominador es la unidad seguida de ceros:

$$\boxed{\frac{2}{5}=\frac{4}{10}}\ ;\ \boxed{\frac{3}{4}=\frac{75}{100}}\ ;\ \boxed{\frac{5}{500}=\frac{1}{100}}\ ;\ \boxed{\frac{4}{250}=\frac{16}{1\,000}}$$

CONSECUENTEMENTE toda fracción equivalente a una fracción decimal puede ser llamada fracción decimal.

- **Como saber si una Fracción no Aparentemente Decimal es Equivalente a una Fracción Decimal.**

  Sean, por ejemplo las fracciones: $\frac{25}{40}$; $\frac{49}{175}$; $\frac{95}{250}$; $\frac{16}{18}$

  * En primer lugar simplificamos las fracciones dadas a fracciones irreductibles.

$$\boxed{\frac{25}{40}=\frac{5}{8}}\ ;\ \boxed{\frac{49}{175}=\frac{7}{25}}\ ;\ \boxed{\frac{95}{250}=\frac{19}{50}}\ ;\ \boxed{\frac{16}{18}=\frac{8}{9}}$$

  * Una vez obtenida la fracción irreductible, si el denominador de dicha fracción es una potencia de 2, ó de 5 ó un producto de ambas entonces se podrá lograr que se convierta, tal denominador en una potencia de 10, multiplicando por las potencias de 5 ó de 2 que hagan falta.

Veamos si los denominadores de las fracciones irreductibles anteriores se reducen a potencias de 2, ó de 5 ó producto de ambos.

$$\boxed{\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}}\ ;\ \boxed{\frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}}\ ;\ \boxed{\frac{19}{50}=\frac{19}{2\times 5^2}}$$

Con todas es posible , salvo con $\frac{8}{9}$, cuyo denominador no se puede reducir potencia de 2, ni de 5 , ó producto de ambas.

Veamos, si las fracciones irreductibles cuyo denominador es potencia de 2 ó de 5, ó producto de ambas, se convierten en fracciones cuyo denominador sea la unidad seguida de ceros, esto es potencia de diez.

Ejemplos: a). $\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=\frac{5\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{5\times 125}{(2\times 5)^3}=\boxed{\frac{625}{10^3}}$

b). $\frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}=\frac{7\times 2^2}{5^2\times 2^2}=\frac{7\times 4}{(5\times 2)^2}=\boxed{\frac{28}{10^2}}$

c). $\frac{19}{50}=\frac{19}{2\times 5^2}=\frac{19\times 2}{2\times 5^2\times 2}=\frac{38}{2\times 25\times 2}=\frac{38}{100}=\boxed{\frac{38}{10^2}}$

d). $\frac{8}{9}$ ➧ *Al no poder reducir el denominador de esta fracción a una potencia de 2 ó de 5 ó producto de ambas, no podremos jamás convertila en una fracción cuyo denominador sea la unidad seguida de ceros*

***Resumiendo**: Una fracción irreductible no decimal, es equivalente a una frac**ión decimal si su denominador es una potencia de 2, ó de 5, ó un producto de ambas.*

Digamos también que toda fracción cuyo denominador es la unidad es equivalente a una fracción decimal.

***Observa**:* $\frac{5}{1}=\frac{50}{10}$; $\frac{-2}{1}=\frac{-20}{10}$; $\frac{3}{1}=\frac{300}{100}$; $\frac{-4}{1}=\frac{-400}{100}$; etc.

5.9.3 NÚMERO DECIMAL Y FRACCIÓN DECIMAL

Reducción de Fracciones decimales a Números decimales.

Decimales Finitos o Limitados.

Recuerda que número decimal es el formado por unidades naturales, que se llaman parte entera (a veces puede faltar) y de unidades decimales separadas de la parte entera por una **coma**. Para reducir fracciones decimales o sus equivalentes a números decimales se divide el numerador por el denominador. La división será exacta por lo que el número resultante será exacto, finito o limitado.

Reduzcamos a números decimales las fracciones decimales propuestas anteriormente:

a). $\frac{5}{8}=0,625$ (***decimal finito o limitado***)

b). $\frac{7}{25}=0,28$ (***decimal finito o limitado***)

c). $\frac{19}{50}=0,38$ (***decimal finito o limitado***)

d) La fracción $\frac{8}{9}$ no da división exacta, por lo que el número decimal resultante no será finito o limitado.

Observa: Que la fracción $\frac{8}{9}$ como dijimos anteriormente, no es fracción decimal.

B **Expresión de un Número Decimal Finito o Limitado en Forma de Fracción Decimal.**

Para expresar un número decimal finito en forma de fracción decimal se escribe como numerador el número decimal prescindiendo de la **coma**, y por denominador se pone la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado.

***Ejemplos**:* $8,25=\frac{825}{100}$; $2,3=\frac{23}{10}$; $0,3=\frac{3}{10}$

* Escribe en forma de fracción los siguientes decimales:

8,254 ; 0,25 ; 0,008 ; 8,30

Resolución:

$$8,254 = \frac{8\,254}{1\,000} \quad ; \quad 0,25 = \frac{25}{100} \quad ; \quad 0,008 = \frac{8}{1\,000} \quad ; \quad 8,30 = \frac{830}{100}$$

C El Conjunto de todas las Fracciones Decimales y sus Equivalentes forman un Subconjunto de los Números Racionales.

La razón es muy clara. Conjunto de números racionales es el conjunto cociente de todas las fracciones respecto a la relación de equivalencia entre fracciones, siendo número racional una fracción y todos sus equivalentes. Luego el conjunto de las fracciones decimales y sus equivalentes es un subconjunto de todas las fracciones y por tanto del conjunto de los números racionales.

Consecuentemente los números decimales finitos o limitados forman un subconjunto de los números racionales, por lo que un número finito se define como un número racional que puede representarse por una fracción decimal.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 44

Ejercicio 1 : Transforma las siguientes fracciones en sus respectivas fracciones equivalentes decimales.

a). $\frac{5}{4}$ =	d). $\frac{1}{4}$ =	g). $\frac{13}{50}$ =	j). $\frac{8}{50}$ =
b). $\frac{3}{2}$ =	e). $\frac{3}{25}$ =	h). $\frac{12}{25}$ =	k). $\frac{6}{5}$ =
c). $\frac{3}{5}$ =	f). $\frac{3}{1}$ =	i). $\frac{6}{1}$ =	l). $\frac{3}{25}$ =

Ejercicio 2 : Reduce a números decimales las siguientes fracciones:

a). $\frac{6}{8}$ =	d). $\frac{3}{25}$ =	g). $\frac{5}{8}$ =	j). $\frac{7}{25}$ =
b). $\frac{4}{5}$ =	e). $\frac{1}{4}$ =	h). $\frac{3}{4}$ =	k). $\frac{9}{50}$ =
c). $\frac{3}{2}$ =	f). $\frac{6}{5}$ =	i). $\frac{12}{5}$ =	l). $\frac{7}{2}$ =

Ejercicio 3 : Expresa en fracción los números decimales siguientes:

a). 0, 35 =	d). 0, 44 =	g). 2, 45 =	j). 52, 4 =
b). 0, 04 =	e). 0, 006 =	h). 1, 23 =	k). 0, 102 =
c). 1, 35 =	f). 2, 3 =	i). 0, 32 =	l). 3, 47 =

Ejercicio 4 : Escribe dos ejemplos de fracciones decimales cuyas recíprocas no sean decimales, otros ejemplos en que si lo sean.

Ejercicio 5 : Razona por que la fracción $\frac{15}{4}$ es equivalente a una fracción decimal.

Ejercicio 6 : Razona por que la fracción $\frac{8}{6}$ no es fracción decimal ni equivale a decimal.

Ejercicio 7 : Escribe la fracción decimal de los siguientes decimales limitados:

a). 0, 75 = $\frac{\square}{\square}$	c). 2, 94 = $\frac{\square}{\square}$	e). 12, 85 = $\frac{\square}{\square}$
b). 21, 7 = $\frac{\square}{\square}$	d). 0, 32 = $\frac{\square}{\square}$	f). 3, 47 = $\frac{\square}{\square}$

Ejercicio 8 : Halla la fracción irreductible que representa a cada uno de los números anteriores.

Ejercicio 9 : Halla fracciones equivalentes a: $\frac{37}{40}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{3}{8}$; cuyo denominador sea una potencia de diez.

Ejercicio 10 : Las fracciones $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{6}$ y $\frac{12}{8}$. ¿Tienen fracciones decimales? Si tienen escríbelas.

5.9.4 NÚMEROS DECIMALES

Tu sabes descomponer un número en sus distintos ordenes de unidades, vas ha hacerlo con este número: **3 472**

3 472 = 3 unidades de mil + 4 centenas + 7 decenas + 2 unidades.

Todo esto lo puedes expresar asi: **3 472 = 3 000 + 400 + 70 + 2**

Vas hacer lo mismo con una fracción decimal, y empiezas por el numerador, sea la fracción: $\frac{3472}{100}$

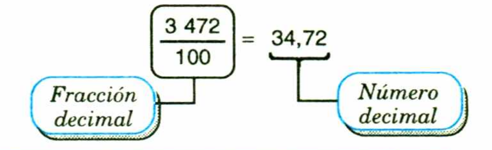
$$\frac{3\,472}{100} = \frac{3\,000}{100} + \frac{400}{100} + \frac{70}{100} + \frac{2}{100}$$

$$\frac{3\,472}{100} = 30 + 4 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100}$$

3 decenas — *4 unidades* — *7 decimas* — *2 centésimas*

Puedes escribir este número segun las reglas de escritura de los números enteros con la condición de saber cuál es la cifra que ocupa el lugar de las unidades simples. Para ello basta con que coloques alguna señal que te separe, de forma clara y sencilla la parte entera de la decimal y se ha convenido que esta señal sea una **Coma**, colocada a la derecha de esa cifra y en la parte inferior.

De acuerdo con este criterio el número anterior se escribe asi:



$\frac{1}{10}$: se escribe: 0, 1 y se lee: una décima

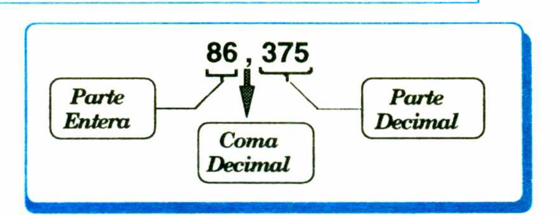
$\frac{3}{100}$: se escribe: 0,03 y se lee: tres centésimas

$\frac{5}{1\,000}$: se escribe: 0,005 y se lee: cinco milésimas

$\frac{3\,276}{1\,000}$: se escribe: 3,276 y se lee: 3 enteros, 2 décimas, 7 centésimas, 6 milésimas

$\frac{75}{100}$: se escribe: 0,75 y se lee: 0 enteros, 7 décimas, 5 centésimas

Lo que queda a la izquierda de la **Coma**, es la parte entera y lo que queda a la derecha, la parte decimal, las cifras que forman esta parte decimal son las cifras decimales del número.



- Cuándo falta la parte decimal como puedes comprender tienes un número entero.

Asi: 9,00 ➠ Será simplemente el número 9.

Por el contrario si lo que falta es la parte entera pondrás en su lugar un cero, ya lo viste en el ejemplo: 75/100

$$\frac{75}{100} = 0,75$$ *(Significa que la parte entera no existe y hay sólo 7 décimas y 5 centésimas.)*

Las dos maneras de escribir una fracción decimal que has aprendido, plantean dos problemas que has de resolver.

1º Escribir una Fracción Decimal Bajo la Forma de una Decimal.

Para escribir una fracción decimal bajo la forma de un número decimal se escribe sólo su numerador, separando de su derecha, por medio de una ***Coma*** *tantas cifras decimales como ceros hay en el denominador de la fracción.*

Ejemplos: a). $\frac{396}{100} = 3,96$ b). $\frac{274}{10} = 27,4$ c). $\frac{3\,872}{1\,000} = 3,872$

Si el numerador no tiene bastantes cifras se escriben a su izquierda el número de ceros necesarios, incluyendo el que precede a la **Coma**.

Ejemplos: a). $\dfrac{63}{1\,000} = 0,063$ b). $\dfrac{304}{10\,000} = 0,0304$ c). $\dfrac{872}{100\,000} = 0,00872$

2º Escribir un Número Decimal en Forma de Fracción Decimal.

Se efectua siguiendo un camino inverso al anterior.

*Para escribir un número decimal en forma de fracción decimal, se escribe como numerador el número dado prescindiendo de la **Coma** y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número.*

Ejemplos: a). $2,37 = \dfrac{237}{100}$ b). $34,576 = \dfrac{34\,576}{1\,000}$ c). $36,5 = \dfrac{365}{10}$

Si el numero decimal tiene ceros a su izquierda estos resultan innecesarios y pueden suprimirse.

Ejemplos: a). $0,036 = \dfrac{36}{1\,000}$ b). $0,0047 = \dfrac{47}{10\,000}$ c). $0,000318 = \dfrac{318}{1\,000\,000}$

De aqui vamos a deducir dos consecuencias interesantes:

1º) No se altera el valor de un número decimal si se agregan o suprimen ceros a su derecha.

Ejemplo 1:	*Ejemplo 2:*
$\underbrace{15,7} = \underbrace{15,700}$	$\underbrace{2,35} = \underbrace{2,35000}$
$\dfrac{157}{10} = \dfrac{15\,7\cancel{00}}{1\,0\cancel{00}}$	$\dfrac{235}{100} = \dfrac{235\,\cancel{000}}{100\,\cancel{000}}$
$\boxed{\dfrac{157}{10} = \dfrac{157}{10}}$	$\boxed{\dfrac{235}{100} = \dfrac{235}{100}}$

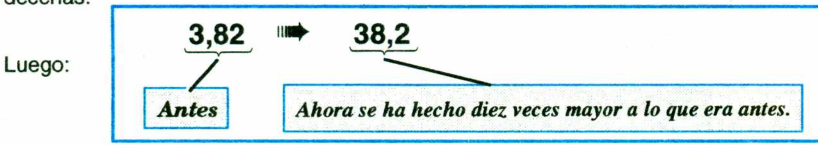
2º) Si un número decimal se corre la coma hacia la derecha uno, dos, tres,......... lugares, resulta un número diez, cien, mil,.........veces mayor.

Ejemplos: $3,82 = \dfrac{382}{100}$ **; corremos la coma un lugar a la derecha.**

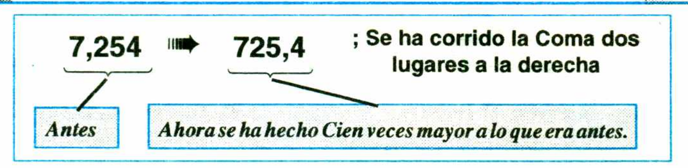
Si escribes ahora: $\boxed{38,2 = \dfrac{382}{10}}$

Verás que el 3 antes ocupaba el lugar de las unidades ahora ocupa el lugar de las decenas.

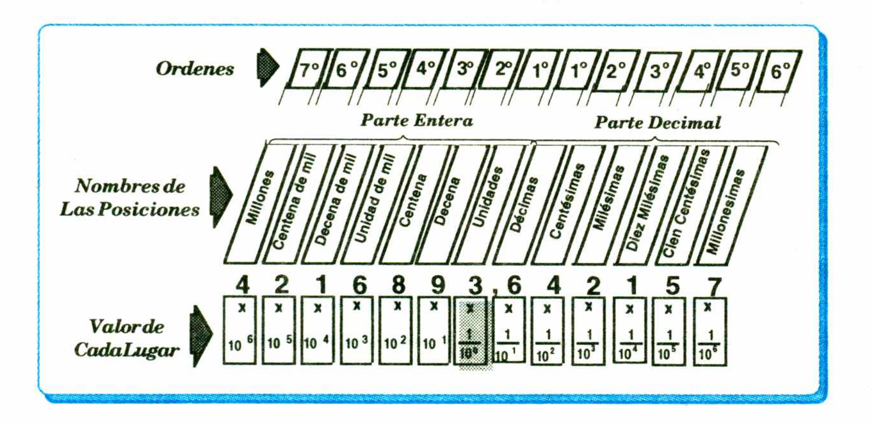
Luego:



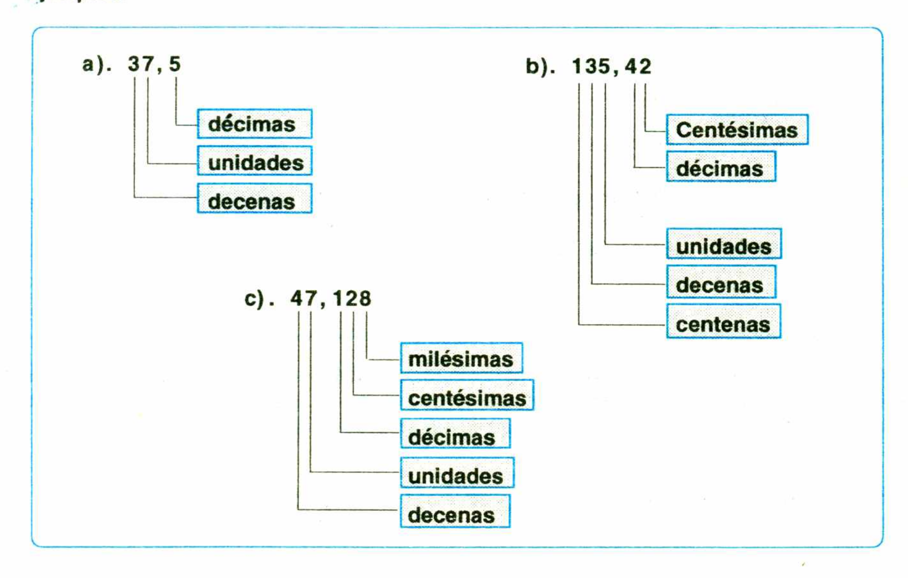
Otro ejemplo:



Cuadro de Numeración de los Números Enteros y Decimales.



Ejemplos:



TALLER DE EJERCICIOS Nº 45

Ejercicio 1 : Descompón en sus distintos ordenes de unidades estas fracciones decimales.

a). $\frac{37}{10} = \frac{30}{10} + \frac{7}{10} =$ **3 unidades, 7 décimas**

b). $\frac{97}{100} =$

c). $\frac{2\,789}{100} =$

d). $\frac{13\,798}{1\,000} =$

e). $\frac{217}{10\,000} =$

Ejercicio 2 : Copie cada frase, escribiendo la palabra y el número que faltan.

Ejemplo: 27,48. El 8 en el lugar de las **Centésimas** representa $8 \cdot \frac{1}{10^2}$

a) 367,845. El 3 en lugar de las .... representa ....

b) 367,845. El 4 en el lugar de las .... representa ....

c) 6 749,385. El 8 en el lugar de las .... representa ....

d) 6 749,385. El 6 en el lugar de las .... representa ....

e) 0,568 7. El 7 en el lugar de las .... representa ....

f) 7,865 43. El 3 en lugar de las .... representa ....

g) 0,213 547. El 7 en el lugar de las .... representa ....

Ejercicio 3 : En los ejercicios desde (a) hasta (e), escriba cada número en la notación desarrollada (con exponentes) como en el ejemplo A que sigue. En los ejercicios desde (f) hasta (j), escriba cada número en la notación que se ilustra en el ejemplo (**B**).

A $346{,}127 = (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (6 \times 10^0) + \left(1 \times \frac{1}{10^1}\right) + \left(2 \times \frac{1}{10^2}\right) + \left(7 \times \frac{1}{10^3}\right)$

B $346,127 = 300 + 40 + 6 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1\,000}$

a) 43,25	**c)** 653,43	**e)** 0,0507	**g)** 6,874	**i)** 680,072
b) 1,543	**d)** 305,802	**f)** 37,46	**h)** 379,68	**j)** 0,605

Ejercicio 4 : Escriba cada número en la notación desarrollada. Después, halle las sumas, como en los ejemplos:

A $6,43 = 6 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = 6 + \frac{40}{100} + \frac{3}{100} = 6\,\frac{43}{100}$

6,43 leeremos: "6 enteros y cuarentitres centésimas"

B $0,789 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1\,000} = \frac{700}{1\,000} + \frac{80}{1\,000} + \frac{9}{1\,000} = \frac{789}{1000}$

0,789 leeremos: "setecientas ochentinueve milésimas"

C) 7,53 =

D) 0,643 =

E) 4,592 =

F) 0,736 2 =

G) 72,854 =

Ejercicio 5 : Escriba el decimal que representa cada número.

a). $8 + \frac{6}{100} = 8\,\frac{6}{100} = 8,06$ b). $7\,\frac{2}{1\,000} = 7,002$

c). $32 + \frac{21}{100}$	e). $2 + \frac{2}{1\,000}$	g). $0 + \frac{37}{100}$	i). $26\,\frac{73}{1\,000}$
d). $7 + \frac{4}{10}$	f). $31 + \frac{376}{1\,000}$	h). $326 + \frac{3164}{10\,000}$	j). $36\,\frac{472}{10\,000}$

Ejercicio 6 : Escribe en forma de número decimal:

a) Cinco enteros, seis décimas	**d)** Treinta y siete millonésimas
b) Ocho enteros, cien milésimas	**e)** Trescientas veinticinco milésimas
c) Cincuenta y siete décimas	**f)** Doce mil ciento veíntiseis cien centésimas

Ejercicio 7 : Escribe en forma de fracción decimal:

a). 0, 8 = $\frac{\square}{\square}$	d). 0, 607 = $\frac{\square}{\square}$	g). 10, 0056 = $\frac{\square}{\square}$
b). 0, 07 = $\frac{\square}{\square}$	e). 12, 409 = $\frac{\square}{\square}$	h). 473 , 126 = $\frac{\square}{\square}$
c). 17, 42 = $\frac{\square}{\square}$	f). 3, 0081 = $\frac{\square}{\square}$	i). 38, 0204 = $\frac{\square}{\square}$

Ejercicio 8 : Señala en estas fracciones los que son decimales:

$$\frac{3}{10};\ \frac{7}{12};\ \frac{16}{20};\ \frac{3}{40};\ \frac{57}{1000};\ \frac{61}{100};\ \frac{30}{500}$$

Ejercicio 9 : Completa estas frases:

a) La milésima es la unidad decimal de .... orden

b) La diezmilésima es la unidad de .... orden

c) La millonésima es la unidad de .... orden

Ejercicio 10 : Coloca en lugar de los puntos el número que convenga:

a) La unidad tiene .... décimos

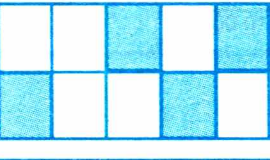
b) La unidad tiene .... centésimas

c) La décima equivale a .... centésimas

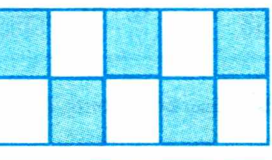
d) La décima equivale a .... diez milésima

Ejercicio 11 : Escribe la fracción decimal que corresponde a las regiones sombreadas con respecto a cada rectángulo.

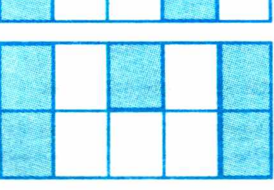
a).



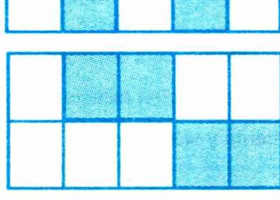
b).



c).



d).



Ejercicio 12 : Completa las igualdades:

a) 5 unidades = ... décimas	**d)** 8 centenas = ... milésimas
b) 130 unidades = ... centésimas	**e)** 60 décimas = ... unidades
c) 47 decenas = ...décimas	**f)** 300 centésimas = ... unidades

Ejercicio 13 : Prueba que: 6,2 = 6,20 = 6,200 = 6,200 0

Ejercicio 14 : Prueba que: 032,7 = 32,7

5.9.5 COMPROBACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

I) Si comparamos dos números decimales de signo diferente, será menor el de signo negativo.

Ejemplo: Al comparar los números: 6,038 y - 15,084 es menor

El segundo por ser negativo.

$\therefore$ **- 15,084 < 6,038**

II) Si dos números decimales son de igual signo, se procede de la siguiente manera: El número que tenga menos decimales se completa con ceros para luego eliminar la coma decimal y comparar estos números como si fuesen enteros.

Ejemplo 1: Comparar: 3,782 con 3,074 6

Como se observará el primer número tiene sólo tres decimales para lo cual le agregamos un cero para que asi los dos números tengan cuatro decimales cada uno, veamos:

3,782**0** con 3,0746

Eliminando la coma decimal los números quedan asi: 37 820 con 30 746

Como observamos la primera cifra de la izquierda de cada número son iguales. Pero las cifras siguientes son diferentes, siendo: 7 mayor que 0; luego:

$\therefore$ 37 820 > 30 746

Ejemplo 2: Comparar: - 23,5764 con - 23,54

Completamos con dos ceros el segundo número; obteniendo:

-23,576 4 con -23,54**00**

Eliminando la coma decimal los números quedan asi:

- 235 764 con - 235 400 ;

∴ - 23,5764 < - 23,50

Como se observará las tres primeras cifras de la izquierda de cada número son iguales, mientras las cifras que siguen son diferentes, siendo -7 menor que -4

Ejemplo 3: Comparar: 312,18 con 312,260 0

El segundo número suprimimos los dos ceros de su derecha, quedando los dos números asi:

312,18 con 312,26

Eliminando la coma decimal los números quedan asi: 312 18 con 312 26

Como observarás las tres primeras cifras de cada número son iguales mientras las cifras que siguen son diferentes, siendo 1 menor que 2.

∴ 312 18 < 312 26

Ejemplo 4: Comparar: 4735,290 con 4735,289 000

El segundo número suprimimos los tres ceros de su derecha, quedando los dos números asi:

4735,290 con 4735,289

Eliminando la coma decimal los números quedan asi: 4735 290 con 4735 289

Como observarás las cuatro primeras cifras de cada número son iguales mientras las cifras que siguen son de cada número son: 290 y 289, resultando que: 290 es mayor que 289.

∴ 4735,290 > 4735,289000

TALLER DE EJERCICIOS Nº 46

Ejercicio 1 : Escribe los signos igual (=) ; mayor que (>) o menor que (<) entre estos pares de números:

a) 0,79 ☐ 0,97	**e)** 0,37 ☐ 0,370	**i)** 0,198 ☐ 0,3
b) 1,040 ☐ 0,998	**f)** 0,65 ☐ 0,56	**j)** 6,93 ☐ 6,930
c) 6,001 ☐ 5,999	**g)** 0,0989 ☐ 0,1	**k)** 0,056 ☐ 0,560
d) 0,9672 ☐ 0,9685	**h)** 49,999 ☐ 49,99	**l)** 3,018 ☐ 3,081

Ejercicio 2 : Escribe los signos igual (=) ; mayor que (>) o menor que (<) entre estos pares de números:

a) 23,4567 ☐ 23,4589	**d)** 0,067 + 3 ☐ 0,07 + 3
b) 318,694 ☐ 318,678	**e)** 0,99 + 0,9 ☐ 0,99 + 0,99
c) 1 216,072 ☐ 1 216,086	**f)** 0,1 + 0,9 ☐ 0,9 + 1

Ejercicio 3 : Ordena de mayor de menor estos números decimales:

a) 7,6 ; 7,06 ; 7,60 ; 7,61 ; 7,068 ; 7,09	**b)** 4,3 ; 7,02 ; 2,05 ; 1,426 ; 0,95

Ejercicio 4 : Contesta a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué cero debes suprimir para que el número quede igual?
b) ¿Cuál de los ceros debes suprimir para que disminuya su valor?
c) ¿Cuál de los ceros debes quitar para que aumente su valor?
d) ¿Donde debes agregar un cero para que se quede igual?

En todos los casos debe escribir los números resultantes.

Ejercicio 5 : Escribe todos los números de dos cifras decimales comprendidos entre 0,3 y 0,4.

Ejercicio 6 : Escribe todos los números de tres cifras decimales comprendidos entre 1,35 y 1,36.

Ejercicio 7 : Ordena de mayor a menor los números:

a) 345 milésimas ; 234 centésimas ; 14 décimas
b) 27 centésimas ; 53 décimas ; 270 milésimas ; 948 milésimas.

5.9.6 ADICIÓN DE DECIMALES

Vamos a calcular la suma: $13,2 + 6,13 + 0,037$

Convertimos estos números decimales en fracciones decimales como ya sabes:

$$\frac{132}{10} + \frac{613}{100} + \frac{37}{1\,000} = \frac{13\,200}{1\,000} + \frac{6\,130}{1000} + \frac{37}{1\,000}$$

$$= \frac{13\,200 + 6\,130 + 37}{1000}$$

$$= \frac{19\,367}{1\,000} = \boxed{19,367}$$

Hubieras llegado a este resultado de una manera más rápida así:

Conservas la escritura de los números decimales y los colocas como en la adición de enteros, en la misma columna las unidades del mismo orden entero o decimal; y desde luego las **COMAS** correspondientes.

Basta que en el total escribas la coma debajo de las comas de los sumandos.

La operación anterior suma asi:

$$\begin{array}{r} 13,2 + \\ 6,13 \\ 0,037 \\ \hline 19,367 \end{array}$$

Otro Ejemplo: Calcular la suma: $23,4 + 0,28 + 5,124$

Convertimos estos números en fracciones decimales asi:

$$23,4 + 0,28 + 5,124 = \frac{234}{10} + \frac{28}{100} + \frac{5\,124}{1\,000}$$

$$= \frac{23\,400}{1000} + \frac{280}{1\,000} + \frac{5\,124}{1000}$$

$$= \frac{23\,400 + 280 + 5\,124}{1\,000}$$

$$= \frac{28\,804}{1000} = \boxed{28,804}$$

Forma rápida:

$$\begin{array}{r} 23,4 + \\ 0,28 \\ 5,804 \\ \hline 28,804 \end{array}$$

5.9.7 SUSTRACCIÓN DE DECIMALES

Tienes que hallar esta diferencia: 27,6 - 9,548

Conviertes estos números decimales en fracciones decimales como ya sabes;

$$27{,}6 - 9{,}548 = \frac{276}{10} - \frac{9\,548}{1\,000}$$

$$= \frac{27\,600}{1\,000} - \frac{9\,548}{1\,000} = \frac{27\,600 - 9\,548}{1\,000}$$

$$= \frac{18\,052}{1\,000} = \boxed{18{,}052}$$

Como en el caso de la suma hubieras podido llegar al mismo resultado, sin más que hacer que se correspondan las comas y, por tanto las unidades del mismo orden.

Como en el minuendo tienes decimales, en el sustraendo puedes colocar a la derecha los ceros que necesites, estos te dará buen resultado, al menos al principio:

27,6 -	▶	27,600 –
9,548		9,548
		18,052

Otro Ejemplo: Hallar la diferencia: 472,3 - 238,69

Convertimos estos números decimales en fracciones decimales asi:

$$472{,}3 - 238{,}69 = \frac{4\,723}{10} - \frac{23\,869}{100}$$

$$= \frac{47\,230}{100} - \frac{23\,869}{100} = \frac{47\,230 - 23\,869}{100}$$

$$= \frac{23\,361}{100} = \boxed{233{,}61}$$

Forma rápida:

472,3 -	▶	472,30 -
238,69		238,69
		233,61

Recuerda que:

* *Para **Sumar** números decimales se escriben **Unos Debajos de Otros** de manera que se **Correspondan las Comas**. Asi las décimas caen bajo las décimas, las centésimas bajo las centésimas etc.*

Se suman como si fueran números enteros y se pone una coma en el resultado, en la misma columna que la de los sumandos.

* *Para **Restar** números decimales se escribe **el Minuendo** y debajo el **Sustraendo,** de manera que se **Correspondan las Comas**. Así las décimas caen bajo las décimas, las centésimas bajo las centésimas.*

  La coma de la diferencia se pone en la misma columna que la de sus términos.

* *Cuándo el minuendo es un **Entero** se escriben **A su Derecha los Ceros Necesarios**.*

***Ejemplos**:*

***a)** Halla la diferencia: 3 - 2,14*

$$\begin{array}{r} 3\ - \\ 2{,}14 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3{,}00\ - \\ 2{,}14 \\ \hline 0{,}86 \end{array}$$

***b)** Hallar la diferencia: 28 - 13,473*

$$\begin{array}{r} 28\ - \\ 13{,}473 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 28{,}000\ - \\ 13{,}473 \\ \hline 14{,}527 \end{array}$$

PROBLEMAS SOBRE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE DECIMALES

Problema 1: ¿Qué número decimal debe restarse de 5 para que la diferencia sea 3,078?

***Resolución**:*

Sea "x" el número decimal que debe restarse de 5

De donde:

$$\begin{array}{r} 5\ - \\ x \\ \hline 3{,}078 \end{array} \Rightarrow \text{Esta expresión se puede escribir así: } \begin{array}{r} 5\ - \\ 3{,}078 \\ \hline x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5{,}000\ - \\ 3{,}078 \\ \hline 1{,}922 \end{array} \quad \therefore \ x = 1{,}922$$

Rpta.

Problema 2: Manuel compra un libro por 21,30 soles; un lapicero por 5,28 soles, y un compás por 37,40 ¿Cuánto debe pagar?

***Resolución**:*

Compras realizadas:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} 1 \text{ libro} = & 21{,}30 & \text{soles } + \\ 1 \text{ lapicero} = & 5{,}28 & \text{soles} \\ 1 \text{ compás} = & 37{,}40 & \text{soles} \\ \hline & 63{,}98 & \text{soles} \end{array} \right.$$

Luego lo que debe pagar es: 63,98 soles ***Rpta.***

Problema 3 : Un alumno tiene 37,50 soles y su hermana 28,75 soles ¿Cuánto les falta para poder comprar un televisor que cuesta 120 soles?

Resolución:

Dinero que tienen entre los dos:

S/. 37,50	**+**
S/. 28,75	
S/. 66,25	

Dinero que les falta para comprar un televisor que cuesta 120 soles es:

S/. 120	**-**
S/. 66,25	

S/. 120,00	**-**
S/. 66,25	
S/. 53,75	***Rpta.***

Problema 4 : Una casa de cuatro pisos tiene 15 metros de altura. El primer piso mide 3 m, el segundo 3,60 m y el tercero 3,70 m. ¿Qué altura tiene el cuarto piso?

Resolución:

En primer lugar hallamos la medida de la casa hasta el tercer piso:

Primer piso:	3 m	3,00 m	+
Segundo piso:	3,60 m	3,60 m	
Tercer piso:	3,70 m	3,70 m	
		10,30 m	

En segundo lugar calculamos la altura del cuarto piso:

Altura del cuarto piso = 15 m - 10,30 m

15 m	**-**
10,30 m	

15,00 m	**-**
10,30 m	
4,70 m	

∴ La altura del cuarto piso es: 4,70 m ***Rpta***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 47

Ejercicio 1 : Calcula la sumas de estos decimales de dos formas: una transformándolos antes en fracciones decimales y otra conservando su escritura de números decimales, y comprueba los resultados obtenidos:

a) 2,3 + 6,3 + 0,94 =	**c)** 0,21 + 14 + 9,7 + 25,00124 =
b) 36,52 + 13,5 + 142,854 =	**d)** 151,3 + 0,004 + 12 =

Ejercicio 2 : Suma estos números decimales, coloca los resultados en el lugar correspondiente:

+	18,34	174,061	72,453	2 364,056	0,036	0,00735
2,563						
127,45						

Ejercicio 3 : Restas estos decimales de dos formas: Una transformándolo antes en fracciones decimales y otra conservando su escritura de números decimales. Comprueba los resultados obtenidos:

a) 103,06 menos 97,56	**c)** 35,55 lo restas de 74,43
b) 237,085 menos 158,343	**d)** 63,79 lo restas de 180,2

Ejercicio 4 : Calcula estas sustracciones de la manera rápida:

a) 1,005 - 0,87 =	**c)** 52,76 - 42 =	**e)** 23,60 - 17,65 =
b) 13,063 - 9,8 =	**d)** 421 - 311,83 =	**f)** 348,82 - 195,336 =

Ejercicio 5 : Resta los números que figuran en este cuadro:

–	53,06	32,4	48,063	25,007	2,0073	5,376
88						
54						
132,56						
64,008						

Ejercicio 6: ¿Qué número debe restarse de 9 para que la diferencia sea 4,073? ***Rpta.*** 4,927

Ejercicio 7 : ¿Qué número debe restarse de 8,035 para que la diferencia sea 3,786? ***Rpta.*** 4,249

Ejercicio 8 : Un jardín que tiene forma de rectángulo mide 40,25 m de ancho y 83,20 m de largo. ¿Cuántos metros de alambre tiene que comprar el jardinero para cercarlo? ***Rpta.*** 246,9 m

Ejercicio 9 : Sara se cayó de su bicicleta, al accidentarse pagó 30 soles al médico, 103,25 soles en la farmacia y 36,50 soles por arreglo de la bicicleta. ¿ Cuánto tuvo que pagar en total? ***Rpta.*** 169,75 soles

Ejercicio 10 : María a comprado limones por valor de 6,75 soles y naranjas por un valor de 13,278 soles. Entregó para el pago 25 soles. ¿Cuánto le devolvieron? ***Rpta.*** 4,972 soles

Ejercicio 11 : De una pieza de tela que medía 85,30 metros; se cortaron tres trozos; uno medía 15,52 m, otro 8,35 m y el último 36,70 m ¿Cuántos metros mide el trozo de tela que quedó? ***Rpta.*** 24,73 m

Ejercicio 12 : Dando un paseo en bicicleta, recorrí 8,572 km; descansé un rato y de nuevo hice un recorrido de 4,056 km ¿Cuánto me falta para hacer un total de 15 km? ***Rpta.*** 2,372 Km

Ejercicio 13 : ¿Qué número debo añadir a 2 189,83 para obtener 16 378,26? ***Rpta.*** 14 188,43

Ejercicio 14 : Un comerciante compra telas por valor de 24 975,20 soles y los vende por importe de 35 210,70 soles. ¿Cuál es su ganancia? ***Rpta.*** 10 235,5 soles

Ejercicio 15 : A mi hermana le compraron un pantalón por 32,50 soles, una cartera por 16 soles y una blusa por 21,75 soles. ¿Cuánto ha pagado por todo? ***Rpta.*** 70,25 soles

Ejercicio 16 : Sandra lleva en su cartera para pagar una cuenta de la bodega 73,40 soles y su hermana lleva para pagar otra cuenta en la misma bodega 56,60 soles. ¿Cuánto cobrará el bodeguero en total? ***Rpta.*** 130 soles

Ejercicio 17 : Miguel compra un automóvil de segunda mano por 3 475,50 soles, se gasta en arreglarlo 1 625,30 soles. Quiere venderlo ganándose 2 125,70 soles. ¿Qué precio de venta tiene el automóvil? ***Rpta.*** 7 226,5 soles

Ejercicio 18 : A mi hermana le han comprado unos calcetines por 2,45 soles, una camiseta por 14,50 soles y una truza por 6,75 soles. ¿Cuánto ha gastado mi padre por todo? ¿Cuánto le devolvieron si entregó 50 soles? ***Rpta.*** 23,70 y 26,30 soles

Ejercicio 19 : Si tuviera 25 soles más de lo que tengo, podría comprar un radio que cuesta 87,50 soles y me sobran 13 soles. ¿Cuál es mi capital? ***Rpta.*** 75,50 soles

Ejercicio 20 : Amelia se compra unos zapatos por 40 soles, un cinturón por 20,50 soles y un reloj por 25,20 soles. Su hermana Ana compra un libro por 10 soles y un lapicero por 7,50 soles. Se pregunta:

1) ¿Cuánto tiene que pagar cada una?

2) ¿Cuánto pagan entre los dos?

3) ¿Cuánto más paga Amelia que Ana?

Rpta. 1era. 85,70 soles y 17,50 soles 2da. 103,2 soles 3era. 68,20 soles

5.9.8 MULTIPLICACIÓN DE DECIMALES

*** Multiplicación de un decimal por 10, 100, 1000**

Vamos a resolver este problema:

La altura de cada piso de un edificio es de 4,25 m ¿Cuál será la altura de un edificio de 10 pisos y de 100 pisos?

El problema es de multiplicar: $4,25 \times 10$

Tienes que hacer el número 4,25; 10 veces mayor, como antes:

Las unidades pasarán al lugar de las decenas.

Las décimas ocuparán el lugar de las unidades.

Las centécimas ocuparán el lugar de las décimas.

Por tanto: $4,25 \times 10 = 42,5$ m

De la manera análoga y con el mismo razonamiento: $4,25 \times 100 = 425$ m

Veamos que se ha corrido en cada caso la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros siguen a la unidad. Si no hay bastantes cifras decimales, se suplen con ceros.

Unidad	Décima	Centésima		Decena	Unidad	Décima
4,	2	5	× 10 =	4	2,	5

*** Multiplicación de un Decimal por un Entero.**

Nos vamos a fijar en este problema:

¿Cuánto cuestan 4 m de tela a 15,75 soles el metro?

Podríamos resolverlo de este modo: $15,75 + 15,75 + 15,75 + 15,75 = 63$ soles

Otra forma sería reducir los soles a céntimos y luego multiplicar:

15,75 soles = 1575 céntimos

Luego:

1 575 ×	
4	
6 300	céntimos

Ahora tenemos que pasar los céntimos a soles

6 300 céntimos = 63,00 soles = 63 soles

El resultado es el mismo de antes.

En la práctica se hace más rapido así:

15,75	×
4	
63,00	soles

Hemos hecho la multiplicación como si no hubiera decimales y en el producto 6 300 hemos separado tantos decimales como hay en el multiplicando.

***Nota**: El producto de un entero por un decimal se calcula de la misma forma que de un decimal por un entero.*

*** Multiplicación de Dos Decimales.**

Sabes que tu hermano quiere comprar 23,25 m de tela que cuesta a 8,5 soles el metro. ¿Cuánto pagará tu hermano?

La operación que debemos hacer es: 23,25 × 8,5

Lo calculamos multiplicando estos números como si fueran enteros y al final separamos del producto tantas cifras decimales como hay entre los dos factores, en este caso, tres.

$$\begin{array}{r} 2325 \times \\ 85 \\ \hline 11625 \\ 18600 \\ \hline 197625 \end{array}$$

Luego, el producto es 197,625 soles

* Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, **se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañe la unidad**. Si no hay tantos lugares, se suplen con ceros.

Ejemplos: **a)** 3,4 × 100 = 340,00 **c)** 2,372 4 × 1 000 = 2 372,4

d) 0,036 × 100 = 3,6 **d)** 2,4 × 10 000 = 24 000

* Para multiplicar un entero por un decimal o un decimal por un entero se efectua la operación **sin tener en cuenta la coma**, y separan de la derecha del producto tantas cifras decimales como tenga el decimal.

Ejemplos:

a)

$$\begin{array}{r} 6 \times \\ \underline{2{,}45} \\ 14{,}70 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 23{,}468 \times \\ \underline{3} \\ 70{,}404 \end{array}$$

* Para multiplicar dos decimales se multiplican como **si fueran enteros** y en el producto tantas cifras decimales **como haya entre los dos factores**.

Ejemplos:

a)

$$\begin{array}{r} 32{,}73 \times \\ \underline{2{,}6} \\ 19638 \\ \underline{6546} \\ 85{,}098 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 5{,}072 \times \\ \underline{3{,}65} \\ 25360 \\ 30432 \\ \underline{15216} \\ 18{,}51280 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 273{,}48 \times \\ \underline{4{,}52} \\ 54696 + \\ 136740 \\ \underline{109392} \\ 1236{,}1296 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 23{,}786 \times \\ \underline{2{,}147} \\ 166502 + \\ 95144 \\ 23786 \\ \underline{47572} \\ 51{,}068542 \end{array}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 48

Ejercicio 1 : Efectuá estos productos:

a) 32,5 × 10 =	**d)** 53,2 × 100 =	**g)** 0,003 × 10 =
b) 1 034,73 × 10 =	**e)** 691,32 × 100 =	**h)** 0,047 2 × 1 000 =
c) 13,537 × 1 000 =	**f)** 47,98 × 1 000 =	**i)** 0,17 × 1 000 000 =

Ejercicio 2 : Realiza estas multiplicaciones:

a) 23,6 x 5 =	**f)** 563,08 x 42 =	**k)** 21,694 x 87 =
b) 587,2 x 35 =	**g)** 386,013 x 75 =	**l)** 89,002 x 27 =
c) 27 x 16,02 =	h) 34,006 x 47 =	m) 64 x 16,09 =
d) 137 x 24,2 =	**i)** 67 x 0,003 =	**n)** 128 x 76,005 =
e) 7,52 x 8,6 =	**j)** 64,8 x 43,03 =	**o)** 9,6 x 2,003 =

Ejercicio 3 : Un metro de tela cuesta 32,75 soles. ¿Cuál será el importe de 6 m? ***Rpta.*** 196,50 soles

Ejercicio 4 : Un litro de leche cuesta 1,35 soles. ¿Cuál será el costo de 3,45 litros? ***Rpta.*** 4,6575 soles

Ejercicio 5 : He comprado tres cuadernos a 2,75 soles cada uno y 8 lapiceros a 1,50 soles cada uno. ¿Cuánto tuve que pagar en total? ***Rpta.*** 20,25 soles

Ejercicio 6 : Un obrero gana 3,40 soles por hora. ¿Cuánto ha ganado en 6 días, si trabajo 6 horas cada día ? ***Rpta.*** 122,4 soles

Ejercicio 7 : Cada luna de una ventana mide 30 cm de ancho por 50 cm de alto. ¿Cuál será su precio a razón de 0,18 soles el centímetro cuadrado? ***Rpta.*** 270 soles

Ejercicio 8 : Se compra 5 docenas de navajas a 1,35 soles cada navaja. ¿Cuánto se invirtio? ***Rpta.*** 81 soles

Ejercicio 9 : Cada rueda de una bicicleta recorre en una vuelta 12,56 m ¿Cuál será la longitud recorrida en 2 417 vueltas? ***Rpta.*** 30 357,52 m

Ejercicio 10 : Cada día Nataly hecha en su alcancilla 2,75 soles. ¿Que dinero hechará al cabo de 31 días? ***Rpta.*** 85,25 soles

Ejercicio 1' : En una división sin resto el divisor es 26,86 y el cociente 31,5 ¿Cuál es el dividendo? ***Rpta.*** 846,09

Ejercicio 12 : ¿Cuál es el dividendo de una división exacta, si el cociente es 0,005 y el divisor 0,078 5? ***Rpta.*** 0,000 392 5

Ejercicio 13 : Si un tenedor cuesta 2,75 soles y la cuchara 3,75 soles. ¿Cuánto se pagará por 10 tenedores y 5 cucharas? ***Rpta.*** 46,25 soles

Ejercicio 14 : ¿Cuánto cuesta cercar una huerta cuyo contorno mide 100 m, si el metro de alambre vale 13,75 soles y se dan 5 vueltas con él? ***Rpta.*** 6 875 soles

5.9.9 DIVISIÓN DE DECIMALES

División de un Entero por 10, 100, 1 000

Vamos a calcular la división de 547 po 10; esto quiere decir que debes hacer ese número **10 veces menor**.

Entonces:
- El 5 ocupará el lugar de las decenas.
- El 4 ocupará el lugar de las unidades.
- El 7 ocupará el lugar de las décimas.

El resultado será: 547 : 10 = 54,7

Como ves, has separado de la derecha del número una cifra. Si la operación es ésta:

547 : 100

Debe separar dos cifras: 547 : 100 = 5,47

Fíjate en el cuadro y lo comprenderás mejor:

Centena	Decena	Unidad		Centena	Decena	Unidad	Décima
5	4	7	: 10 =		5	4,	7

B. Dividir un Decimal por la Unidad seguida de Ceros.

Diez lapiceros cuestan 65,35 soles. ¿Cuál es el precio de cada lapicero? Este problema se resuelve mediante una división:

63,35 : 10

Razonamos así: Hay que hacer el número 65,35; 10 veces menor, las decenas pasaran a unidades, las unidades a décimas, etc.

Luego: $65,35 : 10 = 6,535$

Como ves, se ha corrido la coma un lugar hacia la izquierda. Si en lugar de dividir por 10 lo hubieramos hecho por 100, la hubieramos corrido dos lugares. Si no hay bastantes cifras, se colocan ceros.

C. Dividir un Decimal por un Entero.

Manuel pagó 36,75 soles por 5 chocolates. ¿Cuánto le costó cada chocolate?

Para resolver este problema reducimos los soles a céntimos:

$36,75 \times 100 = 3\,675$ céntimos

Ahora, hacemos la división: $3\,675 : 5 = 735$ céntimos (Es el precio de cada chocolate)

Por último, los céntimos se reducen a soles: $735 : 100 = 7,35$ soles

En la práctica se hace más fácil si dividimos el decimal como si fuera entero. En el cociente separamos tantos decimales como si tenga el dividendo.

```
36,75 | 5          3675 | 5
      |-----        35  |------
      |            -17  | 7, 35
      |             15
      |            -25
                      0
```

D. División de un Entero por un Decimal.

Antes de hacer esta división, vamos a recordar una propiedad muy interesante de la división inexacta:

Si se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número el cociente no varía y el resto queda multiplicado o dividido por ese número.

Supongamos que en un depósito contiene 18 litros de leche. ¿Cuántas botellas de 0,75 litros se pueden llenar?

Multiplicamos al 18 y al 0,75 por 100 ya que el divisor 0,75 tiene dos cifras decimales:

$18 \times 100 = 1\,800$; $0,75 \times 100 = 75$

Efectuamos la división:

```
1800 | 75
150  |-----
-300 | 24
 300
 ---
```

Rpta: Se pueden llenar 24 botellasde 0,75 litros

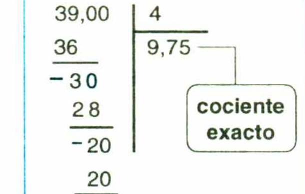
Por tanto, lo que hay que hacer para dividir dos números decimales, es multiplicar el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.

Cociente Decimal de Dos Enteros.

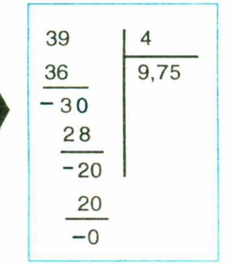
vamos a hacer la división de 39 entre 4

Tu sabes que: 39 = 39,00

Pues bien, vamos a hacer esta división:



En la práctica se hace así:



Al primer resto parcial 3, le hemos agregado un cero y lo hemos convertido en décimas. Al segundo resto parcial 2, lo hacemos en centésimas poniéndole un cero a su derecha

División de Dos Decimales.

Se ha comprado 63,9 metros de alambre por un importe de 1 501,65 soles; se desea saber el precio de un metro de alambre?

El precio se obtiene con una división: 1 501,65 : 63,9

Tenemos el inconveniente de que el divisor no puede ser decimal.

Vamos a multiplicar los dos números: 1 501,65 (dividendo) y 63,9 (divisor), por 10 para que este sea entero.

$1\ 501,65 \times 10 = 15\ 065,5$; $63,9 \times 10 = 639$

Hacemos la división:

```
15016 , 5 | 639
1278      | 23,5
-2236
 1917
 -319 5
  319 5
      0
```

Luego, el metro de alambre cuesta 23,50 soles.

Recuerda que:

* *Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros, se separan con una coma, de la derecha del número, tantas cifras decimales como ceros sigan a la unidad. Si es preciso, se escriben cero a la izquierda del número.*

Ejemplos: *23 : 10 = 2,3* *127 :100 = 1,27* *4 329 : 1 000 = 4,329*
328 : 1 000 = 0,328 *36 : 10 000 = 0, 003 6*

* *Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros lleve la unidad, si es necesario se suplen con ceros.*

Ejemplos: *2,3 :10 = 0,23* *32,75 : 1 000 = 0,032 75*
0,274 : 100 = 0,002 74 *6,47 : 10 000 = 0,000 647*

* *Para dividir un decimal por un entero, se efectua la división como si fuera entero el dividendo y se pone en el cociente una coma al bajar la primera cifra decimal.*

Ejemplos:

160, 75	5
10	32,15
- - 7	
25	
- 0	

10,24	4
8	2,56
-2 2	
2 0	
- 24	
24	
- 0	

* *Para hallar el cociente decimal de dos números enteros, se calcula su cociente y se pone la coma. Luego se continua la división, escribiendo un cero a la derecha de los restos siguientes:*

Ejemplos:

35	4
32	8,75
30	
28	
20	
20	
0	

7249	23
69	315,17
-34	
23	
119	
115	
--40	
23	
170	
9	

* *Si el resto de la división no llega nunca a ser cero se obtiene el cociente decimal aproximado con una, dos o tres cifras decimales.*

* *Ten siempre muy presente que el divisor no puede ser decimal.*

* *Al dividir un entero por un decimal se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se escriben tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.*

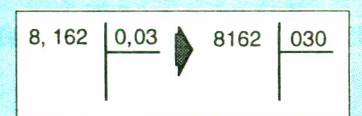
Ejemplo:

62	3,4	620	34
		34	18,23
		280	
		272	
		-- 80	
		68	
		120	
		102	
		- 18	

* *Para dividir dos decimales, se suprime la coma en el divisor y se corre la coma del dividendo hacia la derecha, tantos lugares como decimales tenga el divisor. Si es preciso, se agregan ceros a la derecha del dividendo o del divisor.*

Ejemplo:

9,71	0,0005	97100	5
		47	19420
		21	
		10	
		--	



8162	30
216	272,066
62	
200	
200	
20	

TALLER DE EJERCICIOS Nº 49

Ejercicio 1 : Calcula los cocientes de estas divisiones:

a) 75 : 10 =	d) 826 : 10 =	**g)** 1 740 : 10 =	**j)** 12 : 10 =
b) 75 : 100 =	**e)** 826 : 100 =	**h)** 1 740 : 100 =	**k)** 12 : 100 =
c) 75 : 1 000 =	**f)** 826 : 1 000 =	**i)** 1 740 : 1 000 =	**l)** 12 : 1 000 =

Ejercicio 2 : Efectua estas divisiones:

a) 69 : 1 000 =	**c)** 174 : 1 000 000 =	**e)** 8 076 : 10 000 =
b) 783 : 100 000 =	**d)** 3 472 : 10 000 =	**f)** 273 : 100 000 =

Ejercicio 3 : Calcula estas divisiones:

a) 67 200 : 10 =	**c)** 69 800 : 10 000 =
b) 36 300 : 1 000 =	**d)** 34 700 : 100 000 =

Ejercicio 4 : Realiza las divisiones:

a) 0,6 : 10 =	**d)** 345,8 : 1 000 =	**g)** 4,39 : 100 =	**j)** 0,38 : 1 000 =
b) 0,45 : 10 =	**e)** 0,7 : 100 =	**h)** 6,30 : 1 000 =	**k)** 3,37 : 10 000 =
c) 6,67 : 10 =	**f)** 0,35 : 100 =	**i)** 0,9 : 1 000 =	**l)** 394 : 10 000 =

Ejercicio 5 : Completa las desigualdades:

a) 72 : .... = 0,72	**d)** 160 : .... = 1,60	**g)** 0,33 : ....= 0,033
b) 72 : ....= 7,2	**e)** 746,5 : ....= 7,465	**h)** 0,07 : ....= 0,007
c) 72 : ....= 0,007 2	**f)** 3 731 : ....= 3,731	**i)** 19,4 : ....= 0,001 94

Ejercicio 6 : Halla el cociente decimal exacto de:

a) 59 : 2 =	**d)** 165 : 6 =	**g)** 675 : 48 =
b) 43 : 8 =	**e)** 99 : 18 =	**h)** 9,721 : 16 =
c) 87 : 4 =	**f)** 134 : 25 =	**i)** 3,675 : 75 =

Ejercicio 7 : Calcula el cociente decimal de estas divisiones aproximando hasta las milésimas:

a) 7 : 12 =	**d)** 263 : 15 =	**g)** 568 : 23 =
b) 24 : 11 =	**e)** 381 : 9 =	**h)** 1 236 : 23 =
c) 48 : 7 =	**f)** 44 : 6 =	**i)** 57 091 : 19 =

Ejercicio 8 : Efectua las divisiones:

a) 73,5 : 3 =	**d)** 56,214 : 9 =	**g)** 10 342,175 : 34 =
b) 48,9 : 12 =	**e)** 115,7 : 13 =	**h)** 0,009 3 : 5 =
c) 7,408 : 8 =	**f)** 247,3 : 93 =	**i)** 2 435,11 : 6 =

Ejercicio 9 : Averigua el cociente de estas divisiones:

a) 34 : 0,06 =	**c)** 285 : 3,6 =	**e)** 18 553 : 3,37 =	**g)** 430 : 1,153 =
b) 53 : 0,002 =	**d)** 65 : 0,8 =	**f)** 1 062 : 2,2 =	**h)** 8 632 : 21,09 =

Ejercicio 10 : Halla el cociente de estas divisiones:

a) 45,4 : 2,7 =	**c)** 3,86 : 2,35 =	**e)** 319,77 : 4,412 =
b) 9,71 : 0.000 5 =	**d)** 8,162 : 0,03 =	**f)** 1 795,03 : 1,14 =

Ejercicio 11 : Por 5 metros de tela se pagaron 186 soles. ¿A como resulto el metro? ***Rpta.*** 37,2 soles

Ejercicio 12 : El perímetro de un cuadrado tiene 27 metros. ¿Cuánto mide su lado? ***Rpta.*** 6,75 m

Ejercicio 13 : Por 15 litros de leche se han pagado 250,50 soles. Halla el precio de un litro de leche. ***Rpta.*** 16,7 soles

Ejercicio 14 : ¿Cuál es el valor un cuaderno si por 7 cuadernos hemos pagado 9,45 soles? ***Rpta.*** 1,35 soles

Ejercicio 15 : 12 madejas de lana pesan 906 gramos. ¿Cuál es el peso de cada madeja? ***Rpta.*** 75,5 gramos

Ejercicio 16 : Por 18 claveles pagó Vanessa 103,50 soles. ¿Cuál es el precio de cada clavel? ***Rpta.*** 5,75 soles

Ejercicio 17 : ¿Cuántas ampollas de 0,01 litros se pueden llenar con 0,85 litros? ***Rpta.*** 85 ampollas

Ejercicio 18 : Un albañil gana 126 soles en 12 días. ¿Cuál es el jornal diario? ***Rpta.*** 10,5 soles

Ejercicio 19 : ¿Cuánto vale la tercera parte de una finca que cuesta 589 756,75 soles? ***Rpta.*** 196 585,583 3 soles

Ejercicio 20 : Una persona ahorra en un mes 1 273,65 soles. ¿Cuál fue su ahorro en un día? ***Rpta.*** 42,455 soles

POTENCIA DE BASE DECIMAL Y EXPONENTE NATURAL

Para elevar un número decimal a una potencia, se eleva como si fuese entero y de la derecha del resultado se separan con una coma tantas cifras como exprese el producto del exponente por el número de cifras decimales que tenga la base.

Segun esto para hallar $(0,\underbrace{003})^{②}$ bastara elevar el 3 al cuadrado, $3^2 = 9$ y separar seis cifras decimales (3 × ② = **6**).

$$\underbrace{(0,003)}_{base}{}^{②} = \underbrace{0,000\,009}_{Potencia}$$

(② : *Exponente*)

Veamos otros ejemplos:

a) $(0,\underbrace{005})^{③}$; basta elevar el 5 al cubo; $5^3 = 125$ y separar nueve cifras decimales (3 × ③ = **9**)

$$(0,005)^3 = 0,000\,000\,125$$

b) $(0,\underbrace{0002})^{④}$; basta elevar el 2 a la cuarta; $2^4 = 16$ y separar dieciseis cifras decimales (4 × ④ = **16**).

$$(0,0002)^4 = 0,000\,000\,000\,000\,001\,6$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

I) Producto de Potencias de Igual Base.

El producto de dos o más potencias de la misma base es otra potencia de igual base, pero con un exponente que es la suma de los exponentes de los factores. Osea:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos: Efectuar:

a) $(0,3)^2 \times (0,3)^3 = (0,3)^{2+3} = (0,3)^5$

b) $(0,02)^5 \times (0,02)^2 = (0,02)^{5+2} = (0,02)^7$

II) Cociente de Dos Potencias de Igual Base.

El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de igual base, pero con un exponente que es la diferencia de los exponentes de las potencias dadas, osea:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos: Efectuar: a). $\dfrac{(1,2)^3}{(1,2)^2} = (1,2)^{3-2} = (1,2)^1 = 1,2$

b). $\dfrac{(0,8)^6}{(0,8)^3} = (0,8)^{6-3} = (0,8)^3 = 0,512$

III) Potencia de Potencia.

La Potencia de otra Potencia es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes dados. Osea: $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Ejemplos: Efectuar: a). $\left[(0,2)^3\right]^5 = (0,2)^{3\times 5} = (0,2)^{15}$

b). $\left[(0,01)^2\right]^4 = (0,01)^{2\times 4} = (0,01)^8$

IV) Potencia de un Producto.

La Potencia de un producto dada es igual al producto de la potencia "n" de cada uno de los factores. Osea: $(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$

Ejemplos: Efectuar:

a). $(0,2 \times 0,3)^2 = (0,2)^2 \times (0,3)^2 = (0,04) \times (0,09) = 0,003\ 6$

b). $(0,04 \times 5)^3 = (0,04)^3 \times (5)^3 = 0,000\ 064 \times 125 = 0,008$

V) Potencia de un Cociente.

La potencia de exponente "n" de un cociente, es igual al cociente de las potencias de exponente "n" del dividendo entre el divisor. Osea: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Ejemplos: Efectuar: a). $\left(\dfrac{1,4}{0,2}\right)^2 = \dfrac{(1,4)^2}{(0,2)^2} = \dfrac{1,96}{0,04} = \dfrac{196}{4} = 49$

b). $\left(\dfrac{0,8}{0,4}\right)^3 = \dfrac{(0,8)^3}{(0,4)^3} = \dfrac{0,512}{0,064} = \dfrac{512}{64} = 8$

Operaciones Combinadas de Números Decimales Exactos Empleando Potencias de Base 10

1. Efectuar: $M = \dfrac{(0,002)^4}{(0,05)^2}$

Recuerda que:

i) $0,002 = \dfrac{2}{1\,000} = \dfrac{2}{10^3} = 2 \times 10^{-3}$

Nos indica el número de decimales

ii) $3 \times 10^{-4} = 0,000\,3$ iii) $25 \times 10^{-6} = 0,000\,025$

Resolución:

Sabemos que:

$$\begin{cases} 0,002 = 2 \times 10^{-3} \\ 0,05 = 5 \times 10^{-2} \end{cases}$$

Luego: $M = \dfrac{(2 \times 10^{-3})^4}{(5 \times 10^{-2})^2} = \dfrac{2^4 \times (10^{-3})^4}{5^2 \times (10^{-2})^2}$

$$M = \frac{16 \times 10^{-12}}{25 \times 10^{-4}} = \frac{16}{25} \times 10^{-12-(-4)} \Rightarrow M = \frac{16}{25} \times 10^{-12+4}$$

$$M = \boxed{\frac{16}{25}} \times 10^{-8} = 0,64 \times 10^{-8} \Rightarrow \text{; pero : } \boxed{0,64 = 64 \times 10^{-2}}$$

$$M = 64 \times 10^{-2} \times 10^{-8} = 64 \times 10^{-2+(-8)} = 64 \times 10^{-10} \quad \therefore \boxed{M = 64 \times 10^{-10}}$$

Rpta.

2 Efectuar: $P = \dfrac{(0,\ 000\ 4)^2 \times (0,\ 002)^5}{(0,\ 000\ 06)^3}$

Resolución:

Sabemos que: $\boxed{0,\ 000\ 4 = 4 \times 10^{-4}}$; $\boxed{0,\ 002 = 2 \times 10^{-3}}$ y $\boxed{0,\ 000\ 06 = 6 \times 10^{-5}}$

Luego:

$$P = \frac{(4 \times 10^{-4})^2 \times (2 \times 10^{-3})^5}{(6 \times 10^{-5})^3} = \frac{(4^2 \times 10^{-8}) \times (2^5 \times \cancel{10^{-15}})}{6^3 \times \cancel{10^{-15}}}$$

$$P = \frac{4^2 \times 2^5 \times 10^{-8}}{6^3} = \frac{16 \times 32 \times 10^{-8}}{216} = \frac{4 \times 32 \times 10^{-8}}{54}$$

$$P = \frac{2 \times 32 \times 10^{-8}}{27} = \frac{64}{27} \times 10^{-8} \Rightarrow \therefore \boxed{P = \frac{64}{27} \times 10^{-8}}$$

Rpta.

RADICACIÓN DE NUMEROS NATURALES DECIMALES

Ejemplo 1: $\sqrt{0,25} = \sqrt{25 \times 10^{-2}}$

Recuerda que: $\sqrt[n]{A \times B} = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B}$

Luego:

$\sqrt{0,25} = \sqrt{25 \times 10^{-2}} = \sqrt{25} \times \sqrt{10^{-2}}$

Recuerda que: $\sqrt[n]{A^n} = A^1 = A$

$\sqrt{0,25} = \sqrt{25} \times 10^{-1} = 5 \times 10^{-1}$

$\therefore \sqrt{0,25} = 5 \times 10^{-1} = 0,5$ **Rpta.**

Ejemplo: $\sqrt[3]{0,0001125} = \sqrt[3]{125 \times 10^{-6}} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{10^{-6}}$

$\sqrt[3]{0,0001125} = \sqrt[3]{125} \times 10^{-\frac{6}{3}} = 5 \times 10^{-2}$

Recuerda que: $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$

$\therefore \sqrt[3]{0,000125} = 5 \times 10^{-2} = 0,05$ **Rpta.**

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMEROS DECIMALES

Regla: *Se separa el número decimal en grupos de dos cifras a la derecha a izquierda de la* ***coma decimal****, la parte decimal debe tener completo cada grupo de dos cifras, si faltan completamos con ceros a la derecha. Hecho esto se extrae la raíz como si fuera un número entero, poniendo "coma decima" en la raíz al bajar el primer grupo una "coma decimal".*

Ejemplo 1: Extraer la raíz cuadrada de: 19,859 6

Explicación:

PRIMERO: $\sqrt{19,85\,96}$ | 4

Separamos el número decimal en grupos de dos cifras a la derecha e izquierda de la ***coma decimal****.*

SEGUNDO: $\sqrt{19,85\,96}$ | 4

-16

3

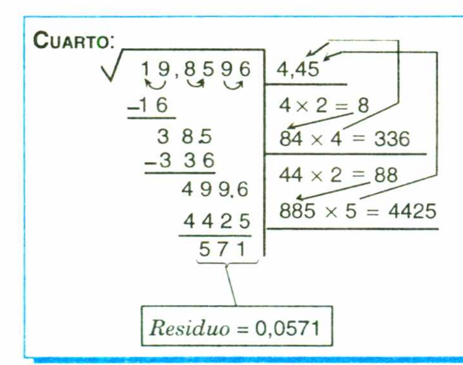
Extraemos la raíz cuadrada del primer grupo osea de la raíz cuadrada de 19 que es 4, la elevamos al cuadrado y nos da 16, este lo restamos del primer grupo nos da 3 de resto.

TERCERO:

$\sqrt{19{,}85\,96}$ | 4,4
−1 6 | 4 × 2 = 8
3 85 | 84 × 4 = 336
−3 36
49

A la derecha del resto 3 bajamos el segundo grupo 85 y se forma el número 385, separamos la primera cifra de la derecha y queda 38,5 lo que queda ala izquierda 38 lo dividimos por el duplo de la raíz hallada que es 8 asi: (38 : 8 = 4), para ver si esta cifra es buena la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 84 que lo multiplicamos por la misma cifra 4 siendo el producto 336. Como este producto se puede restar de 338 lo restamos y subimos el 4 a la raíz, la resta nos dá 49.

CUARTO:



A la derecha del resto 49 escribimos el siguiente grupo 96 y se forma el número 4 996 separamos su primera cifra de la derecha y queda 499,6 y dividimos 499 entre el duplo de la raíz de 44 que es 88 y nos da de cociente 5. Asi: (499 : 88 = 5); para seber si esta cifra 5 es buena la escribimos al lado del duplo de la raíz y se forma el número 885 que lo multiplicamos por la misma cifra 5 siendo el producto 4 425 como este producto se puede restar de 4 996 lo restamos y subimos el 5 a la raíz, la resta nos dá 571.

Comprobación: Cuadrado de la raíz ...$(4{,}45)^2$ = 4,45 x 4,45 = 19,802 5

Residuo o resto................. = 0,0571 = + 0,057 1

19,859 6

Ejemplo 2 : Extraer la raíz cuadrada de: 1 703,725

Resolución:

$\sqrt{17\,03{,}72\,50}$ | 41,27
−16 | 4 × 2 = 8
10 3 | 81 × 1 = 81 → **10 : 8 = 1**
− 81 | 41 × 2 = 82
2272 | 822 × 2 = 1644 → **227 : 82 = 2**
− 1644 | 412 × 2 = 824
6285 0 | 8247 × 7 = 57729 → **6285 : 824 = 7**
− 57729
5121

Residuo = 0,5121

Comprobación: Cuadrado de la raíz ....$(41{,}27)^2$ = 41,27 × 41,27 = 1 703,212 9

Residuo o resto .... = 0,512 1 = + 0,512 1

1 703,725 0

TALLER DE EJERCICIOS Nº 50

Ejercicio 1 : Efectuar las siguientes operaciones:

a). $(0,001)^2 \times (0,002)^3 =$	e). $\dfrac{(0,4)^5}{(0,4)^2} =$	i). $\left[(0,1)^2\right]^3 =$
b). $(0,03)^4 \times (0,01)^5 =$	f). $\dfrac{(0,01)^3}{(0,01)} =$	j). $\left[(0,001)^3\right]^4 =$
c). $(0,003)^2 \times (0,004)^4 =$	g). $\dfrac{(0,008)^5}{0,008} =$	k). $\left[(0,02)^5\right]^2 =$
d). $(0,3)^5 \times (0,001)^2 =$	h). $\dfrac{(0,3)^4}{(0,3)^3} =$	l). $\left[(0,004)^2\right]^3 =$

Rpta. **a)** 8×10^{-15} **b)** 81×10^{-18} **c)** $2\,304 \times 10^{-18}$ **d)** 243×10^{-11} **e)** 0,064 **f)** 0,000 1
g) $(0,008)^4$ **h)** 0,3 **i)** 10^{-6} **j)** 10^{-36} **k)** $1\,024 \times 10^{-20}$ **l)** $4\,096 \times 10^{-18}$

Ejercicio 2 : Efectuar las siguientes operaciones:

a). $(0,1 \times 0,002)^4 =$	d). $(0,004 \times 6)^2 =$	g). $\left(\dfrac{2,8}{0,7}\right)^3 =$
b). $(0,02 \times 0,03)^2 =$	e). $(8 \times 0,0005)^3 =$	h). $\left(\dfrac{0,032}{0,004}\right)^2 =$
c). $(0,001 \times 0,4)^3 =$	f). $(12 \times 0,002)^2 =$	i). $\left(\dfrac{0,016}{0,004}\right)^3 =$

Rpta. **a)** 16×10^{-16} **b)** 36×10^{-8} **c)** 64×10^{-12} **d)** 576×10^{-6} **e)** 64×10^{-9}
f) 576×10^{-6} **g)** 64 **h)** 64 **i)** 64

Ejercicio 3 : Empleando potencias de Diez, efectuar las siguientes operaciones:

a). $\dfrac{(0,008)^4}{(0,02)^2} =$	d). $\dfrac{(0,006)^2 \times (0,002)^5}{(0,000004)^2} =$	g). $\dfrac{0,00012 \times 0,0008}{0,000024} =$

b). $\dfrac{(0,0028)^2}{(0,04)^3} =$	e). $\dfrac{(0,02)^2 \times (0,009)^2}{(0,0003)^3} =$	h). $\dfrac{0,000125 \times 0,005}{0,0025 \times 0,0015} =$
c). $\dfrac{(0,00045)^3}{(0,0003)^2} =$	f). $\dfrac{(0,08)^2 (0,00001)^6}{(0,2)^3 (0,001)^3} =$	i). $\dfrac{(0,2)^6 \times (0,01)^2}{(0,00001)^3} =$

Rpta.

a) $1\,024 \times 10^{-8}$ **b)** $49/4 \times 10^{-2}$ **c)** $10\,125 \times 10^{-7}$ **d)** 72×10^{-9}
e) $1\,200$ **f)** 8×10^{-22} **g)** 4×10^{-3} **h)** $5/3 \times 10^{-1}$ **i)** 64×10^{5}

Ejercicio 4 : Efectuar las siguientes operaciones:

a). $\sqrt{0,81} =$	d). $\sqrt{1,69} =$	g). $\sqrt{6,25} =$	j). $\sqrt[3]{0,027} =$
b). $\sqrt{0,0225} =$	e). $\sqrt{5,29} =$	h). $\sqrt{104,04} =$	k). $\sqrt[3]{0,512} =$
c). $\sqrt{0,0289} =$	f). $\sqrt{37,21} =$	i). $\sqrt{40,96} =$	l). $\sqrt[3]{1,728} =$

Ejercicio 5 : Hallar la raíz cuadrada de:

a) 8,912	**d)** 34,791 8	**g)** 397,218
b) 6,732	**e)** 57,341 5	**h)** 203,062 9
c) 72,918	**f)** 3,141 59	**i)** 6 549,219 8

Rpta.

a) raíz = 2,98 y residuo = 0,031 6
b) raíz = 2,59 y residuo = 0,023 9
c) raíz = 8,53 y residuo = 0,157 1
d) raíz = 5,89 y residuo = 0,099 7
e) raíz = 7,57 y residuo = 0,036 6
f) raíz = 1,772 y residuo = 0,001 606
g) raíz = 19,93 y residuo = 0,013 1
h) raíz = 14,25 y residuo = 0,000 4
i) raíz = 80,92 y residuo = 1,173 4

FRACCIONES NO DECIMALES

- NÚMEROS DECIMALES ILIMITADAS QUE NO SON RACIONALES

Un número racional puede tener representante que sea fracción decimal o que no lo sea.

En el tema anterior se estudiaron las fracciones no decimales, las cuales representan números decimales finitas o limitadas.

En el presente tema vamos a estudiar las fracciones no decimales como por

Ejemplo: $\frac{4}{7}$; $\frac{-5}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{9}$; *los cuales representan números decimales ilimitados, cuyo número de cifras es infinito.*

Las fracciones no Decimales representan Numeros Decimales Ilimitados cuyo número de cifras es Infinito Fracción Decimal.

FRACCIÓN NO DECIMAL

Es aquella cuyo denominador no se puede reducir a potencia de 2, ni de 5 ni del producto de ambos.

Al reducir una fracción no decimal a un número decimal pueden darse dos casos (advierte en primer lugar que la división del numerador por el denominador sera **Inexacta** pues si fuese exacta representaria un decimal finito y consecuentemente, se trataría de una fracción decimal o equivalente).

Observa:

Primer Caso: *Tiene un número ilimitado de cifras decimales que se repiten formando grupos o períodos. Reciben el nombre de* ***Numero Decimal Periodico Simple o Puro****.*

$\frac{2}{11}$: ➡

```
 20   | 11
  90  |0, 1818 ......
   20
    90
     2
```

Segundo Caso: *Tienen un número ilimitado de cifras decimales, cuyo período o grupo comienza después de alguna cifra decimal. (En el ejemplo propuesto comienzan después de 41.) Reciben el nombre de* ***Número Decimal Periodico Mixto****.*

$\frac{5}{12}$: ➡

```
 50   | 12
  20  |0, 41666 ......
   80
    80
     8
```

- COMO SABER SI UNA FRACCIÓN DECIMAL REPRESENTAN UN DECIMAL PERIÓDICO SIMPLE O PERIÓDICO MIXTO

En primer lugar, se simplifica la fracción a su correspondiente irreductible.

Observa:

Las siguientes fracciones irreductible y los números decimales que presentan:

$\frac{2}{11} = 0,1818...... = 0,\widehat{18}$ *(Decimal periódico simple o puro)*

$\frac{5}{12} = 0,41666 ...... = 0,41\widehat{6}$
$\frac{8}{15} = 0,53333....... = 0,5\widehat{3}$ *(Decimal periódico mixto)*

El periódo se acostumbra a indicar asi: aunque existan otras formas de indicarlo como:

$3,\widehat{2} = 3(2) = 3,\overline{2} = 3,222.....$

- Se observa que en el denominador de la primera fracción no aparece ningún factor 2 ni 5.
- En el denominador de la segunda y tercera fracción aparece el factor 2 ó el 5.

En consecuencia:

* *Una fracción no decimal representa un número decimal periódico simple o puro, si en el denominador de su fracción irreductible no aparece el factor 2, ni el 5.*
* *Una fracción no decimal representa un número decimal periódico mixto, si en el denominador de su fracción irreductible aparece algún factor 2 ó 5.*

- **FRACCIÓN GENERATRIZ DE UNA FRACCIÓN DECIMAL**

Sabes que todo decimal ya sea limitado periódico, procede de una fracción. La fracción irreductible de la que precede dicho decimal se llama **Fracción Generatriz de la Decimal**.

En el estudio de la generatriz de una expresión decimal nos encontramos con tres casos:

1º **Que el Número Decimal sea finito o Limitado.**

Hallamos, en primer lugar su fracción decimal correspondiente y, a continuación su irreductible.

Ejemplo: 0,44

Fracción decimal: $\frac{44}{100}$ Fracción irreductible: $\frac{11}{25}$

2º **Que el Número Decimal sea Periódico Puro.**

Ejemplo: $0,\widehat{18} = 0,1818......$

Observa: Designado por "**x**" la fracción generatriz: $\mathbf{x} = 0,1818$ .... (1)

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por 100

$100\,\mathbf{x} = (0,1818...) \times 100$

$100\,\mathbf{x} = 18,18.....$ .... (2)

Restando de la segunda igualdad la primera

$$\begin{array}{r} 100\,\mathbf{x} = 18{,}1818 \\ -\ \mathbf{x} = 0{,}1818 \\ \hline 99\,\mathbf{x} = 18 \end{array}$$

De donde: $x = \frac{18}{99}$ hallando después su irreductible: $\frac{2}{11}$

Lo que nos dice que para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura se pone por numerador el periódo, y por denominador tantos nueves como cifras tiene tiene el periódo, hallando depués la irreductible. Si el decimal tuviese parte entera seguida del primer periódo, menos la parte entera.

Ejemplos: $0,\widehat{4} = \frac{4}{9}$; $0,\widehat{23} = \frac{23}{99}$; $0,\widehat{125} = \frac{125}{999}$

$1,\widehat{25} = \frac{125-1}{99} = \frac{124}{99}$; $2,\widehat{6} = \frac{26-2}{9} = \frac{24}{9}$

3º Que ei Número Decimal sea Periódico Mixto.

Ejemplo: $0,3\widehat{56} = 0,35656\ldots\ldots$

Observa: Designando por "**x**" la fracción generatriz: $\mathbf{x} = 0{,}35656$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por 1 000

$1\,000\,\mathbf{x} = (0{,}35656\ldots) \times 1\,000$

$1\,000\,\mathbf{x} = 356{,}5656\ldots.$ .... **(I)**

Multiplicando, tambien los dos miembros de la primera igualdad por 10:

$10\,\mathbf{x} = (0{,}35656\ldots) \times 10$

$10\,\mathbf{x} = 3{,}5656\ldots.$ .... **(II)**

Restamos miembro a miembro **(I)** y **(II)**:

$$\begin{array}{rcl} 1\,000\,\mathbf{x} & = & 356{,}5656\ldots \\ 10\,\mathbf{x} & = & 3{,}5656\ldots \\ \hline 990\,\mathbf{x} & = & 356 - 3 \end{array}$$

De donde:

$$x = \frac{356-3}{990} = \frac{353}{990}$$

Lo que nos dice que para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta se pone por numerador la parte no periódica seguida del primer período, menos la parte no periódica y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como tiene la parte no periódica, hallando después la irreductible. Si el decimal tuviese parte entera por numerador se pondría la parte entera seguida de la no periódica y del primer período, menos la parte entera seguida de la no periódica.

Ejemplos: $0,3\widehat{7} = \dfrac{125-1}{90}$; $0,41\widehat{3} = \dfrac{413-41}{900}$; $2,1\widehat{8} = \dfrac{218-21}{90}$; $1,3\widehat{52} = \dfrac{1352-13}{990}$

EXISTEN NÚMEROS DECIMALES ILIMITADOS QUE NO SON NÚMEROS RACIONALES

Calculamos la operación: $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1,\ 414\ 213\ 562\ 373\ 09......$$

Observa:

a) El resultado es un decimal ilimitado pues, aunque prolonguemos su cálculo, nunca llegaremos a cero 0.

b) Este decimal ilimitado no es periódico; por mucho que prolonguemos su cálculo nunca habrá un período de cifras que se vayan repitiendo.

c) Este decimal no se puede expresar mediante una fracción (como consecuencia de ser limitado no periódico).

Luego, el resultado de $\sqrt{2}$, decimal ilimitado no periódico, no es un número racional.

Igual ocurre con cualquier raíz cuadrada de números que sean cuadrados perfectos, como por ejemplo: $\sqrt{23}$ = 4,79583..., decimal ilimitado no periodico y, por tanto, no racional.

Observa: tambien el valor de π

$$\pi = 3,141\ 592\ 65.....$$

este decimal ilimitado no es periódico, no es posible expresarlo mediante una fracción. Por tanto, no es un número racional.

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FRACCIÓN GENERATRIZ

Ejerccio

: Halla la fracción generatriz de 0,45 y 1,2

Resolución:

a). $0,45 = \dfrac{45}{100} = \boxed{\dfrac{9}{20}}$ ➡ (Fracción generatriz)

b). $1,2 = \dfrac{12}{10} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$ ➡ (Fracción generatriz)

Ejercicio 2: Halla la fracción generatriz de:

$$0,\overset{\frown}{6}\ ;\ 0,\overset{\frown}{33}\ ;\ 0,\overset{\frown}{125}\ ;\ 0,1\overset{\frown}{3}\ ;\ 0,23\overset{\frown}{4}\ ;\ 0,1\overset{\frown}{36}\ ;\ 3,\overset{\frown}{4}\ ;\ 1,\overset{\frown}{26}\ ;\ 2,4\overset{\frown}{5}\ ;\ 1,35\overset{\frown}{431}$$

Resolución:

a). $0,\overset{\frown}{6} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

b). $0,\overset{\frown}{33} = \dfrac{33}{99} = \dfrac{1}{3}$

c). $0,\overset{\frown}{125} = \dfrac{125}{999}$

d). $0,1\overset{\frown}{3} = \dfrac{13-1}{90} = \dfrac{12}{90} = \dfrac{2}{15}$

e). $0,23\overset{\frown}{4} = \dfrac{234-23}{900} = \dfrac{211}{900}$

f). $0,1\overset{\frown}{36} = \dfrac{136-1}{990} = \dfrac{1365}{990} = \dfrac{27}{198} = \dfrac{3}{22}$

g). $3,\overset{\frown}{4} = \dfrac{34-3}{9} = \dfrac{31}{9}$ ó $3,\overset{\frown}{4} = 3\dfrac{4}{9} = \dfrac{9\times 3+4}{9} = \dfrac{31}{9}$

h). $1,\overset{\frown}{26} = \dfrac{126-1}{99} = \dfrac{125}{99}$ ó $1,\overset{\frown}{26} = 1\dfrac{26}{99} = \dfrac{99\times 1+26}{99} = \dfrac{125}{99}$

i). $2,4\overset{\frown}{5} = \dfrac{245-24}{90} = \dfrac{221}{90}$ ó $2,4\overset{\frown}{5} = 2\dfrac{45-4}{90} = 2\dfrac{41}{90} = \dfrac{221}{90}$

j). $1,35\overset{\frown}{431} = \dfrac{135431-135}{99900}$ ó $1,35\overset{\frown}{431} = 1\dfrac{35431-35}{99900}$

Ejercicio 3: Halla el resultado exacto de la operación siguiente: $0,4 + 1,2\overset{\frown}{5}$; expresando el resultado en forma de fracción.

Resolución:

$$0,4 = \frac{4}{10}$$

$$1,2\overset{\frown}{5} = \frac{125-12}{90} = \frac{113}{90}$$

Luego:

$$\frac{4}{10} + \frac{113}{90} = \frac{9\times 4+113}{90} = \frac{36+113}{90} = \frac{149}{90} = 1,6555\ldots$$

$$\therefore\quad 0,4 + 1,2\overset{\frown}{5} = 1,6\overset{\frown}{5} = 1\,\frac{65-6}{90} = 1\frac{59}{90}$$

Ejercicio 4: Halla el resultado exacto de la división siguiente: $2,1\overset{\frown}{8} : 1,\overset{\frown}{5}$; expresando el resultado en forma de fracción.

Resolución:

$$2,1\overset{\frown}{8} = \frac{218-21}{90} = \frac{197}{90}$$

$$1,\widehat{5} = \frac{15-1}{9} = \frac{14}{9}$$

Luego: $$\frac{197}{90} : \frac{14}{9} = \frac{197}{\cancel{90}} \times \frac{\cancel{9}}{14} = \frac{197}{10} \times \frac{1}{14} = \boxed{\frac{197}{140}}$$

Ejercicio 5 : Escribe en forma de número decimal las siguientes fracciones:

$$\frac{34}{9} ; \frac{40}{33} ; \frac{37}{90} \text{ y } \frac{8}{3}$$

Resolución:

a). $\frac{34}{9} = 3,777... = 3,\widehat{7}$

b). $\frac{40}{33} = 1,2121... = 1,\widehat{21}$

c). $\frac{37}{990} = 0,03737... = 0,0\widehat{37}$

d). $\frac{8}{3} = 2,666... = 2,\widehat{6}$

Ejercicio 6 : Efectua $\frac{8}{15} - \frac{1}{3}$ y escribe el número decimal representando por la diferencia efectuada.

Resolución:

Dando común denominador a las fracciones dadas, obtenemos:

$$\frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{8 - 5 \times 1}{15} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{15}} = \frac{1}{5} = \boxed{0,2}$$

Ejercicio 7 : Hallar el valor de "E":

$$E = 0,2\widehat{4} \times 1,\widehat{90} : 1,4 - 0,1\widehat{3}$$

Resolución:

a) $0,2\widehat{4} = \frac{24-2}{90} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$

b) $1,\widehat{90} = 1\frac{90}{99} = 1\frac{10}{11} = \frac{21}{11}$

c) $1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

d) $0,1\widehat{3} = \frac{13-1}{90} = \frac{\cancel{12}}{\cancel{90}} = \frac{2}{15}$

Luego:

$$E = \frac{\cancel{11}}{\underset{15}{\cancel{45}}} \times \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{\cancel{11}} : \frac{7}{5} - \frac{2}{15} = \frac{\cancel{7}}{15} \times \frac{5}{\cancel{7}} - \frac{2}{15} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{15}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 51

Ejercicio 1 : Halla la fracción generatriz de:

a) 0,46 =	**d)** 2,14 =	**g)** 16,460 =
b) 0,324 =	**e)** 1,62 =	**h)** 3,123 =
c) 3,6 =	**f)** 32,4 =	**i)** 2,0450 =

Rpta. a). $\frac{23}{50}$ b). $\frac{81}{250}$ c). $\frac{18}{5}$ d). $\frac{107}{50}$ e). $\frac{81}{50}$ f). $\frac{162}{5}$ g). $\frac{823}{50}$ h). $\frac{3123}{1000}$ i). $\frac{409}{200}$

Ejercicio 2 : Halla la fracción generatriz de:

a) $0,\widehat{2}$ =	g) $0,\widehat{312}$ =	ll) $1,\widehat{046}$ =
b) $0,\widehat{5}$ =	h) $0,\widehat{563}$ =	m) $1,\widehat{003}$ =
c) $0,\widehat{8}$ =	i) $0,\widehat{1263}$ =	n) $2,\widehat{108}$ =
d) $0,\widehat{42}$ =	j) $1,\widehat{42}$ =	ñ) $2,\widehat{05}$ =
e) $0,\widehat{38}$ =	k) $2,\widehat{37}$ =	o) $5,\widehat{12}$ =
f) $0,\widehat{45}$ =	l) $3,\widehat{68}$ =	p) $4,\widehat{12}$ =

Rpta. a). $\frac{2}{9}$ b). $\frac{5}{9}$ c). $\frac{8}{9}$ d). $\frac{14}{33}$ e). $\frac{38}{99}$ f). $\frac{5}{11}$ g). $\frac{104}{333}$ h). $\frac{563}{999}$ i). $\frac{421}{3\,333}$

j). $\frac{47}{33}$ k). $\frac{235}{99}$ l). $\frac{365}{99}$ ll). $\frac{1045}{999}$ m). $\frac{334}{333}$ n). $\frac{234}{111}$ ñ). $\frac{203}{99}$ 0). $\frac{169}{33}$ p). $\frac{136}{33}$

Ejercicio 3 : Halla la fracción generatriz de:

a) $0,1\widehat{4}$ =	d) $0,1\widehat{28}$ =	g) $0,16\widehat{92}$ =	j) $0,432\widehat{5}$ =	ll) $2,0\widehat{62}$ =
b) $0,2\widehat{6}$ =	e) $0,2\widehat{43}$ =	h) $0,4\widehat{326}$ =	k) $1,3\widehat{2}$ =	m) $3,25\widehat{37}$ =
c) $0,3\widehat{2}$ =	f) $0,32\widehat{4}$ =	i) $0,2\widehat{128}$ =	l) $1,42\widehat{6}$ =	n) $2,04\widehat{5}$ =

Rpta. a). $\frac{13}{90}$ b). $\frac{4}{15}$ c). $\frac{29}{90}$ d). $\frac{127}{990}$ e). $\frac{241}{990}$ f). $\frac{73}{225}$ g). $\frac{419}{2475}$ h). $\frac{2\,161}{4\,995}$

i). $\frac{1063}{4\,995}$ j). $\frac{3\,893}{9\,000}$ k). $\frac{119}{90}$ l). $\frac{107}{75}$ ll). $\frac{1021}{495}$ m). $\frac{8\,053}{2\,475}$ n). $\frac{1841}{900}$

Ejercicio 4 : Halla el resultado exacto de la operación siguiente, expresando el resultado en forma de fracción:

a) $0{,}6 + 1{,}\overset{\frown}{35} =$	d) $3{,}1 + 0{,}\overset{\frown}{8} =$	g) $3{,}06 + 1{,}\overset{\frown}{42} =$
b) $0{,}4 + 2{,}\overset{\frown}{05} =$	e) $4{,}2 + 1{,}\overset{\frown}{3} =$	h) $23{,}4 + 2{,}\overset{\frown}{6} =$
c) $1{,}2 + 0{,}\overset{\frown}{63} =$	f) $5{,}6 + 3{,}\overset{\frown}{8} =$	i) $1{,}32 + 3{,}\overset{\frown}{2} =$

Rpta. a). $\frac{967}{495}$ b). $\frac{1213}{495}$ c). $\frac{101}{55}$ d). $\frac{359}{90}$ e). $\frac{83}{15}$
f). $\frac{427}{45}$ g). $\frac{7399}{1650}$ h). $\frac{391}{15}$ i). $\frac{1022}{225}$

Ejercicio 5 : Halla el resultado exacto de las divisiones siguientes; expresando el resultado en forma de fracción:

a) $1{,}\overset{\frown}{24} : 1{,}\overset{\frown}{3} =$	d) $3{,}\overset{\frown}{2} : 0{,}3\overset{\frown}{4} =$	g) $2{,}0\overset{\frown}{6} : 0{,}12\overset{\frown}{3} =$
b) $0{,}\overset{\frown}{13} : 0{,}\overset{\frown}{4} =$	e) $1{,}\overset{\frown}{46} : 3{,}\overset{\frown}{2} =$	h) $2{,}13\overset{\frown}{4} : 1{,}3\overset{\frown}{27} =$
c) $2{,}\overset{\frown}{6} : 1{,}\overset{\frown}{8} =$	f) $0{,}16\overset{\frown}{92} : 0{,}1\overset{\frown}{28} =$	i) $4{,}0\overset{\frown}{21} : 2{,}0\overset{\frown}{3} =$

Rpta. a). $\frac{41}{44}$ b). $\frac{13}{44}$ c). $\frac{24}{17}$ d). $\frac{290}{31}$ e). $\frac{5}{11}$ f). $\frac{838}{635}$ g). $\frac{620}{37}$ h). $\frac{21131}{13140}$ i). $\frac{1327}{671}$

Ejercicio 6 : Escribe en forma de número decimal las siguientes fracciones:

a). $\frac{29}{9} =$	c). $\frac{31}{90} =$	e). $\frac{37}{300} =$	g). $\frac{73}{55} =$
b). $\frac{372}{90} =$	d). $\frac{186}{90} =$	f). $\frac{107}{330} =$	h). $\frac{1921}{900} =$

Rpta. a). $3{,}\overset{\frown}{2}$ c). $0{,}3\overset{\frown}{4}$ e). $0{,}12\overset{\frown}{3}$ g). $1{,}3\overset{\frown}{27}$
b). $4{,}1\overset{\frown}{3}$ d). $2{,}0\overset{\frown}{6}$ f). $0{,}3\overset{\frown}{24}$ h). $2{,}13\overset{\frown}{4}$

Ejercicio 7 : Efectuar y escribir el número decimal representado por la diferencia efectuada:

a). $\frac{7}{25} - \frac{1}{5} =$	d). $\frac{56}{45} - \frac{7}{9} =$	g). $\frac{199}{45} - \frac{7}{15} =$
b). $\frac{11}{36} - \frac{1}{9} =$	e). $\frac{4}{11} - \frac{1}{4} =$	h). $\frac{68}{33} - \frac{13}{11} =$
c). $\frac{27}{30} - \frac{2}{3} =$	f). $\frac{7}{3} - \frac{18}{11} =$	i). $\frac{47}{33} - \frac{8}{11} =$

Rpta.

a) $0{,}08$	b) $0{,}19\overset{\frown}{4}$	c) $0{,}2\overset{\frown}{3}$	d) $0{,}4\overset{\frown}{6}$	e) $0{,}1\overset{\frown}{136}$
f) $0{,}\overset{\frown}{69}$	g) $3{,}9\overset{\frown}{5}$	h) $0{,}\overset{\frown}{87}$	i) $0{,}\overset{\frown}{69}$	

Ejercicio 8 : Efectuar y escribir el número decimal representando por la suma efectuada, indicando qué clase de número decimal es:

a). $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=$	c). $\frac{5}{9}+\frac{1}{3}=$	e). $\frac{29}{9}+\frac{1}{4}=$
b). $\frac{8}{3}-\frac{1}{5}=$	d). $\frac{5}{11}+\frac{2}{3}=$	f). $\frac{2}{15}+\frac{4}{9}=$

Rpta.

a) $0{,}4\overset{\frown}{6}$ = periódica mixta	b) $2{,}4\overset{\frown}{6}$ = periódica mixta	c) $0{,}\overset{\frown}{8}$ = periódica pura
d) $1{,}\overset{\frown}{12}$ = periódica pura	e) $3{,}47\overset{\frown}{2}$ = periódica mixta	f) $0{,}5\overset{\frown}{7}$ = periódica mixta

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los números 10; 100; 1 000; etc. juegan un papel muy importante en la notación decimal, y se llaman potencias de 10. Un modo conveniente de indicar las potencias de 10 es mediante el uso de exponentes:

$10^1 = 10$		
$10^2 = 10 \times 10$	ó	100
$10^3 = 10 \times 10 \times 10$	ó	1 000
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$	ó	10 000

Y asi sucesivamente, leemos "10^4" como "diez a la cuarta".

En el trabajo científico, se necesitan métodos simples para representar números grandes, no resulta conveniente utilizar el numeral 155 000 000 para indicar el número aproximado de kilometros entre la Tierra y el Sol. Sin embargo, si nos damos cuenta de que

$$155\,000\,000 = 155 \times 1\,000\,000$$

Podemos decir que el Sol dista 155×10^6 kilometros aproximadamente de la tierra.

La Estrella más cercana Alfa Centauri está a 25 000 000 000 000 millas, aproximadamente de la Tierra. Podemos expresar este número asi:

$$25\,000\,000\,000\,000 = 25 \times 1\,000\,000\,000\,000$$

Por tanto, podemos decir que Alfa Centauri está a 25×10^{12} millas de la tierra. También se puede decir que está a $2{,}5 \times 10^{13}$ millas de la Tierra.

Para obtener $2,5 \times 10^{13}$ se ha multiplicado y se ha dividido por 10 la expresión 25×10^{12}. Veamos:

$$25 \times 10^{12} = \frac{25 \times 10^{12} \times 10}{10} = \boxed{\frac{25}{10}} \times 10^{12+1} = 2,5 \times 10^{13}$$

Si un número está expresado por un número entre uno y diez multiplicado por una potencia de 10 decimos que el número está expresado en **Notación Científica**. Cuando aprendamos más acerca de los exponentes, podremos expresar cualquier número, grande o pequeño, en Notación Cientifica.

A continuación se dan algunos ejemplos de números expresados en Notación Científica.

a) $3\,000 = 3 \times 10^3$ .... (esta expresado en Notación Científica por que 3 esta entre 1 y 10)

b) $34\,500 = 345 \times 10^2$ .... (no esta expresado en Notación Científica porque 345 no esta entre 1 y 10)

* **Para expresarlo en Notación Científica multiplicamos y dividimos por 100 a la expresión: 345×10^2. Veamos:**

$$345 \times 10^2 = \frac{345 \times 10^2 \times 100}{100} = \boxed{\frac{345}{100}} \times 10^4 = 3,45 \times 10^4$$

c) $1\,840 = 184 \times 10^1$ ..... (no esta expresado en Notación Científica porque 184 no esta entre 1 y 10)

* **Para expresarlo en Notación Cientifica multiplicamos y dividimos por 100 a la expresión: 184×10^1. Veamos:**

$$184 \times 10^1 = \frac{184 \times 10^1 \times 100}{100} = \boxed{\frac{184}{100}} \times 10^3 = 1,84 \times 10^3$$

d) $267\,000 = 267 \times 10^3 = \frac{267 \times 10^3 \times 100}{100} = \boxed{\frac{267}{100}} \times 10^5 = 2,67 \times 10^5$

e) $2000\,000 = 2 \times 10^6$

f) $36 = \frac{36 \times 10}{10} = \boxed{\frac{36}{10}} \times 10^1 = 3,6 \times 10^1$

g) $10 = 1 \times 10^1$

h) $528 = \frac{528 \times 100}{100} = \boxed{\frac{528}{100}} \times 10^2 = 5,28 \times 10^2$

i) $43,7 = \dfrac{43,7 \times 10}{10} = \boxed{\dfrac{43,7}{10}} \times 10 = 4,37 \times 10^{1}$

j) $238,75 = \dfrac{238,75 \times 100}{100} = \boxed{\dfrac{238,75}{100}} \times 10^{2} = 2,3875 \times 10^{2}$

k) $5147,6 = \dfrac{5147,6 \times 1000}{1000} = \boxed{\dfrac{5147,6}{1000}} \times 10^{3} = 5,1476 \times 10^{3}$

l) $32654,47 = \dfrac{32654,47 \times 10000}{10\,000} = \boxed{\dfrac{32\,654,47}{10000}} \times 10^{4} = 3,265447 \times 10^{4}$

m) $20^{3} = 20 \times 20 \times 20 = 8 \times 10^{3}$

n) $3^{4} = 81 = \dfrac{81 \times 10}{10} = \dfrac{81}{10} \times 10^{1} = 8,1 \times 10^{1}$

ñ) $38,2 = \dfrac{38,2 \times 10}{10} = \boxed{\dfrac{38,2}{10}} \times 10 = 3,82 \times 10^{1}$

o) $274,5 = \dfrac{274,5 \times 100}{100} = \boxed{\dfrac{274,5}{100}} \times 100 = 2,745 \times 10^{2}$

p) $350^{2} = (35 \times 10)^{2} = 35^{2} \times 10^{2} = 1\,225 \times 10^{2}$

$$= \dfrac{1\,225 \times 1\,000}{1\,000} \times 10^{2}$$

$$= \boxed{\dfrac{1\,225}{1\,000}} \times 10^{3} \times 10^{2}$$

$$= 1,225 \times 10^{5}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 52

Ejercicio 1 : Para cada fila de la tabla halle el valor de "a"

NUMERO		NUMERO ENTRE 1 Y 10	×	POTENCIA DE DIEZ
a) 58	=	a	×	10^1
b) 672	=	6,72	×	a
c) 8 634	=	a	×	10^3
d) a	=	5,253	×	10^3
e) 3 600	=	a	×	10^3
f) 86 000	=	8,6	×	a
g) a	=	2,432 76	×	10^2
h) 3 772,81	=	a	×	10^3
i) 6 700 000	=	6,7	×	a
j) a	=	4,2	×	10^6

Ejercicio 2 :Represente los números en notación cientifica

a) 300 =	c) 6 000 =	e) 400 000 =	g) 520 000 =
b) 700 =	d) 30 000 =	f) 700 000 =	h) 3 450 000 =

Ejercicio 3 :¿Cuáles de estos productos aparecen escritos en notación cientifica?

a) $5{,}36 \times 10^3$	d) $1{,}23 \times 10^4$	g) $0{,}01 \times 10^5$
b) 47×10^2	e) $3{,}7 \times 10^2$	h) $8{,}375 \times 10^6$
c) $0{,}008\,2 \times 10^5$	f) 10×10^3	i) 47×10^2

Ejercicio 4 : Completa la escritura en notación cientifica de cada uno de los siguientes números, determinando el exponente que falta:

a) 236 = 2,36 × 10	d) 34,5 = 3,45 × 10
b) 6 547 = 6,547 × 10	e) 4 326 = 4,326 × 10
c) 45,67 = 4,567 × 10	f) 853,456 = 8,534 56 × 10

Ejercicio 5 : Expresar cada uno de los siguientes números en notación cientifica:

a) 186 000 =	d) 378 =	g) 12 765 =	j) 30^3 =
b) 456,7 =	e) 470 =	h) 372,6 =	k) 3^7 =
c) 38,79 =	f) 5 246 =	i) 2^5 =	l) 309 000 000 =

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1 Reducir a su forma más simple:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4}}} \bullet \frac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}$$

A) 5/3 **B)** 5/7 **C)** 5/9
D) 15/8 **E)** 25/12

Resolución:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{\boxed{1+\dfrac{1}{4}}}} \bullet \frac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{5/4}} \bullet \frac{\left(\dfrac{1+2}{4}\right)}{\left(\dfrac{4+3}{12}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{4}{5}} \bullet \frac{3 \bullet \cancel{12}}{\cancel{4} \bullet 7} = \frac{1}{\dfrac{9}{5}} \bullet \frac{3 \bullet 3}{7}$$

$$= \frac{5}{\cancel{9}} \bullet \frac{\cancel{9}}{7} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

Rpta.B

Recuerda que:

- $\dfrac{1}{n/m} = \dfrac{m}{n}$
- •• $1+\dfrac{n}{m} = \dfrac{m+n}{m}$

2 ¿Cuánto hay que restarle a $20\frac{3}{4}$ para que sea igual a la suma de $5\frac{1}{4}$ y $9\frac{2}{3}$?

A) $3\frac{1}{5}$ **B)** $2\frac{1}{2}$ **C)** $5\frac{2}{5}$ **D)** $5\frac{5}{6}$ **E)** $3\frac{1}{4}$

Resolución:

Sea: x = la cantidad que tiene que restarle a $20\frac{3}{4}$

- **Del enunciado**; planteamos la ecuación:

$$20\frac{3}{4} - x = 5\frac{1}{4} + 9\frac{2}{3}$$

$$\frac{83}{4} - x = \frac{21}{4} + \frac{29}{3}$$; Damos común denominador en los dos miembros, siendo este 12.

$$\frac{3(83) - 12x}{\cancel{12}} = \frac{21\cdot 3 + 29\cdot 4}{\cancel{12}} \Rightarrow 249 - 12x = 63 + 116$$

$$\cancel{70} = \cancel{12}x \Rightarrow 35 = 6x \Rightarrow \boxed{x = \frac{35}{6}}$$

∴ La cantidad que hay que restarle a $20\frac{3}{4}$ para que sea igual a la suma de $5\frac{1}{4}$ y $9\frac{2}{3}$ es: $\frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ ***Rpta. D***

3 Una fracción a/b; disminuido en sus 3/5; da 3/5. Si a y b no tienen factores comunes, entonces el valor de: "a + b", es:

A) 11 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

Resolución:

- Fracción: $\frac{a}{b}$
- La fracción $\frac{a}{b}$; disminuido en sus $\frac{3}{5} = \boxed{\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{a}{b}\right)}$
- **Del enunciado:**

$$\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{\cancel{5}}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3}{\cancel{5}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{a = 3},\ \boxed{b = 2} \Rightarrow \therefore \boxed{a + b = 5}$$ ***Rpta. C***

¿Cuál de las siguientes fracciones está más cerca a 7/20?

A) 1/5 **B)** 3/10 **C)** 3/20 **D)** 7/19 **E)** 1/3

Resolución:

- Para la resolución de este tipo de ejercicios hay 4 métodos, pues para este ejercicio aplicaremos uno de ellos; veamos:

- Fracción patrón = $\frac{7}{20}$ = $\boxed{0{,}35}$; esta expresión lo comparamos con los resultados de las siguientes fracciones.

a) $\frac{1}{5} = \boxed{0{,}20}$ **b)** $\frac{3}{10} = \boxed{0{,}30}$ **c)** $\frac{3}{20} = \boxed{0{,}15}$ **d)** $\frac{7}{19} = \boxed{0{,}36}$ **e)** $\frac{1}{3} = \boxed{0{,}33}$

- Como se podrá observar 0,36 = 7/19 ; está más cerca a 0,35 = 7/20

∴ **La fracción más cercana a 7/20 es: 7/19** ***Rpta. D***

5 Si un niño pesa 9/10 de Kg más 9/10 de su peso. ¿Cuántos kg pesa el niño?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 100/9 **E)** 90/11

Resolución:

Sea: P = peso de niño en Kg.

- **Del enunciado:** Planteamos la ecuación: $P = \frac{9}{10}\text{ Kg} + \frac{9}{10}P$

$$P = \frac{9\text{ Kg} + 9\text{ P}}{10} \Rightarrow 10\text{ P} = 9\text{ Kg} + 9\text{ P} \Rightarrow \text{P} = 9\text{ Kg}$$

∴ **El niño pesa 9 kilogramos.** ***Rpta. B***

6 ¿Cuánto le falta a 4/11 para ser igual a los 2/3 de los 5/7 de los 4/9 de los 6/11 de 7?

A) 8/9 **B)** 11/9 **C)** 8/3 **D)** 4/9 **E)** 9/11

Resolución:

- Sea: f = lo que le falta a 4/11

- **Del enunciado,** planteamos la ecuación:

$$\frac{4}{11} + f = \frac{2}{\cancel{3}} \bullet \frac{5}{\cancel{7}} \cdot \frac{4}{9} \bullet \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{11} \cdot \cancel{7}$$

$$\frac{4}{11} + f = \frac{80}{99} \Rightarrow f = \frac{80}{99} - \frac{4}{11}$$; damos común denominador.

$$f = \frac{80-36}{99} = \frac{\cancel{44}}{\cancel{99}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \therefore \boxed{f = \frac{4}{9}}$$ **Rpta. D**

7 Qué resultado, se obtiene al simplificar:

$$\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2} + \frac{1}{4+\frac{1}{2}}}$$

A) 2/3 **B)** 67/13 **C)** 45/67

D) 1 **E)** 23/8

Resolución:

- La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{\frac{9}{2}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{2}{9}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{63+4}{18}} = \frac{5 \bullet \overset{9}{\cancel{18}}}{\cancel{2} \bullet 67} = \boxed{\frac{45}{67}}$$ **Rpta. C**

8 Al cajero de una compañía le falta 1/9 del dinero que se le confió. ¿Qué parte de lo que le queda restituirá lo perdido?

A) 3/27 **B)** 2/3 **C)** 1/8 **D)** 8/9 **E)** 3/9

Resolución:

Sea: x = dinero que se le confió

- Le falta = 1/9 x ; $\Rightarrow$ lo que le queda = $x - \frac{1}{9}x = \boxed{\frac{8}{9}x}$

Luego; hallamos, qué parte de lo que le queda sustituirá lo perdido:

$$\text{Parte} = \frac{\text{Lo perdido}}{\text{Lo que le queda}} = \frac{1/9\ x}{8/9\ x} = \boxed{\frac{1}{8}}$$ **Rpta. C**

9 Operar: $\left(\frac{101010}{202020}\right)^2 + \left(\frac{1313}{2626}\right)^2 + \frac{434343}{868686}$

A) 9 **B)** 2 **C)** 4

D) 1 **E)** 16

Dar como respuesta el cuadrado del resultado.

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\left(\frac{\cancel{101010}}{2 \times \cancel{101010}}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{1313}}{2 \times \cancel{1313}}\right)^2 + \frac{\cancel{434343}}{2 \times \cancel{434343}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$$

∴ El cuadrado del resultado es: $1^2 = 1$ ***Rpta. D***

10 Un comerciante vende una vaca por S/. 700. Si le había costado S/. 500. ¿Qué parte representa la ganancia sobre el costo?

A) 2/5 **B)** 3/5 **C)** 4/5 **D)** 1/5 **E)** 6/5

Resolución:

- Precio de costo de la vaca: S/. 500
- Precio de venta de la vaca: S/. 700

Ganancia = Precio Venta - Precio Costo

Ganancia = S/. 700 - S/. 500

∴ Ganancia = S/. 200

Luego: $\text{Parte} = \dfrac{\text{Ganancia}}{\text{Precio Costo}} = \dfrac{\text{S/. }200}{\text{S/. }500} = \boxed{\dfrac{2}{5}}$ ***Rpta. A***

11 Pedro leyó ayer 1/5 de las páginas de un libro. Si hoy ha leído 1/2 de lo que le quedaba por leer y todavía le quedan 80 páginas por leer. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 160 **B)** 280 **C)** 200 **D)** 210 **E)** 240

Resolución:

Sea: x = número de páginas que tiene el libro

- Ayer leyó 1/5 de las páginas del libro = 1/5x
- Quedan por leer = $x - \frac{1}{5}x = \boxed{\frac{4}{5}x}$
- Hoy a leído 1/2 de lo que le quedaba por leer = $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x\right)$

** Quedan por leer = $\boxed{\frac{4}{5}x} - \frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{4}{5}x}\right)$

$$80 \text{ páginas} = \frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{4}{5}x}\right)$$

$$80 = \frac{4}{10}x \Rightarrow \boxed{x = 200}$$

∴ El libro tiene 200 páginas

Rpta. C

12 Hallar el valor de: $0,\widehat{3} + 0,\widehat{33} + 0,\widehat{333}$

A) 0,9 **B)** 1 **C)** 9,9 **D)** $0,\widehat{3}$ **E)** 0,4

Resolución:

Sabemos que: $0,\widehat{3} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$; $0,\widehat{33} = \frac{33}{99} = \boxed{\frac{1}{3}}$; $0,\widehat{333} = \frac{333}{999} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Luego: $0,\widehat{3} + 0,\widehat{33} + 0,\widehat{333} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} = \boxed{1}$ ***Rpta. B***

13 La diferencia de los números: 0,43737....... y 0,21515......... ; es

A) 1/9 **B)** 2/9 **C)** 3/9 **D)** 4/9 **E)** 5/9

Resolución:

Sabemos que: $0,43737...... = 0,4\widehat{37} = \frac{437-4}{990} = \boxed{\frac{433}{990}}$

$0,21515...... = 0,2\widehat{15} = \frac{215-2}{990} = \boxed{\frac{213}{990}}$

Luego: $\frac{433}{990} - \frac{213}{990} = \frac{220}{990} = \boxed{\frac{2}{9}}$ ***Rpta. B***

14 ¿Cuál es el recíproco de: 0,24?

A) 25/6 **B)** 2/3 **C)** 1/7 **D)** 2,5 **E)** 1/4

Resolución:

- $0,24 = \frac{\cancel{24}}{\cancel{100}} = \boxed{\frac{6}{25}}$

Reciproco de $\frac{6}{25}$; es: $\boxed{\frac{25}{6}}$ ***Rpta. A***

15 Hallar una fracción equivalente a 0,23 [43] y tal que la suma de sus términos sea 1 222. Dar la diferencia de sus términos.

A) 758 **B)** 859 **C)** 909 **D)** 708 **E)** 808

Resolución:

- $0,23\ [43] = 0,23\widehat{43} = \frac{2343-23}{9900} = \frac{\cancel{2320}}{\cancel{9900}} = \frac{116}{495}$

- Fracción equivalente a $\frac{116}{495} = \frac{116\ K}{495\ K}$

- **Del enunciado:** $116\,K + 495\,K = 1\,222$

$$611\,K = 1\,222 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

Luego, hallamos la diferencia de sus términos:

$$495\,K - 116\,K = 379\,K = 379 \times 2 = 758$$

$\therefore$ La diferencia de sus términos de la fracción equivalente: $\dfrac{116\,K}{495\,K}$; es: 758

Rpta. A

16
Hallar el valor de "E": $E = \left(\sqrt{0{,}6\widehat{1}} : \sqrt{0{,}\widehat{18}}\right)$

A) $1{,}8\widehat{3}$ **B)** 1,5 **C)** 1,75 **D)** $1{,}\widehat{6}$ **E)** 2

Resolución:

$0{,}6\widehat{1} = \dfrac{61-6}{90} = \dfrac{55}{90} = \dfrac{11}{18}$	$0{,}\widehat{18} = \dfrac{18}{99} = \dfrac{2}{11}$

Luego:

$$E = \left(\sqrt{\frac{11}{18}} : \sqrt{\frac{2}{11}}\right)$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(\sqrt{11}\right)^2}{\sqrt{18 \cdot 2}} = \frac{11}{\sqrt{36}} = \frac{11}{6}$$

$$E = \frac{11}{6} = 1{,}8333\ldots\ldots \quad \therefore \boxed{E = 1{,}8\widehat{3}}$$

Rpta. A

Recuerda que:

- $\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

6. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

6.1 VARIABLES: Los símbolos como: d; v y t; que aparecen en la fórmula:

d = v . t ➠ **(distancia = velocidad × tiempo)**

se llaman variables.

Una **Variable** es un símbolo que se emplea para denotar un elemento cualquiera de un conjunto dado. El conjunto se llama el **Dominio** de la variable. Cada elemento del dominio se llama un **Valor** de la variable.

En las fórmulas como: **d = v . t**

El dominio de cada variable es el conjunto de todos los números reales para los cuales la fórmula tiene sentido.

Las variables pueden utilizarse para dar expresiones acerca de los números, como se indica a continuación:

EXPRESIÓN	EXPRESION MEDIANTE EL USO DE VARIABLE
La suma de dos números	x + y
Un número dividido por tres	z/3
El producto de dos números consecutivos	w . (w + 1)

El dominio de cada una de las variables indicadas anteriormente "x", "y" y "z", es el conjunto de todos los números reales; sin embargo, el dominio de "w" es el conjunto de todos los enteros.

Si damos valores a las variables de las expresiones anteriores, obtenemos números particulares.

Por ejemplo si: "x" tiene el valor de 2, "y" el valor de 7 ; entonces: "x + y" tiene el valor de 9. En el lenguaje de la matemática, expresamos lo anterior así:

Si: $x = 2$ e $y = 7$; entonces: $x + y = 9$.

Análogamente;

Si: $z = 11$;	entonces: $z/3 = 11/3$;	
Si: $w = 9$;	entonces: $w.(w + 1) = 9.10$,	o sea; 90.

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Si unos cuadernos se venden a 2 soles cada uno. Entonces "2n" representa el costo de "n" cuadernos. ¿Cuál es el dominio de la variable "n"?

Resolución:

Como "n" representa el número de cuadernos, los valores que toma "n" son números enteros positivos y no enteros negativos, ya que no podría decir: "he comprado menos ocho cuadernos".

El dominio de la variable "n" o los valores que puede tomar "n" son los enteros positivos.

Ejemplo 2: Si la gasolina de alto octanaje se vende a 3 soles el galón, entonces, "3x" es el costo de "x" galones de esa gasolina. ¿Cuál es el dominio de la variable "x" ?

Resolución:

Como "x" representa el número de galones de gasolina, los valores que toma "x" son números enteros positivos y no enteros negativos, ya que no se podría decir: "he comprado menos doce galones de gasolina".

El dominio de la variable "x" o los valores que puede tomar "x" son los enteros positivos.

Ejemplo 3: ¿Para qué dominio de la variable "n" será la expresión "$\frac{3}{5}n$ " igual a un número entero?

Resolución:

Como la expresión "$\frac{3}{5}n$ " ; tiene como denominador a 5, entonces los valores que toma "n" son todos los múltiplos de 5, siendo estos múltiplos de 5 números enteros positivos o negativos, veamos:

Si: $n = 5$ ▶ $\frac{3}{5}n = \frac{3}{5} \times 5 = 3$	Si: $n = -5$ ▶ $\frac{3}{5}n = \frac{3}{5} \times (-5) = -3$
Si: $n = 10$ ▶ $\frac{3}{5}n = \frac{3}{5} \times 10 = 6$	Si: $n = -10$ ▶ $\frac{3}{5}n = \frac{3}{5} \times (-10) = -6$

Dominio de la Variable "n" son todos los enteros múltiplos 5 (Positivos y Negativos).

Ejemplo 4: Utilizar variables para dar una expresión matemática a cada una de las frases siguientes:

a)	Un número aumentado en nueve.	**f)**	Un número dividido por cinco.
b)	La suma de tres números.	**g)**	El entero que le sigue a N.
c)	El producto de dos números.	**h)**	El entero que precede a N.
d)	Un tercio de un número.	**i)**	Cinco veces el número N.
e)	Un número disminuido en seis	**j)**	El cuádrupo de un número.

Resolución:

a) $x + 9$ b) $a + b + c$ c) $x . y$ d) $\frac{1}{3}n$ e) $x - 6$

f) $\frac{y}{5}$ g) $N + 1$ h) $N - 1$ i) $5N$ j) $4x$

6.1.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se denomina expresión algebraica a aquella en la cual las variables y constantes están relacionadas por las operaciones de **Adición, Sustracción, Multiplicación, división, etc.**

Son expresiones algebraicas las siguientes: $5x$; $3x^2 : 2x - y$; $4xy + z$; $5x\sqrt{z}$

6.1.2 TÉRMINO ALGEBRAICO:

Término algebraico se llama a cada una de las partes componentes de la expresión algebraica y que aparecen unidas con otros por los signos (+) y (-).

Ejemplo 1 : Dada la expresión: $8x - 3xy + 5$

En esta expresión algebraica existen tres términos algebraicos:

"8x" ; "-3xy" y "+5"

Donde:

"8x" es el primer término, siendo 8x el producto de la constante 8 por la variable x.

"-3xy" es el segundo témino, siendo -3xy el producto de la constante -3 por la variable xy.

"+5" es el tercer término, siendo +5 una constante.

Ejemplo 2: Dada la expresión: $4ab + 3bc - ac - 7$

En esta expresión algebraica existen cuatro términos algebraicos siendo estos:

"4ab" ; "+3bc" ; "-ac" y "-7"

Nota: *Si algún término no está precedido por ningún signo se supone que tiene el signo +.*

Ejemplo: $3x = +3x$

6.1.3 ELEMENTOS DE UN TÉRMINO ALGEBRAICO

En todo término algebraico se admiten elementos; a saber:

1º **El Signo:** Que puede ser positivo (+) ó negativo (-).

2º **El Coeficiente:** Es el número que precede a la parte literal e indica las veces que ésta se repite como sumando, incluso el coeficiente puede estar representado por una letra.

Asi: En $5x^2$; el coeficiente es 5, donde: $5x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2$

En $\frac{5}{8}y$; la fracción $\frac{5}{8}$ es el coeficiente de "y".

En 0,6z ; el decimal 0,6 es el coeficiente de z.

En ab^3 ; la "a" es coeficiente de b^3.

Nota: *Cuándo un término no lleva coeficiente se sobreentiende que éste es la unidad, así pues:* $bc = 1bc$

3º **Parte Literal:** Es la constituida por todas las letras o variables del término.

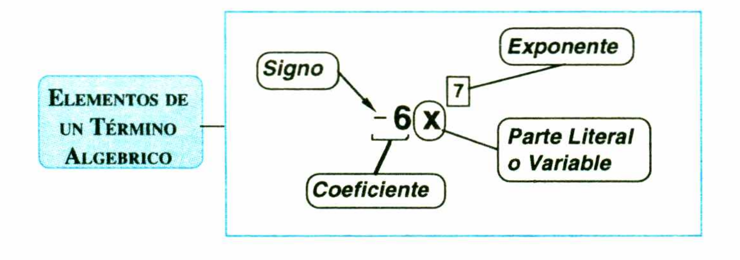
Asi: En $3x^2$, la parte literal está constituida por "x".

En $7xy^3$, la parte literal esta constituida por "x" y "y".

4º **Exponente:** Son los números o letras escritas en la parte superior derecha de cada letra o variable e indica las veces que ésta se repite como factor, el exponente 1 se sobreentiende.

Así: En $3x^2$; el exponente de "x" es 2 $\rightarrow$ $3x^2 = 3x.x$

En $5xy^3$; el exponente de "x" es 1, el de "y" es 3 $\rightarrow$ $5xy^3 = 5x \cdot y \cdot y \cdot y$



6.1.4 TÉRMINOS SEMEJANTES

Se llaman términos semejantes de una expresión algebraica a aquellos que tienen la misma parte literal, ésta es; las mismas letras con los mismos exponentes. Difieren, entre sí en los coeficientes.

Ejemplos:

a) $3xyz^2$; $-2xyz^2$; $-6xyz^2$ .... **Son términos semejantes**

b) $2a^2b$; $-3a^2b$; $7a^2b$; $-a^2b$ .... **Son términos semejantes**

c) np^3 ; np^3 ; $-np^3$ .... **Son términos semejantes**

d) $-3a^3b$; $6ab^3$ .... **No son términos semejantes ;** porque a^3b es diferente de ab^3

6.1.5 CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las expresiones algebraicas se clasifican en **Monomios y Polinomios**.

I) **Monomios**: Es la expresión algebraica que consta de un sólo término. Ejemplos:

$3x$; $-7x^2y$; xy^3 ; $0{,}7ab$; x^2yz^3

II) **Polinomio**: Es la expresión algebraica de dos o más términos. Ejemplos:

$4x - 3y$; $5x^2 - 3y + xy$; $3xy + 5y - 3x + 6$

* **Binomio**: Es la expresion algebraica que consta de dos términos:

  Son binomios:

  $3x^2 - y$; $8x^2y + y$; $2x + 3$; $5x^2 + 6$

* **Trinomio**: Es la expresión algebraica que consta de tres términos:

  Son trinomios:

  $3x^2 - 7x + z$; $2a^2 - 3ab + b^2$; $7x^3 - 2x^2 + 6$

6.1.6 GRADO DE UNA VARIABLE

El grado de una variable es el exponente de dicha variable.

Ejemplo: En el término: $7x^2y^3$

- La variable "x" es de grado 2, o segundo grado.
- La variable "y" es de grado 3, o tercer grado.

6.1.7 GRADO DE UN MONOMIO

El grado de un monomio puede ser relativo o absoluto.

* **El Grado Relativo** o con respecto a una letra o variable está dado por el exponente de dicha letra.

  Así: $9x^3y^2$ .... es de tercer grado con respecto a "x" ; y de segundo grado con respecto a "y".

  También se sabe decir:

  Grado Relativo con respecto a "x" es 3 y **Grado Relativo** con respecto a "y" es 2.

* **Grado Absoluto** de un término algebraico está dado por la suma de los exponentes de la parte literal.

  Así: El grado absoluto de: $9x^3y^2$ es: $3 + 2 = 5$

  El grado absoluto de: $5x^8y^5z^{-6}$ es: $8 + 5 - 6 = 7$

6.1.8 GRADO DE UN POLINOMIO

El grado de un Polinomio puede ser relativo y absoluto.

* **El Grado Relativo** o con respecto a una letra es igual al mayor exponente de dicha letra o variable en el polinomio.

  Así: Dado el polinomio: $3x^2y^3 - 5x^3y^4 + 7x^5y^3$

  - Grado relativo con respecto a "x" es 5.
  - Grado relativo con respecto a "y" es 4.

Otro ejemplo: Dado el polinomio: $5xyz^3 + 8x^2y^3z - 2x^3y^4z^2$

  - Grado relativo con respecto a "x" es: 3.
  - Grado relativo con respecto a "y" es: 4.
  - Grado relativo con repecto a "z" es: 3.

* **El Grado Absoluto** de un Polinomio es igual al grado de su término de mayor grado absoluto.

  Así: Dado el polinomio:

  $3x^2y^3 - 5x^3y^4 + 7x^5y^3$

  Grado absoluto del monomio: $5 + 3 = 8$

  Grado absoluto del monomio $= 3 + 4 = 7$

  Grado absoluto del monomio $= 2 + 3 = 5$

  Luego; el grado absoluto del polinomio: $3x^2y^3 - 5x^3y^4 + 7x^5y^3$ es de octavo grado o de grado 8.

  Otro ejemplo: Dado el polinomio:

$6xy^2z - 5x^2y + 10xy^4z^2 - 7xy^5$

- $-7xy^5$: G.A. = 1 + 5 = 6
- $10xy^4z^2$: G.A. = 1 + 4 + 2 = 7
- $-5x^2y$: G.A. = 2 + 1 = 3
- $6xy^2z$: G.A. = 1 + 2 + 1 = 4

Luego; el polinomio: $6xy^2z - 5x^2y + 10xy^4z^2 - 7xy^5$; tiene por grado absoluto 7 ó el polinomio es de séptimo o grado.

6.1.9 VALOR NUMÉRICO

Hallar el valor numérico de un monomio o de un polinomio es reemplazar cada letra por un valor correspondiente a dicha letra y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo 1 : Cuál es el valor numérico de 5ab; si: a = 3 ; b = 4.

Resolución:

Reemplazamos el valor de a = 3 y b = 4, en la expresión:

$5ab = 5 \times 3 \times 4 = 60 \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{5ab = 60}$ ***Rpta.***

La aplicación del valor numérico tiene un campo amplísimo en el desarrollo de toda clase de fórmulas aritméticas, geométricas, físicas, químicas, etc.

* **Orden de Operaciones**

Es de suma importancia el orden de las operaciones en el curso, para el desarrollo de los ejercicios o problemas.

Si en un ejercicio entraran distintas operaciones, el orden de las operaciones que se ha de seguir es el siguiente:

1º Se desarrollan las potencias o se extraen las raíces si las hay.
2º Se efectúan las multiplicaciones o divisiones indicadas.
3º Se hacen las sumas o restas de los términos.

Ejemplo 2 : Hallar el valor numérico de: $2\sqrt{x} + bx : a^2$; siendo: a = 2 ; b = 3 y x = 16.

Resolución:

Reemplazando los valores de a,b y x, en la expresión dada, obteniendo:

$$2\sqrt{x} + bx : a^2 = 2\sqrt{16} + 3(16) : 2^2 =$$

Según el orden de operaciones:

1º Potencias y raíces: $2(4) + 3(16) : 4 =$

2º Multiplicación y división: $8 + 48 : 4 = 8 + 12 =$

3º Suma: $8 + 12 = 20$

Luego: $2\sqrt{x} + bx : a^2 = 20$ ***Rpta.***

Ejemplo 3: Hallar el valor numérico del polinomio: $3x^2 + 5x - 6$; cuando $x = -2$

Resolución:

Reemplazando el valor de "x" en la expresión dada, obtenemos:

$3x^2 + 5x - 6 = 3(-2)^2 + 5(-2) - 6$

$= 3(4) - 10 - 6 = 12 - 10 - 6 = -4 \quad \therefore \quad 3x^2 + 5x - 6 = -4$ ***Rpta.***

Ejemplo 4: Hallar el valor numérico de la expresión: $\dfrac{2x^3 - 6}{5x^2}$ Si: $x = 3$

Resolución:

Reemplazamos el valor de "x" en la expresión dada y obtenemos:

$$\frac{2x^3 - 6}{5x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{5(3)^2} = \frac{2(27) - 6}{5(9)} = \frac{54 - 6}{45} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15}$$

$$\therefore \frac{2x^3 - 6}{5x^2} = \frac{16}{15}$$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 53

Ejercicio 1 : Identifica el coeficiente y la parte literal de cada uno de los monomios siguientes:

a) $3x^8y$ ⇒ ......;	d) $\frac{2}{5}z^3y^2$ ⇒ ......;	g) $125x^3y^4z$ ⇒ ......; ......
b) $-6z^2y$ ⇒ ......;	e) $-0{,}2ab^4c^5$ ⇒ ......;	h) $-\frac{2}{7}a^3bc^4$ ⇒ ......; ......
c) $9x^7y^9$ ⇒ ......;	f) $0{,}028x^3y^2z$ ⇒ ......;	i) $-0{,}83\,xy^4z^5$ ⇒ ......; ......

Ejercicio 2 : Identifica los términos semejantes en cada uno de los polinomios siguientes:

a) $2xy - 3ab^2 + 5xy + 6ab^2$	e) $5x^2a - 2xz^2 + 3ac - 3x^2z + 7xz^2 - ac$
b) $x^4y + 2xy^4 - 3x^4y + 5xy^4 - x^4y$	f) $\frac{2}{7}xz^3 - 0{,}2zy^3 + 0{,}8xz^3 + 9zy^3$
c) $ab^2 - 2xy^2 + 3ab^2 + xy^2 - 7ab^2$	g) $10x^2y^3z - 6x^2y^2z - 8x^2y^3z + 3x^2y^2z$
d) $8xy^3 - 5a^2c - 11xy^3 + 16a^2c$	h) $3a^2b^2 - 3a^3b^2 - 5z^3 - 6a^3b^2 + 9z^3 - 4a^2b^3$

Ejercicio 3 : ¿De qué grado es cada uno de los monomios siguientes?

a) $4x^2y^3$ ⇒	e) $\frac{3}{8}x^2y^6$ ⇒	i) $2{,}4\,x^4y^6z$ ⇒ ....
b) $-12a^3b^4$ ⇒	f) $\frac{5}{9}x^7y^4z^2$ ⇒	j) $4\,xy^8$ ⇒ ....
c) $6x^4y^2z$ ⇒	g) $0{,}6x^2yz^4$ ⇒	k) $-6\,x^3y^3z^6$ ⇒ ....
d) $-8x^3yz^6$ ⇒	h) $0{,}83ab^3c^2$ ⇒	l) $25\,xy^4z$ ⇒ ....

Ejercicio 4 : Halla el grado relativo con respecto a la variable x, y, z, de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $3x^2y - 5xy^3 + \frac{2}{9}x^3y^4$ — $G.R_{(x)} =$; $G.R_{(y)} =$; $G.R_{(z)} =$	b) $7x^3z - 4x^2z^2 + 6xz^7$ — $G.R_{(x)} =$; $G.R_{(y)} =$; $G.R_{(z)} =$

c) $\frac{5}{3}xy^3 + 0{,}2x^4y^6 - 7x^2y^8$ — G.R$_{(x)}$ = ; G.R$_{(y)}$ = ; G.R$_{(z)}$ =	e) $6x^2y^3 - \frac{5}{4}xy^2z^6 + 0{,}3x^3yz^5$ — G.R$_{(x)}$ = ; G.R$_{(y)}$ = ; G.R$_{(z)}$ =
d) $7xy^3 - 3x^2y^3 + 5xy^4 - 2x^3y^2$ — G.R$_{(x)}$ = ; G.R$_{(y)}$ = ; G.R$_{(z)}$ =	f) $2x^3yz + 8x^2y^2z - 6xy^2z^3$ — G.R$_{(x)}$ = ; G.R$_{(y)}$ = ; G.R$_{(z)}$ =

Ejercicio 5 : Halla el grado absoluto de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $2x^3y + 3x^4y^2 - 0{,}4x^2y^6 + \frac{2}{7}x^3y^4$ ⇒ G.A. (……)

b) $x^4yz^4 - 5x^3y^2z + \frac{3}{4}xyz^8 - 0{,}2x^2y^3z^3$ ⇒ G.A. (……)

c) $6x^2y - 8x^3y^4 + 3x^6y^8 - 4x^7y^6$ ⇒ G.A. (……)

d) $2xyz^6 - 3xy^2z^3 + 7x^2yz^4 - \frac{2}{3}xyz^8$ ⇒ G.A. (……)

e) $x^4yz^4 - 5x^3y^2z + \frac{3}{7}xy^2z^6 - 0{,}8x^2y^2z^3$ ⇒ G.A. (……)

f) $x^3y^2z - 7x^3yz^2 + 3xyz^8 - 0{,}7\,x^2z^3y$ ⇒ G.A. (……)

Ejercicio 6 : Halla el valor numérico del polinomio: $5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; cuando:

a) $x = 1$ ⇒ $5(1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 1 = 5$	g) $x = -1$ ⇒ $5(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = -9$
b) $x = -2$ ⇒	h) $x = -3$ ⇒
c) $x = \frac{1}{2}$ ⇒	i) $x = 4$ ⇒
d) $x = 2$ ⇒	j) $x = \frac{-1}{2}$ ⇒
e) $x = 3$ ⇒	k) $x = 5$ ⇒
f) $x = \frac{1}{5}$ ⇒	l) $x = 6$ ⇒

Ejercicio 7 : Sabiendo que: $x = 2$; $y = -1$; $a = 2$; $c = -2$; halla el valor numérico de cada polinomio siguiente:

a) $3xy^2 + 8x - 7 = 3(2)(-1)^2 + 8(2) - 7 = 15$	d) $x^2y^3 - 7y + xy =$
b) $3ac^2 - cy =$	e) $5c^3 - 3xy + y^2 =$
c) $-3x + 5y + a^2 - c^2 =$	f) $5ac - 3ac^2 + xy^2 =$

g) $\dfrac{4x^3-3ac}{2y^2} = \dfrac{4(2)^3-3(2)(-2)}{2(-1)^2} = 22$

h) $6a - 3c^2 + 5xy =$

i) $4xy^2 - 5yx^2 + ac^2 =$

j) $5ax - 3c^2 + 2xy =$

k) $\dfrac{xy^2 + 3ac^2}{4yc} =$

l) $\dfrac{x^2y^4 + 8xy}{-4xy^2} =$

Ejercicio 8: Halla el valor numérico de cada polinomio siguiente:

Si: $x = 4$; $y = 81$; $z = 64$; $a = 3$; $b = -2$ y $c = 4$

a) $3\sqrt{x} + 8ab - 2c + b = 3\sqrt{4} + 8 \cdot 3(-2) - 2(4) + (-2)$

$= 3(2) - 48 - 8 - 2 = \boxed{-52}$

b) $\sqrt{y} + 3z + c^2 - ac^3 + b^2 =$

c) $2\sqrt{zy} - \dfrac{8abc}{\sqrt{y}} + \dfrac{3ac^2}{b^4} =$

d) $2\sqrt{z} - 7b^2c + 6ab + c =$

e) $\sqrt{xy} - 2\sqrt{xz} + ab^2 + c =$

f) $3\sqrt{xc} - \dfrac{\sqrt{z}}{bx} + \dfrac{5ab^2}{c} =$

* ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS.

- Para sumar o restar dos o más monomios semejantes se suman o restan sus coeficientes y al resultado se le pone la misma parte literal de los monomios semejantes dados.

Ejemplos: Sumar:

a) $3xy^2 + 7xy^2 - 2xy^2 = (3 + 7 - 2)\,xy^2 = 8xy^2$

b) $5xyz^3 + 8xyz^3 = (5 + 8)\,xyz^3 = 13xyz^3$

c) $ax^ny^m + bx^ny^m - cx^ny^m = (a + b - c)\,x^ny^m$

* Para sumar o restar dos o más monomios **No Semejantes**, sólo se indica la suma o diferencia de ellos.

Ejemplos: Sumar:

a) $3xy + 3xz = 3xy + 3xz$

b) $7ab^2 + 8ab - 5b^2a = 7ab^2 + 8ab - 5b^2a$

Reducción de un polinomio que contenga términos semejantes de diversas clases.

Para reducir un polinomio que contiene términos semejantes se indica cada clase con marcas distintas y se reduce separadamente cada una de ellas.

Ejemplo 1: Reducir el polinomio: $4x^2 - 8x + 6x^2 + 5x - 3x^2 + 7x$

Resolución:

En el polinomio dado, marcamos los términos semejantes de la manera siguiente:

$$4x^2 - 8x + 6x^2 + 5x - 3x^2 + 7x = (4x^2 + 6x^2 - 3x^2) + (5x + 7x - 8x) = (4 + 6 - 3)x^2 + (5 + 7 - 8)x$$

$$4x^2 - 8x + 6x^2 + 5x - 3x^2 + 7x = 7x^2 + 4x$$

Ejemplo 2: Reducir el polinomio: $13a^2 - 5b^2 + 13ab + 8a^2 - 10b^2 - 2ab + 6b^2 - 8ab$

Resolución:

$$13a^2 - 5b^2 + 13ab + 8a^2 - 10b^2 - 2ab + 6b^2 - 8ab = (13 + 8)a^2 + (-5 - 10 + 6)b^2 + (13 - 2 - 8)ab$$

$$= 21a^2 + (-9)b^2 + 3ab$$

$$13a^2 - 5b^2 + 13ab + 8a^2 - 10b^2 - 2ab + 6b^2 - 8ab = 21a^2 - 9b^2 + 3ab$$

Ejemplo 3: Reducir el polinomio:

$$x^2y^3 - 10x^3y^2 + 6xy^2 + 5x^2y^3 - 8x^3y^2 - 12xy + 7x^3y^2 - 11xy^2 + 7xy$$

Resolución:

$$1x^2y^3 - 10x^3y^2 + 6xy^2 + 5x^2y^3 - 8x^3y^2 - 12xy + 7x^3y^2 - 11xy^2 + 7xy$$

$$(1 + 5)\,x^2y^3 + (-10 - 8 + 7)\,x^3y^2 + (6 - 11)\,xy^2 + (-12 + 7)\,xy$$

$$x^2y^3 - 10x^3y^2 + 6xy^2 + 5x^2y^3 - 8x^3y^2 - 12xy + 7x^3y^2 - 11xy^2 + 7xy = 6x^2y^3 - 11x^3y^2 - 5xy^2 - 5xy$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 54

Ejercicio 1 : Halla el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

a) $x^3 + 5x^3 =$	**e)** $-3ab - 5ab + 4ab =$	**i)** $7xy^4 + 2xy^4 - 6xy^4 =$ ....
b) $3x^2 + 8x^2 =$	**f)** $7x^2y + 3x^2y - 8x^2y =$	**j)** $8yz^3 - 3yz^3 - 4yz^3 =$ ....
c) $2xyz + 9xyz =$.........	**g)** $5a^n - 4a^n + 11a^n =$	**k)** $xy^n - 3xy^n + 5xy^n =$ ....
d) $11ac - 7ac =$	**h)** $13x^m + 7x^m - 16x^m =$	**l)** $ax^q - 6ax^q - 3ax^q =$ ....

Ejercicio 2 : Reducir los términos semejantes en cada uno de los polinomios siguientes:

a) $6x + 7a - 10x + 3x - 8a =$	e) $xy - 5x^2 + 8y^2 + 11xy - 25x^2 - 30y^2 =$ ....
b) $5a + 3y + 9y - 11a + 8y =$	f) $4b^2 - 6xyz - 2a^2 + 3b^2 + 8xyz - a^2 =$ ....
c) $15ay + 13a - 7z + 6a - 13ay + 4z =$	g) $12x^3 + 5xy^2z - 8xyz^3 - 7xy^2z - 6x^3 + 2xyz^3 =$...
d) $23mx + 18ny + 5mx - 7ny + 4mx - 20ny =$	h) $3ax^n - 5xa^n + a^2x - 2ax^n + 8xa^n - 4a^2x =$ ......

Ejercicio 3 : Reducir los términos semejantes en cada uno de los polinomios siguientes:

a) $8y^2 - 5x^2 + xy - 25x^2 - 30y^2 + 11xy + 14x^2 + 26y^2 + 6x^2 + 13xy =$ ....

b) $2ab^3 - 3a^2b^2 + 9a^2b - 8a^3 - 10a^2b^2 - 9a^2b + 15a^3 - 7ab^3 + 13a^2b^2 =$ ....

c) $-5x^n + 8y^n - 10z^n + 15x^n - 16y^n + 20z^n + 48x^n - 15z^n - 14x^n + 12y^n =$ ....

d) $2xy - 3x^2y + 5xy^2 + 8x^2y - 4xy^2 - 6xy - 4xy^2 + 16xy - 6x^2y =$ ....

e) $6xyz^3 - 3xy^3z - 2x^3yz + 7x^3yz - 9xy^3z - 12xyz^3 =$ ....

* **Multiplicación de Monomios**.

Para hallar el producto de dos monomios se multiplican los coeficientes de ellos. A continuación de este producto se escriben en orden alfabético, todas las letras de los monomios dados poniendo a cada una un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores.

Ejemplo 1 : Hallar el producto de: $3x^3$ por $2x^2$

Resolución:

$$3x^3 \cdot 2x^2 = (3 \cdot 2)(x^3 \cdot x^2)$$

Multiplicamos las partes literales

Multiplicamos los coeficientes

$$3x^3 \cdot 2x^2 = (6)(x^{3+2}) = 6x^5 \quad \therefore \quad 3x^3 \cdot 2x^2 = 6x^5$$

Ejemplo 2 : Hallar el producto de: $8x^4$ por $-9x^2y^3$

Resolución:

$$8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = (8(-9))(x^4 \cdot x^2 \cdot y^3)$$

$$8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = -72x^{4+2} \cdot y^3 = -72x^6y^3$$

Recuerda que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\therefore \quad 8x^4 \cdot (-9x^2y^3) = -72x^6y^3$$

Ejemplo 3 : Hallar el producto de: $-5b^3c^2x^2$ por $-3a^3b^4cy^2$

Resolución:

$$(-5b^3c^2x^2) \cdot (-3a^3b^4cy^2) = [(-5)(-3)][a^3 . b^3 . b^4 . c^2 . c. x^2 . y^2]$$

$$(-5b^3c^2x^2) \cdot (-3a^3b^4cy^2) = 15a^3 . b^{3+4} . c^{2+1} . x^2y^2$$

$$\therefore \quad (-5b^3c^2x^2) \cdot (-3a^3b^4cy^2) = 15a^3b^7c^3x^2y^2$$

Ejemplo 4 : Hallar el producto de: $7a^3b^4c^2x^3$por $11a^2b^3x^4y^2$

Resolución:

$$(7a^3b^4c^2x^3) \cdot (11a^2b^3x^4y^2) = (7 . 11)(a^3 . a^2 . b^4 . b^3 . c^2 . x^3 . x^4 . y^2)$$

$$(7a^3b^4c^2x^3) \cdot (11a^2b^3x^4y^2) = 77a^5b^7c^2x^7y^2$$

$$\therefore \quad (7a^3b^4c^2x^3) \cdot (11a^2b^3x^4y^2) = 77a^5b^7c^2x^7y^2$$

* **Producto de más de dos monomios.**

Para obtener el producto de más de dos monomios se aplica la propiedad asociativa: se halla el producto de los dos primeros y luego el producto de este resultado con el tercer factor y asísucesivamente, hasta el último.

Ejemplo 1 : Hallar el producto de: $8x^2$ por $5x^4$ por $3x^5$

Resolución:

$$8x^2 \,.\, 5x^4 \,.\, 3x^5 = (8x^2 \,.\, 5x^4) \,.\, 3x^5$$

$$8x^2 \,.\, 5x^4 \,.\, 3x^5 = (40x^{2+4}) \,.\, 3x^5 = 40x^6 \,.\, 3x^5 = 40.3x^{6+5}$$

$$\therefore \quad 8x^2 \,.\, 5x^4 \,.\, 3x^5 = 120x^{11}$$

Ejemplo 2 : Hallar el producto de: $(3ab^2c)\,(-4a^3b^2)\,(5cd^3)$

Resolución:

$$(3ab^2c)\,(-4a^3b^2)\,(5cd^3) = [\,3.(-4).5\,]\,[\,a.a^3.b^2.b^2.c.c.d^3]$$

$$(3ab^2c)\,(-4a^3b^2)\,(5cd^3) = -60a^{1+3} \,.\, b^{2+2} \,.\, c^{1+1} \,.\, d^3$$

$$\therefore \quad (3ab^2c)\,(-4a^3b^2)\,(5cd^3) = -60a^4 \,.\, b^4 \,.\, c^2 \,.\, d^3$$

Ejemplo 3 : Hallar el producto de: $(-5a^3bc^3)\,(-2abc^3)\,(3ac^4)$

Resolución:

$$(-5a^3bc^3)\,(-2abc^3)\,(3ac^4) = [\,(-5)\,(-2)\,(3)\,]\,\,[\,a^3.a.a.b.b.c^3.c^3.c^4\,]$$

$$(-5a^3bc^3)\,(-2abc^3)\,(3ac^4) = 30a^{3+1+1} \,.\, b^{1+1} \,.\, c^{3+3+4}$$

$$\therefore \quad (-5a^3bc^3)\,(-2abc^3)\,(3ac^4) = 30a^5b^2c^{10}$$

Nota:

* *El producto tendrá signo positivo si el número de factores negativos es par o sea:*

$(-a)\,(-b) = +ab$; $(-m)\,(-n)\,(-p)\,(-q) = +mnpq$

* *El producto tendrá signo negativo si el número de factores negativos es impar o sea:*

$(-a)\,(-b)\,(-c) = -abc$; $(-p)\,(-q)\,(-t)\,(-r)\,(-s) = -pqtrs$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 55

Ejercicio 1 : Halla el producto de cada operación:

a) $x^2 . x^5 =$	**g)** $(5x^3y^2w)\ (18x^3w^4y) =$ ....
b) $x^3 . x^8 =$	**h)** $(9ab^2m)\ (-3ab^3m) =$ ....
c) $(3x)\ (7x^2) =$	**i)** $(7a^4b^2yc)\ (-7aby^3c^2) =$ ....
d) $(-6a^3b)\ (9a^2b^4) =$	**j)** $(8m^3n^2y)\ (-3mn^4z^5) =$ ....
e) $(-5a^3bc^2)\ (-8a^2b^3) =$	**k)** $(-12a^5m^2y)\ (-6ab^3my^4) =$ ....
f) $(-3x^2yz^4)\ (-7xy^3z^6) =$	**l)** $(16x^3y^2)\ (9x^4y^6) =$ ....

Ejercicio 2 : Halla el producto de cada operación:

a) $(2a^3)\ (5a^2b)\ (a^2b^3) =$	**e)** $(-3b^2m^4)\ (7m^2n)\ (-5a^3m) =$ ....
b) $(4am^2)\ (-6a^2m)\ (-2a^2m^2) =$	**f)** $(12x^4y\ z^3)\ (-8y^3xz^2)\ (2xy) =$ ....
c) $(8a^3bm)\ (-9a^2b^2)\ (a^3m^2n)\ (6bn^3) =$	**g)** $(6x^nz)\ (8a^3x^2)\ (-4a^2x^3)\ (-3x^n) =$ ....
d) $(9a^3b^4)\ (-7a^4m^7)\ (-11m^2n)\ (5x^3b) =$	**h)** $(-11x^3y)\ (-7xz^4)\ (2w^3y^4)\ (-w^2z^4) =$ ....

Ejercicio 3 : En cada espacio libre, escribe el factor que falta:

a) $3x .$ ☐ $= 15x^3$	**f)** $18a^3bc^2d^4.$ ☐ $= 54a^5b^3c^3d^6$
b) $2x^2 .$ ☐ $= 6x^4$	**g)** $45x^4y^2 .$ ☐ $= 225x^{10}y^8$
c) $4xy^2 .$ ☐ $= 12x^3y^6$	**h)** $18x^4 .$ ☐ $= 72x^4y^2$
d) $-7a^2x^4 .$ ☐ $= -21a^3x^6$	**i)** $-13x^3yz^6 .$ ☐ $= -169x^8y^5z^8$
e) $25xy^3z^2 .$ ☐ $= 50x^2y^4z^3$	**j)** $4mnx^4y^3 .$ ☐ $= -60m^3n^5x^7y^5$

* **Potencias de Monomios.**

La potencia de monomios es un caso particular de la multiplicación de monomios. Es una multiplicación de factores monomios iguales.

Ejemplo 1: $(2x^3)^2 = 2x^3 \,.\, 2x^3 = 2 \,.\, 2 \,.\, x^3 .\, x^3 =$ **$4x^6$**

Ejemplo 2: $(5a^2)^3 = 5a^2 \,.\, 5a^2 \,.\, 5a^2 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, a^2 \cdot a^2 \,.\, a^2 =$ **$125a^6$**

Nota: *Para hallar la potencia de un monomio se aplican las propiedades siguientes:*

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a^n)^m = a^{n.m}$

Ejemplo:

a) $(5a^2b)^3 = 5^3 \,.\, (a^2)^3 \,.\, b^3 = 125a^6 \,.\, b^3$

b) $(-3xy^2)^5 = (-3)^5 \,.\, x^5\,(y^2)^5 = -3^5x^5y^{10} = -243x^5y^{10}$

c) $(-4x^2z)^2 = (-4)^2 \,.\, (x^2)^2z^2 = 16x^4z^2$

d) $(-3x^2)^3 \,.\, (2x)^2 = (-3)^3 \,.\, (x^2)^3 \,.\, 2^2 \,.\, x^2 = -3^3 \,.\, x^6 \,.\, 4 \,.\, x^2 = -27 \,.\, 4\,x^8 = -108x^8$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 56

Ejercicio 1 : Halla el resultado de:

a) $(x^3)^2 =$	**i)** $(xy^2z^4)^5 =$ ....
b) $(a^2b)^3 =$	**j)** $(-3y^2z^4)^5 =$ ....
c) $(2xy^2)^4 =$	**k)** $(-6a^2b^3c)^2 =$ ....
d) $(2a^3x)^3 =$	**l)** $(25xy^2zt^2)^2 =$ ....
e) $(7x^2y)^3 =$	**m)** $(12x^3yz^4)^2 =$ ....
f) $(-5m^2n^2p^3)^3 =$	**n)** $(5a^8b^4c^2)^4 =$ ....
g) $(3am^2n^3)^4 =$	**ñ)** $(-7x^2yz^4)^3 =$ ....
h) $(-2a^3bz^2)^4 =$	**o)** $(-3x^4y^2w^5)^5 =$ ....

Ejercicio 2 : Halla el resultado de:

a) $(x^3)^2 \cdot (8x^4)^2 =$	**g)** $6a^3y^5\,(2a^2y)^2 =$ ....
b) $(5x^2y)^2 \cdot (2xy^2)^3 =$	**h)** $(3ab^3)^2\,(2ab)^3 =$ ....
c) $x^2y \cdot (3x^2y)^4 =$	**i)** $(2x^3)^4 \cdot (x^3y)^2 =$ ....
d) $5a^3 \cdot (2ab^3)^4 =$	**j)** $(-3ab^2)^2 \cdot (-3ax)^2 =$ ....
e) $a^4 \cdot (-2ab^3)^2\,(-3a)^3 =$	**k)** $(-7xy^3)^3 \cdot (-3ax)^2 =$ ....
f) $4x^2b\,(-2xb)^6 =$	**l)** $(8abc^3)^2 \cdot (5a^2bc)^2 =$ ....

* **División de Monomios**:

Para hallar el cociente de dos monomios se divide el coeficiente del dividendo entre el del divisor y a continuación se escriben las letras en orden alfabético poniéndole a cada una un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo y el que tiene en el divisor.

Ejemplo 1 : Halla el cociente de dividir: $16x^4 : 8x^2$

Resolución:

$$\frac{16x^4}{8x^2} = \frac{16}{8}\left(\frac{x^4}{x^2}\right) = 2x^{4-2} = \boxed{2x^2}$$

Recuerda que:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 2: Halla el cociente de dividir: $24x^6 : (-4x^3)$

Resolución:

$$\frac{24x^6}{-4x^3} = \frac{24}{-4}\left(\frac{x^6}{x^3}\right) = -6x^{6-3} = \boxed{-6x^3}$$

Ejemplo 3: Halla el cociente de dividir: $(-28x^4y^6) : (7x^3y^2)$

Resolución:

$$\frac{-28x^4y^6}{7x^3y^2} = -\frac{28}{7}\left(\frac{x^4y^6}{x^3y^2}\right) = -4x^{4-3}y^{6-2} = \boxed{-4xy^4}$$

Ejemplo 4: Halla el cociente de dividir: $(-45x^5y^6z^3) : (-9x^3y^4z)$

Resolución:

$$\frac{-45x^5y^6z^3}{-9x^3y^4z} = \frac{-45}{-9}\left(\frac{x^5}{x^3}\cdot\frac{y^6}{y^4}\cdot\frac{z^3}{z}\right) = 5x^{5-3}.y^{6-4}.z^{3-1} = \boxed{5x^2y^2z^2}$$

Ejemplo 5: Halla el cociente de dividir: $(60a^{m+2}b^{n+3}) : (4a^2b^5)$

Resolución:

$$\frac{60a^{m+2}b^{n+3}}{4a^2b^5} = \frac{60}{4}\left(\frac{a^{m+2}}{a^2}\cdot\frac{b^{n+3}}{b^5}\right) = 15a^{m+2-2}.b^{n+3-5} = \boxed{15a^m.b^{n-2}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 57

Ejercicio 1 : Halla el cociente de las divisiones siguientes:

a) $(12x^5y^2) : (3x^2y) =$	**e)** $(-56a^5b^6z^4) : (-8abz) =$ ....
b) $(22x^8y^4) : (2x^5y^3) =$	**f)** $(-48x^6b^7x^n) : (-12x^4b^3x^n) =$ ....
c) $(30x^8y^3z) : (-6x^3yz) =$	**g)** $(55x^6y^7z^4t^8) : (-5x^4y^2zt^3) =$ ....
d) $(-42a^3b^4c^2) : (7a^3b^2c) =$	**h)** $(-72x^{m+3}y^{n+4}) : (-6x^my^4) =$ ....

Ejercicio 2 : Halla el cociente de las divisiones siguientes:

a) $(-144x^{n+8}y^{m+4}z^{4+p}) : (-6x^{6+n}y^{2-n}z^{3+p}) =$ ....

b) $(-625a^{3x+y}b^{2x+3y}c^{3n+5}) : (5a^{y+2x}b^{2y+x}c^{3+2n}) =$ ....

c) $(128x^{3+a}y^{5+b}z^{6+4c}) : (16x^{a+1}y^{b+3}z^{4c+5}) =$ ....

d) $(224x^{3m+n+p}y^{2m+3n+q}) : (7x^{2m+n+p}y^{2n+m+q}) =$ ....

ECUACIONES E INECUACIONES

7. ECUACIONES E INECUACIONES

7.1 ENUNCIADO Y PROPOSICIÓN

* **Enunciado**: Es toda expresión del lenguaje tal como:

1.	Francisco Pizarro Conquistó el Perú	**4.**	$12 < 18$
2.	El alcalde de Piura	**5.**	$16 > 9$
3.	$7 > 10$	**6.**	$x + 3 = 8$

De estos enunciados podemos decir con toda seguridad, que son verdaderas 1, 4 y 5 y que 3 es falso. A estos enunciados le llamamos **Proposiciones**.

* **Proposición**: Es un enunciado con sentido en un lenguaje que afirma o niega algo y proporciona una información.

Toda proposición se caracteriza por tener sólo uno de los valores: verdadero o falso y nunca los dos valores a la vez.

Del enunciado 2 no podemos afirmar si es verdadero o falso, salvo sepamos a quien se refiere el pronombre él. Es decir, para que éste enunciado sea verdadero o falso depende de la palabra él.

Esta palabra él desempeña el papel de una variable cuyo **Dominio** es el conjunto de seres humanos.

Un enunciado como éste, que contiene una o más variables se denomina **Enunciado Abierto**.

7.1.1 ENUNCIADO ABIERTO

Es aquel en el que aparece por lo menos una letra o palabra llamada variable que al sustituirla por valores determinados de su enunciado anteriores, el 6 es también un enunciado abierto cuya variable es x.

Los siguientes son enunciados abiertos:

a) $4 + x = 12$	**c)** $x < 6$	**e)** $2x - 3 \leq 7$
b) $3x - 7 = 5$	**d)** $10 - 2x > 4$	**f)** $3x + 5 \geq 11$

***Ecuaciones**: Una ecuación es un enunciado abierto en el que aparece el signo (=) tal como:*

$$x + 5 = 8 \quad ; \quad x - 2 = 6 \quad ; \quad 3x + 2 = 14$$

Con frecuencia se utilizan los enunciados abiertos, al definir conjuntos. Por ejemplo, podriamos escribir el conjunto C de la manera siguiente:

C = { x; tal que x es un número natural par}

Este enunciado se lee asi: "C es el conjunto de todo **x** tal que **x** es un número natural par". Aqui **x** es una variable, y C consiste en el conjunto de los valores de **x** para los cuales el enunciado abierto.

x es un número natural par

Es cierto. Podemos simplificar aún más la notación antrior, reemplazando las palabras "tal que" por una raya / . Asi:

C = { x/x es un número natural par}

7.1.2 EL CONJUNTO

{ x/ ....}

Consiste en todos los Valores **de x que hacen** Cierto **el enunciado abierto que aparece inmediatamente después de la raya /.**

Por ejemplo, el conjunto de **S** de todos los números naturales impares entre 0 y 20, puede definirse asi:

S = { x/x es un número natural impar entre 0 y 20}

Los elementos de **S** son: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19 ; osea:

S = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

Otro ejemplo es el siguiente: T = { n/n es un múltiplo de 4 entre 0 y 26 }

Los elementos de T son: 4, 8, 12, 16, 20 y 24, es decir; T consiste en 4×1 ; 4×2 ; 4×3 ; 4×4 ; 4×5 y 4×6; Así, también podemos definir T en la forma siguiente:

T = { 4n/n es un número natural entre 0 y 7 }

Obsérvese que un número se dice estar **Entre** dos números, es mayor que el más pequeño y menor que el más grande de los dos números.

7.1.3 TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ABIERTOS DE LA FORMA VERBAL A LA SIMBÓLICA Y VICEVERSA

Podemos decir que en matemática se trabaja con un idioma equivalente al que tenemos para comunicarnos. El idioma de la matemática es eminentemente simbólico y por lo tanto, tiene suma importancia el hecho de traducir un enunciado de su forma verbal a la simbólica y recíprocamente.

Es recomendable leer detenidamente verificar y completar las traducciones que a continuación proponemos. Así mismo para su mayor éxito es conveniente realizar muchos otros ejercicios que uno mismo se proponga o con sus compañeros de clase.

A. Enunciados Abiertos.

Forma Verbal	Forma Simbólica
Un número aumentado en 7	$x + 7$
Un número disminuido en 3	$x - 3$
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$
La quinta parte de un número	$\frac{1}{5}x$
El doble de un número, aumentado en 12	$2x + 12$
El triple de un número disminuido en 9	$3(x - 9)$
La edad de Nataly hace 6 años	$x - 6$
La edad de Vanessa dentro de 8 años	$x + 8$
El costo de "n" cuadernos a 5 soles c/u.	5n soles
La suma de dos números consecutivos es 25	$x + (x + 1) = 25$
La suma de dos números pares consecutivos es 22.	$x + (x + 2) = 22$
El triple de la edad de Sara, disminuido en 10 años es 62 años	$3x - 10 = 62$
El dinero que tiene Percy aumentado en S/. 120 es igual a S/. 400.	$x + 120 = 400$

B. Enunciados Abiertos.

Forma Simbólica	Forma Verbal
$4x$	El cuádruplo de un número o cuatro veces un número.
$3x + 2$	El triple de un número, aumentado en dos.
$3(x + 2)$	El triple de un número aumentado en dos.
$2x - 9$	El doble de un número, disminuido en nueve.
$2(x - 9)$	El doble de un número disminuido en nueve.
$x(x + 1)$	El producto de dos números consecutivos.
$x^2 - 1$	El cuadrado de un número, disminuido en uno.
$(x - 1)^2$	El cuadrado de un número disminuido en uno.
$(2x)^3$	El cubo del doble de un número.
$x + y + z$	La suma de tres números.
$\frac{2}{3}x$	La dos terceras partes de un número.
$2x^3$	El doble del cubo de un número.

Observación: Para el planteo de una ecuación es importante tener en cuenta "La Coma" veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 :

- El doble de un número, aumentado en 6. - El doble de un número aumentado en 6.

* Como se observará las dos frases que se acaban de enunciar son semejantes lo que los diferencia es la "Coma" de la primera frase.

Ejemplo 2 :

- El cuadrado de un número, disminuido en 3 - El cuadrado de un número disminuido en 3

* Como se observará las dos frases que se acaban de enunciar son semejantes, lo que los diferencia es la "Coma" de la primera frase.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 58

Ejercicio 1 : Indicar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones y cuáles son enunciados abiertos.

a) Lima es la capital del Perú	**e)** $3 + 6 < 7$
b) Los hombres practican dos deportes	**f)** $x + 7 = 16$
c) Él conquistó Piura.	**g)** $3x - 1 \leq 5$
d) "N" es un número natural par mayor que 12, pero menor que 15.	**h)** César Vallejo escribió. "Los perros hambrientos"

Ejercicio 2 : Traducir los siguientes enunciados a la forma simbólica:

Forma Verbal	Forma Simbólica
a) Un número aumentado en 15.	$x + 15$
b) Un número disminuido en 8.	$x - 8$
c) El cuádruplo de un número; aumentado en 3.	$4x + 3$
d) El cuádruplo de un número aumentado en 3.	$4(x + 3)$
e) El quíntuplo de un número, disminuido en 7.	$5x - 7$
f) Cinco veces un número disminuido en 7.	$5(x - 7)$
g) El cubo de un número aumentado en 2.	$(x + 2)^3$
h) El cubo de un número; aumentado en 2.	$(x)^3 + 2$
i) La suma del triple de un número y el doble de su consecutivo es 22.	
j) El triple de un número es igual al doble de éste aumentado en 13.	
k) La suma de tres números consecutivos es 24.	
l) El doble del dinero de Manuel.	
m) El dinero de Vanessa aumentado en S/. 500 es S/. 1 200.	
n) La tercera parte de un número, aumentado en $\frac{1}{2}$	
o) El quíntuplo de un número; disminuido en 8 es igual al doble del mismo número.	

Ejercicio 3: Dar un enunciado verbal que se adapte a cada una de las siguientes expresiones.

Forma Simbólica	Forma Verbal
a) $x + 11$	
b) $x - 13$	
c) $2x + 9$	
d) $3x - 6$	
e) $3x = 60$	
f) $2x + 8 = 18$	
g) $3x - 6 = 2x$	
h) $x^2 - 1 = 8$	
i) $3(x - 2) = x + 14$	
j) $(x + 1)^2 = 4$	
k) $x^3 - 3 = 24$	
l) $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{3}(x + 8)$	

Ejercicio 4: Indicar cuáles, de los siguiente enunciados son ciertos y cuáles son falsos:

a) $2 + 2 = 2 . 2$ ... ( )	e) $(3 + 7)^2 \neq 3^2 + 7^2$ ... ( )	i) $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = 1$ ... ( )
b) $\frac{14+4}{2+2} = 7 + 2$ ... ( )	f) $\frac{14+4}{2+2} = 7$ ... ( )	j) $23 - (5 + 8) \neq (23 - 5) - 8$ .. ( )
c) $12^2 + 5^2 \neq 13^2$ ... ( )	g) $12^2 = (13 + 5)(13 - 5)$ ... ( )	k) $9 : 1 = 9 \times 1$ ... ( )
d) $6.0 \neq 8.0$ ... ( )	h) $8(12 - 3) = (8 . 12) - 3$ .. ( )	l) $17 - (6 - 2) \neq (17 - 6) - 2$ .. ( )

Ejercicio 5: En cada uno de los siguientes enunciados abiertos, asignar a "x" los valores de: 0, 1, 3, 5 y 12; e indicar cuáles de los enunciados resultantes son ciertos y cuáles son falsos:

a) $2x + 1 = 7$ ... ( )	d) $3x + 1 = 2x + 1$ ... ( )	g) $x^2 - x = 0$ ... ( )
b) $3x + 6 = 3(x + 2)$ ... ( )	e) $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ... ( )	h) $x + 3 = x + 4$ ... ( )
c) $x + 5 = 3x - 2$ ... ( )	f) $3x^2 = 12$ ... ( )	i) $2x - 1 = 2x + 1$ ... ( )

Ejercicio 6: Enumerar los elementos de cada uno de los conjuntos dados.

a)	A = {x/x es un número par entre 7 y 20}	⇒	A = { }
b)	B = {2n/n es un número natural entre 4 y 15}	⇒	B = { }
c)	C = {x/x es un múltiplo de 3 entre 0 y 17}	⇒	C = { }
d)	D = {4n-1/n es un número natural entre 1 y 8}	⇒	D = { }
e)	E = {x/x es un múltiplo de 5 entre 2 y 30}	⇒	E = { }

7.2 ECUACIONES

Para dar conceptos claros y precisos referente a ecuaciones, consideremos los siguientes términos:

a) **IGUALDAD**: (= ; signo de igualdad), son dos expresiones aritméticas o albraicas, que gozan del mismo valor; por ejemplo:

1) Una decena = 10 unidades **2)** $8 + 3 = 15 - 4$ **3)** $5x = 20$

b) **IDENTIDAD**: (≡ ; signo de la identidad); es una igualdad por si misma evidente; por ejemplo:

1) $7 \equiv 7$	**2)** $3x \equiv 3x$	**3)** $y + 6 \equiv y + 6$

c) **ECUACIÓN**: Es una igualdad de expresiones, de las cuales una encierra cantidades desconocidas (incógnitas) a las cuales correponden unos valores condicionales pero determinados.

Por ejemplo: $2x = 10$

Las cantidades desconocidas están expresadas por medio de letras, generalmente las últimas del alfabeto como son la x, y, z, etc

En la ecuación: $2x = 10$; el valor de x es 5 ; porque 2 veces 5 da 10.

O sea: $2x = 10$ ➡ $x = \frac{10}{2} = 5$

Verificación: $2x = 10$ ➡ $2.5 = 10$ ➡ $10 \equiv 10$

7.2.1 MIEMBROS DE UNA ECUACIÓN

En cada ecuación se distinguen dos partes llamadas miembros de la ecuación, que se encuentran de uno y otro lado del signo de la igualdad (=).

LLámese primer miembro, la parte de la ecuación que está a la izquierda del signo de la igualdad (2x).

LLámese segundo miembro, la parte de la ecuación que está a la derecha del signo de la igualdad (10); osea en:

$$\underbrace{2x}_{1^{\circ}\ \text{Miembro}} = \underbrace{10}_{2^{\circ}\ \text{Miembro}}$$

Toda ecuación consta tan sólo de dos miembros, el primero y el segundo; pero cada miembro puede tener uno o más términos; así:

$2x = 10$ ➡ ***(Esta ecuación consta de dos términos)***

$5x + x = 18 + 6$ ➡ ***(Esta ecuación consta de cuatro términos)***

7.2.2 RAÍZ Y CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

- Si en la ecuación: $3x + 6 = 21$, si a la variable "x" le damos el valor de 5, obtenemos la proposición verdadera veamos: $3 . 5 + 6 = 21$

  En este caso se dice que 5 es la raíz o solución de la ecuación: $3x + 6 = 21$, y el conjunto {5} es el conjunto solución de la ecuación.

- Si en la ecuación: $x^2 + 4x = 12$, si a la variable "x" le damos los valores de 2 y -6, obtenemos la proposición verdadera veamos:

$$(2)^2 + 4(2) = 12$$
$$(-6)^2 + 4(-6) = 12$$

  En este caso se dice que 2 y - 6 son las raíces o soluciones de la ecuación:

  $x^2 + 4x = 12$ y el conjunto { 2,-6 } es el conjunto solución de la ecuación.

7.2.3 SOLUCIÓN O RAÍZ DE UNA ECUACIÓN

Es el número que al reemplazar a la variable de la ecuación la transforma en una proposición verdadera.

7.2.4 CONJUNTO SOLUCIÓN

El conjunto solución de una ecuación de primer grado con una variable, es el conjunto que tiene como único elemento a la raíz de la ecuación.

7.2.5 RESOLVER UNA ECUACIÓN

Resolver una ecuación es hallar el conjunto solución de la ecuación.

Ejemplo: Dada la ecuación: $7x = 28$

La variable o incógnita es "x" , la raíz o valor de "x" que satisface la ecuación es: 4

Luego: El conjunto solución S de la ecuación es: S = { 4 }

7.2.6 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

Considerando en la ecuación sus distintos elementos, éstos pueden ser:

I) CON RESPECTO A LOS COEFICIENTES DE LAS INCÓGNITAS:

a) **Ecuaciones Numéricas**: Si los coeficientes de las incógnitas son números.

Ejemplo: $2x^2 - 3x + 7 = 0$ ***(Los coeficientes son: 2, -3 y 7).***

b) **Ecuaciones Literales**: Si los coeficientes de las incógnitas son letras.

Ejemplo: $ax^2 + bx + c = 0$ ***(Los coeficientes son: a, b y c).***

II) CON RESPECTO A SU FORMA:

a) **Ecuaciones Racionales**: Cuando sus incógnitas no están afectadas de radical. Estos a su vez pueden ser: ecuaciones racionales enteras o ecuaciones racionales fraccionarias.

Ejemplos:

* $4x^2 - 5x = 21$ .... ***(Ecuación racional entera)***

** $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{23}{6}$ .... ***(Ecuación racional fraccionaria)***

- Una ecuación es racional fraccionaria cuando presenta letras en su denominador.

b) **Ecuaciones Irracionales**: Cuando la incógnita se encuentra dentro de un radical.

Ejemplos:

* $\sqrt{x+3} = 2$

** $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 1$

III) CON RESPECTO AL NÚMERO DE INCÓGNITAS: Pueden ser de una, dos, tres o más incógnitas.

Ejemplos:

$2x + 1 = 3x - 4$; es una ecuación con una incógnita: x

$5x - 3y = 3$; es una ecuación con dos incógnitas: x e y

$x + 2y - 3z = 8$; Es una ecuación con tres incógnitas: x, y, z.

IV) CON RESPECTO AL GRADO DE LA INCÓGNITA:

a) **Ecuaciones de Primer Grado**: Cuando el exponente de la incógnita es uno (1)

Ejemplo: $6x - 5 = 7$

b) **Ecuación de Segundo Grado**: Cuando el exponente de la incógnita es dos (2)

Ejemplo: $x^2 + 5x + 6 = 0$

c) **Ecuación de Tercer Grado**: Cuando el exponente de la incógnita es tres (3)

Ejemplo: $x^3 - 27 = 0$

d) **En General de "n" Grado**: Según el grado de la incógnita a toda ecuación le corresponde tantas raíces o soluciones.

Veamos: Si la ecuación es de 1er grado le corresponde **una raíz**

Si la ecuación es de 2do grado le corresponde **dos raíces**

Si la ecuación es de 3er grado le corresponde **tres raíces**

V) **CON RESPECTO A SUS RAÍCES O SOLUCIONES:**

Puede ser:

a) **Compatibles**: Cuando tienen por lo menos una solución. A su vez estas ecuaciones se dividen en:

* **Determinadas**: Si tienen un número limitado de soluciones.

Ejemplos: $4x - 7 = x + 8$ ➠ ; **tiene una sola raíz o solución**

$x^2 - 3 = 6$ ➠ ; **tiene dos raíces o soluciones.**

** **Indeterminadas**: Si tienen un número ilimitado de soluciones.

Ejemplo: $2x + 1 = 2x + 1$; Es inderterminada, esto significa que la igualdad se verifica para cualquier valor de x, es decir tiene infinitas soluciones.

b) **Incompatibles o Absurdas**: Son aquellas que no admiten solución

Ejemplo 1:

$\sqrt{x} = -1$; *Esta ecuación resulta ser absurda, pués el signo que precede a la raíz, es positivo, luego en el segundo miembro debería aparecer una cantidad positiva y no negativa como la que aparece.*

Positivo Negativo

Ejemplo 2:

$3x + 1 = 3x + 4$; *también es una ecuación imcompatible.*

7.2.7 ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones con las mismas incógnitas se llaman equivalentes si todas las soluciones de la primera ecuación son soluciones de la segunda y viceversa.

Ejemplo: La ecuación: $\frac{x}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$; y la ecuación: $3x - 5 = 3 - x$; son equivalentes ya que ambos se satisfacen para: $x = 2$.

7.2.8 PRINCIPIOS GENERALES DE LAS ECUACIONES

Claro está que si sobre dos cantidades iguales se ejecuta una misma operación, los resultados quedarán iguales.

Aplicando esta verdad a la solución de una ecuación, podemos enunciar los siguientes principios:

1º Sin alterar las soluciones de una ecuación, se puede añadir una misma cantidad a sus dos miembros.

Ejemplo: $3x - 5 = 7$; sumamos "5" a ambos miembros:

$$3x - 5 + 5 = 7 + 5 \Rightarrow \boxed{3x = 12}$$

2º Sin alterar las soluciones de una ecuación, se puede restar una misma cantidad a sus dos miembros.

Ejemplo: $5x + 3 = 13$; restamos "3" a ambos miembros:

$$5x + 3 - 3 = 13 - 3 \Rightarrow \boxed{5x = 10}$$

3º Sin alterar las soluciones de una ecuación, se puede multiplicar por una misma cantidad a ambos miembros.

Ejemplo: $4x + 1 = 21$; multiplicamos "× 2" a ambos miembros:

$$2\,(4x + 1) = 21\,.\,2 \Rightarrow \boxed{8x + 2 = 42}$$

4º Sin alterar las soluciones de una ecuación se puede dividir por una misma cantidad a ambos miembros (dicha cantidad debe ser diferente de cero).

Ejemplo: $3x - 6 = 9$; dividimos entre "3" a ambos miembros.

$$\frac{3x-6}{3}=\frac{9}{3} \Rightarrow \frac{3x}{3}-\frac{6}{3}=3 \Rightarrow \boxed{x-2=3}$$

7.2.9 PROPIEDAD DE TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS

En toda ecuación, lo que esta sumando, restando, multiplicando y dividiendo en un miembro, pasa restando, sumando, dividiendo y multiplicando, respectivamente al otro miembro. Así:

1) $x + 8 = 13$ Entonces: $x = 13 - 8$

2) $y - 9 = 6$ Entonces: $y = 6 + 9$

3) $6z = 18$ Entonces: $z = \frac{18}{6}$

4) $\frac{w}{3} = 4$ Entonces: $w = 4\,.\,3$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ECUACIONES

Ejercicio : Resolver la ecuación: $5x - 4 = x + 12$

Resolución:

Transponemos términos de tal modo que las letras estén en el primer miembro y los numerales en el segundo miembro. Así:

$5x - x = 12 + 4$; Efectuando operaciones, se tiene:

$4x = 16$; "4" que esta multiplicando en el primer miembro pasa a dividir al segundo miembro.

$x = \frac{16}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 4}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $5x - 4 = x + 12$ es: $S = \{4\}$

Verificación: Reemplazamos el valor de $x = 4$; en la ecuación: $5x - 4 = x + 12$

$$\underbrace{5 \cdot 4} - 4 = 4 + 12$$

$$20 - 4 = 16$$

$$\therefore \boxed{16 = 16}$$

Ejercicio 2 : Resolver la ecuación: $6x - 5 = 7$

Resolucíon:

De la ecuación: $6x - 5 = 7$; pasamos "-5" al segundo miembro como "+5"

$6x = 7 + 5 \Rightarrow 6x = 12$; "6"pasa a dividir al segundo miembro.

$x = \frac{12}{6} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $6x - 5 = 7$ es: $S = \{2\}$

Verificación: Reemplazamos el valor de $x = 2$; en la ecuación: $6x - 5 = 7$

$$\underbrace{6 \cdot 2} - 5 = 7$$

$$12 - 5 = 7 \Rightarrow \therefore \boxed{7 = 7}$$

Ejercicio 3: Resolver la ecuación: $7x + 31 = 9 + 5x$

Resolución:

En la ecuación: $7x + 31 = 9 + 5x$; Transponemos términos, o sea las "equis" en el primer miembro y los numerales el segundo miembro.

$7x - 5x = 9 - 31$

$2x = -22$; "2" que esta multiplicando en el primer miembro pasa al segundo miembro a dividir.

$x = \frac{-22}{2}$ ➠ $x = -11$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $7x + 31 = 9 + 5x$ es: $S = \{-11\}$

Verificación:

Reemplazamos el valor de $x = -11$; en la ecuación: $7x + 31 = 9 + 5x$

$\underbrace{7.(-11)} + 31 = 9 + \underbrace{5.(-11)}$

$-77 + 31 = 9 - 55$

$\therefore$ $-46 = -46$

Ejercicio 4: Resolver la ecuación: $3(x - 4) = x + 6$

Resolución:

Efectúo el producto indicado en el primer miembro. Así:

$3(x - 4) = x + 6$ ➠ $3x - 12 = x + 6$; Transponemos términos:

$3x - x = 6 + 12$ ➠ $2x = 18$ ➠ $x = \frac{18}{2}$ ➠ $x = 9$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $3(x - 4) = x + 6$; es: $S = \{ 9 \}$

Verificación: Reemplazamos el valor de $x = 9$; en la ecuación: $3(x - 4) = x + 6$

$3\underbrace{(9 - 4)} = 9 + 6$

$3(5) = 15$

$\therefore$ $15 = 15$

Ejercicio 5: Resolver la ecuación: $\frac{3}{4}x + 6 = 12$

Resolución:

En la ecuación: $\frac{3}{4}x + 6 = 12$; pasamos "+6" al segundo miembro como "-6"

$\frac{3}{4}x = 12 - 6 \Rightarrow \frac{3}{4}x = 6$; "3" pasa al segundo miembro a dividir y "4" pasa a multiplicar.

$x = \frac{6 \cdot 4}{3} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 8}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $\frac{3}{4}x + 6 = 12$; es: $S = \{8\}$

Ejercicio 6 : Resolver la ecuación: $\frac{8}{3}x = 2x + 14$

Resolución:

En la ecuación: $\frac{8}{3}x = 2x + 14$; el "3" pasa al segundo miembro a multiplicar.

$8x = 3(2x + 14)$

$8x = 6x + 42 \Rightarrow 8x - 6x = 42$

$2x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{2} = 21 \quad \therefore \boxed{x = 21}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $\frac{8}{3}x = 2x + 14$; es: $S = \{21\}$

Ejercicio 7 : Resolver la ecuación: $\frac{x + 1}{4} = 2x - 5$

Resolución:

En la ecuación: $\frac{x + 1}{4} = 2x - 5$; el "4" pasa al segundo miembro a multiplicar.

$x + 1 = 4(2x - 5)$

$x + 1 = 8x - 20 \Rightarrow 1 + 20 = 8x - x$

$21 = 7x$

$\frac{21}{7} = x \Rightarrow \therefore \boxed{3 = x}$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación: $\frac{x + 1}{4} = 2x - 5$; es : $S = \{3\}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 59

Ejercicio 1 : Indica el grado y el número de raíces o soluciones a obtenerse en cada ecuación siguiente: (**Su Gerencia:** No es necesario resolver la ecuación)

Ecuación	Grado	Nº de Raices	Ecuación	Grado	Nº de Raices
$x^5 + 3x^2 + x = 46$			$x(x - 2) + x = 12$		
$4x^3 + x - 5 = 0$			$x^2 = 16x$		
$(x + 3)(x - 3) = 10$			$(x - 3)^2 = x - 3$		
$5x - 3 = 12$			$5x - 3 = 2 + 4x$		
$2x + 7 = 19$			$x^2 + 3x = x + 8$		
$\frac{x+1}{3} = x - 5$			$\frac{x+6}{x} = 2 \; ; (x \neq 0)$		

Ejercicio 2: En cada par de ecuaciones, escribir **Si** ; si son ecuaciones equivalentes y escribir **No** ; si no son.

a). $\begin{cases} 4x - 1 = 7 \\ 3x - 4 = 2 \end{cases}$ ☐

b). $\begin{cases} 2x + 5 = 11 \\ 5x - 4 = 11 \end{cases}$ ☐

c). $\begin{cases} x + 13 = 16 \\ 2x + 10 = 15 \end{cases}$ ☐

c). $\begin{cases} 4x = 28 \\ 9x = 63 \end{cases}$ ☐

d). $\begin{cases} \frac{x}{3} = 6 \\ \frac{x}{6} = 3 \end{cases}$ ☐

e). $\begin{cases} 6x = 48 \\ -9x = -72 \end{cases}$ ☐

f). $\begin{cases} 2(x + 4) = 14 \\ 3(5 - x) = 6 \end{cases}$ ☐

g). $\begin{cases} \frac{5}{7}x = x + 6 \\ x = 42 - x \end{cases}$ ☐

h). $\begin{cases} \frac{2}{5}x + x = 21 \\ 4 - \frac{x}{2} = 11 \end{cases}$ ☐

Ejercicio 3: Halla el conjunto solución en cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $3x - 1 = x + 6$

Resolución:

Rpta. $S = 7/2$

b) $7x - 12 = 3x + 4$

Resolución:

Rpta. $S = \{4\}$

c) $7x - 12 = 3(x + 4)$

Resolución:

Rpta. $S = \{6\}$

d) $\frac{3}{4}x + 5 = 11$

Resolución:

Rpta. $S = \{8\}$

e) $\frac{2}{5}x - 8 = 12$

Resolución:

Rpta. $S = \{50\}$

f) $\frac{7}{6}x = x + 3$

Resolución:

Rpta. $S = \{18\}$

g) $\frac{2}{3}x - 1 = 5$

Resolución:

Rpta. $S = \{9\}$

h) $2(x - 5) = x - 4$

Resolución:

Rpta. $S = \{6\}$

i) $3(x + 6) = 2(x + 8)$

Resolución:

Rpta. $S = \{-2\}$

j) $3(x - 1) + x = 13$

Resolución:

Rpta. $S = \{4\}$

k) $x - 2(x + 1) = 7 - 4x$

Resolución:

Rpta. $S = \{3\}$

l) $\frac{4}{9}(3 - x) + x = 8$

Resolución:

Rpta. $S = \{12\}$

7.3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Toda ecuación de primer grado con una incógnita, puede reducirse a la forma:

$$\mathbf{ax + b} = 0$$

Donde: **x : Incognita**
a y b : Coeficientes (a y $b \in \mathbb{R}$)

Despejando la incógnita "x" se tendrá: $ax = -b$ $\therefore$ $x = -\dfrac{b}{a}$

7.3.1 DISCUSIÓN DE LA RAÍZ

- El valor de "x" es decir, la **Solución o Raíz** de la ecuación, depende de los valores de a y b, veamos:

1) Si: $a \neq 0$ y $b \neq 0$; tendremos: $x = \dfrac{-b}{a}$ (La ecuación es **DETERMINADA** y el valor de "x" es único)

2) Si: $a \neq 0$ y $b = 0$; tendremos: $x = 0$ (La ecuación es **DETERMINADA** y la raíz es nula)

3) Si: $a = 0$ y $b \neq 0$; no hay solución (La ecuación es **INCOMPATIBLE** o absurda)

4) Si: $a = 0$ y $b = 0$; la ecuación es **INDETERMINADA.**

7.3.2 REGLA PARA RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se puede seguir este orden:

1º Se suprimen los signos de colección, si los hay.

2º Se reduce la ecuación al común denominador, si es fraccionaria.

3º Se reúnen las incógnitas en el primer miembro y los demás en el segundo (transposición de términos).

4º Se reúnen los términos semejantes, si los hay.

5º Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

6º Se comprueba la ecuación resuelta, reemplazando la incógnita por el valor hallado, reduciéndola a una identidad.

Ejemplo 1 : Resolver la ecuación: $3x + 1 = x + 17$

Resolución:

$3x + 1 = x + 17$; Transponemos términos, cambiando de signo.

$3x - x = 17 - 1$; Reducimos términos semejantes

$2x = 16$; Despejamos "x" , dividiendo los miembros entre el coeficiente de "x".

$x = \frac{16}{2}$ ➠ ∴ $x = 8$ **(valor de la raíz)**

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $3x + 1 = x + 17$; es: $S = \{8\}$

Comprobación:

Reemplazamos el valor de $x = 8$; en la ecuación: $3x + 1 = x + 17$

$$\underbrace{3 \cdot 8} + 1 = 8 + 17$$

$$24 + 1 = 25$$

$$25 \equiv 25$$ ***(Identidad)***

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $15 - (2x - 1) = 8 - (2 - 3x)$

Resolución:

$15 - \underbrace{(2x - 1)} = 8 - \underbrace{(2 - 3x)}$; Suprimimos los signos de agrupación.

$15 - 2x + 1 = 8 - 2 + 3x$; Transponemos términos.

$-2x - 3x = 8 - 2 - 15 - 1$; Reducimos términos semejantes.

$-5x = -10$; despejamos "x"

$x = \frac{-10}{-5}$ ➠ ∴ $x = 2$ **(valor de la raíz)**

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $15 - (2x - 1) = 8 - (2 - 3x)$; es: $S = \{2\}$

Comprobación:

Reemplazamos el valor de $x = 2$; en la ecuación: $15 - (2x - 1) = 8 - (2 - 3x)$

$$15 - [2 \cdot 2 - 1] = 8 - [2 - 3 \cdot 2]$$

$$15 - [3] = 8 - [-4]$$

$$12 \equiv 12$$ ***(Identidad)***

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación: $(x + 1)(x + 2) - x(x + 5) = 6$

Resolución:

$(x + 1)(x + 2) - x(x + 5) = 6$; Suprimimos los signos de agrupación.

$x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 5x = 6$; Transponemos términos.

$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x + x - 5x = 6 - 2$; Reducimos términos semejantes.

$-2x = 4$; despejamos "x".

$x = \dfrac{4}{-2} = -2 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = -2}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $(x + 1)(x + 2) - x(x + 5) = 6$; es: $S = \{-2\}$

Comprobación:

Reemplazamos el valor de $x = -2$; en la ecuación:

$(x + 1)(x + 2) - x(x + 5) = 6$

$\underbrace{(-2 + 1)}\underbrace{(-2 + 2)} - \underbrace{(-2)(-2 + 5)} = 6$

$(-1)(0) + 2(3) = 6 \Rightarrow 0 + 6 = 6 \Rightarrow 6 = 6$ ***(Identidad)***

Ejemplo 4 : Resolver la ecuación: $5x - \{6x + [8 - (x + 1)]\} = -2x + 1$

Resolución:

$5x - \{6x + [8 - \underbrace{(x + 1)}]\} = -2x + 1$; Suprimimos el signo de agrupación, **Parentesis.**

$5x - \{6x + [8 - x - 1]\} = -2x + 1$; Suprimimos el signo de agrupación, corchete.

$5x - \{6x + 8 - x - 1\} = -2x + 1$; Suprimimos el signo de agrupación, llave.

$5x - 6x - 8 + x + 1 = -2x + 1$; Transponemos términos.

$5x + x - 6x + 2x = \cancel{1} + 8 - \cancel{1}$; Reducimos términos semejantes.

$2x = 8$; despejamos "x"

$x = \dfrac{8}{2} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 4}$ **(valor de la raíz)**

Rpta: El conjunto solución de la ecuación: $5x - \{6x + [8 - (x + 1)]\} = -2x + 1$; es: $S = \{4\}$

Comprobación:

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 4}$; en la ecuación:

$5x - \{6x + [8 - (x + 1)]\} = -2x + 1$

$\underbrace{5 . 4} - \{\underbrace{6 . 4} + [8 - (4 + 1)]\} = -2 . 4 + 1$

$20 - \{24 + [8 - 5]\} = -8 + 1 \Rightarrow 20 - \{27\} = -7 \Rightarrow -7 \equiv -7$ ***(Identidad)***

7.3.3 ECUACIONES FRACCIONARIAS

Para resolver una ecuación fraccionaria, primero se da común denominador, buscando m.c.m. de los denominadores. El m.c.m. es el común denominador, el cual se divide entre cada uno de los denominadores, multiplicando su numerador por el cociente obtenido; se anulan los denominadores (multiplicando mentalmente toda la ecuación por el común denominador, con lo cual quedan simplificados todos los términos) y se sigue resolviendo solamente el numerador, el cual constituye una ecuación equivalente a la anterior.

Ejemplo **:** Resolver la ecuación: $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{15} = 7 - \frac{2x-2}{2}$

Resolución:

5 - 15 - 2	2
5 - 15 - 1	3
5 - 5 - 1	5
1 - 1 - 1	

Común Denominador = $2 \times 3 \times 5 = 30$

$$\frac{6 \cdot 3x}{\cancel{30}} - \frac{2 \cdot 4x}{\cancel{30}} = \frac{30 \cdot 7}{\cancel{30}} - \frac{15(2x-2)}{\cancel{30}}$$

Se anulan los denominadores. $18x - 8x = 210 - 30x + 30$

Transponemos términos: $18x - 8x + 30x = 210 + 30 \Rightarrow 40x = 240$; despejamos "x"

$$x = \frac{240}{40} \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 6 }

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $\frac{2x+3}{5} - \frac{5x+2}{8} - \frac{13x-3}{6} = \frac{3(3-2x)}{2}$

Resolución:

Damos Común Denominador:

5 - 8 - 6 - 2	2
5 - 4 - 3 - 1	2
5 - 2 - 3 - 1	2
5 - 1 - 3 - 1	3
5 - 1 - 1 - 1	5
1 - 1 - 1 - 1	

Común Denominador:

$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

$$\frac{24(2x+3)}{\cancel{120}} - \frac{15(5x+2)}{\cancel{120}} - \frac{20(13x-3)}{\cancel{120}} = \frac{60[3(3-2x)]}{\cancel{120}}$$

Se anulan los denominadores. $48x + 72 - 75x - 30 - 260x + 60 = 180(3 - 2x)$

$$48x + 72 - 75x - 30 - 260x + 60 = 540 - 360x$$

Transponemos términos: $48x + 360x - 260x - 75x = 540 + 30 - 60 - 72$

$73x = 438$; despejamos "x"

$x = \frac{438}{73}$ ➠ $\therefore$ $\boxed{x = 6}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 6 }

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación: $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$

Resolución:

En este caso sólo hay 2 denominadores, aplicamos el producto cruzado.

Veamos: $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$

Recuerda que:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{7x + 2(x+1)}{2 \cdot 7} = x - 2$$

$\frac{7x + 2x + 2}{14} = (x - 2)$ ➠ $9x + 2 = 14\,(x - 2)$

$9x + 2 = 14x - 28$; transponemos términos

$9x - 14x = -28 - 2$

$-5x = -30$; despejamos "x"

$x = \frac{-30}{-5}$ ➠ $\therefore$ $\boxed{x = 6}$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 6 }

Ejemplo 4 : Resolver la ecuación: $\frac{1-x}{3} + x = \frac{5}{6}$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{1-x}{3} + \frac{x}{1} = \frac{5}{6}$$

Recuerda que:

$$\text{Número} = \frac{\text{Número}}{1}$$

Ejemplo: $8 = \frac{8}{1}$

$$\frac{1.(1-x) + 3.x}{3.1} = \frac{5}{6}$$

$\frac{1 - x + 3x}{3} = \frac{5}{6}$ ➠ $1 + 2x = \frac{5 \cdot 3}{6}$ ➠ $2x = \frac{15}{6} - 1$

$$2x = \frac{15-6}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{3}{4}}$$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 3/4 }

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3} + 1$

Resolución:

$$\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3} + 1$$; Transponemos términos

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1 + 4 \Rightarrow \frac{3.x - 2.x}{2.3} = 5 \Rightarrow \frac{3x - 2x}{6} = 5$$

$$\frac{x}{6} = 5 \Rightarrow x = 5.6 \quad \therefore \boxed{x = 30}$$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 30 }

Ejemplo 6: Resolver la ecuación: $\frac{2x+1}{5} - 8 = \frac{x}{4} + 3$

Resolución:

$$\frac{2x+1}{5} - 8 = \frac{x}{4} + 3$$; Transponemos términos

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x}{4} = 3 + 8 \Rightarrow \frac{4(2x+1) - 5x}{5 \cdot 4} = 11$$

$$8x + 4 - 5x = 11 \cdot 5 \cdot 4$$

$$3x = 220 - 4$$

$$3x = 216 \Rightarrow x = \frac{216}{3} = \boxed{72}$$

Rpta: El conjunto solución de la ecuación es: S = { 72 }

TALLER DE EJERCICIOS Nº 60

Ejercicio 1: Halla el conjunto solución de cada ecuación siguiente:

a) $4x - 1 = 11$	**h)** $3x - 5 = 2x - 2$	**ñ)** $-6x + 17 = 47$
b) $3x + 4 = 10$	**i)** $2 - x = 3 - 2x$	**o)** $7x + 13 = 90$
c) $2x - 3 = 21$	**j)** $4x - 3 = 5x - 8$	**p)** $5x - 170 = 2x - 17$
d) $8 = 5 + x$	**k)** $6 - 3x = 8 - 4x$	**q)** $3(x - 1) = 21$
e) $x - 2 = 6$	**l)** $3x + 2 = 4x$	**r)** $2(x + 5) = 16$
f) $5 = 12 - x$	**m)** $7 - 2x = 3x + 2$	**s)** $-6(x + 1) = 30$
g) $2x - 3 = x + 2$	**n)** $4x = 138 - 2x$	**t)** $-91 + 4x = -47$

Rpta.

a) $x = 3$	**b)** $x = 2$	**c)** $x = 12$	**d)** $x = 3$	**e)** $x = 8$	**f)** $x = 7$	**g)** $x = 5$
h) $x = 3$	**i)** $x = 1$	**j)** $x = 5$	**k)** $x = 2$	**l)** $x = 2$	**m)** $x = 1$	**n)** $x = 23$
ñ) $x = -5$	**o)** $x = 11$	**p)** $x = 51$	**q)** $x = 8$	**r)** $x = 3$	**s)** $x = -6$	**t)** $x = 11$

Ejercicio 2: Halla el conjunto solución de cada ecuación siguiente:

a) $2x + 1 = 4(x - 6)$	**f)** $5 - (2x - 1) = 9 - (2 + 3x)$
b) $7 - 3(x + 1) = x - 3(x - 1)$	**g)** $(3x + 2) + (x + 1) = (2x + 4) + (x + 3)$
c) $5x - 2(x - 6) = 2x + 2(x - 1)$	**h)** $(3x + 1) - (x + 3) = 3(x + 1)$
d) $7x + 5 - 2x = 8 + 4x - 2$	**i)** $3(5x + 1) - 2(6x + 3) = 2(x - 1)$
e) $2(x + 2) - 3(5 - x) = x + 5(x - 3)$	**j)** $(5x + 4) - (3x + 1) = (4x + 2) - (3x - 7)$

Rpta.

(a) $x = \frac{25}{2}$	**(b)** $x = 1$	**(c)** $x = 14$	**(d)** $x = 1$	**(e)** $x = 4$
(f) $x = 1$	**(g)** $x = 4$	**(h)** $x = -5$	**(i)** $x = 1$	**(j)** $x = 6$

Ejercicio 3: Halla el conjunto solución de cada ecuación siguiente:

a). $\frac{x + 27}{4} = x + 3$	b). $\frac{x}{2} + 2x = x + 3$	c). $\frac{x}{2} + \frac{3x}{6} = 1$

d). $\frac{1}{5}(6x + 1) = 1$

e). $5 - \frac{1}{4}x = 10 - (x - 1)$

f). $\frac{15 - x}{x} = \frac{1}{2}$

g). $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - 1$

h). $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 3$

i). $5 - \frac{x - 3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{x - 1}{6}$

j). $\frac{7(4x + 3)}{10} - \frac{4(x + 1)}{15} = 5$

k). $\frac{3}{5} - x = x + \frac{6}{5}$

l). $\frac{3}{4}x - \frac{5}{9}x + \frac{7}{8}x = 11$

m). $\frac{x + 3}{6} - \frac{x + 4}{8} = \frac{3(x + 5)}{36}$

n). $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 3}{5} + \frac{3x + 7}{10} = 0$

ñ). $\left[\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{3}\right] - \left[x - \frac{1}{3}(2x - 1)\right] = 0$

Rpta.

a) $x = 5$	**b)** $x = 2$	**c)** $x = 1$	**d)** x) 2/3	**e)** $x = 8$
f) $x = 10$	**g)** $x = -4/3$	**h)** $x = 36$	**i)** $x = 63/5$	**j)** $x = \frac{95}{76}$
k) $x = \frac{-3}{10}$	**l)** $x = \frac{72}{7}$	**m)** $x = -10$	**n)** $x = \frac{-49}{23}$	**ñ)** $x = -6$

7.2.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

* **Problemas**: Problema es la investigación de términos desconocidos por medio de los conocidos.

* **Resolver un Problema**: Quiere decir: Hallar el valor de la incógnita, hallar una igualdad la cual desarrollada, satisfaga al valor de la incógnita. Y así toda clase de ecuación es una expresión más sencilla de un problema dado; por ejemplo la siguiente ecuación: $3x + 5 = 11$; puede ser expresión algebraica de este problema:

  ¿Cuál es el número cuyo triple, aumentado en 5 sea igual a 11?

  - Luego el número desconocido es "x".
  - Cuyo triple es: $3x$
  - Aumentado en 5 es: $3x + 5$
  - Es igual a 11; o sea: $3x + 5 = 11$

  Resolviendo la ecuación; $3x + 5 = 11$; tenemos que:

  $3x = 11 - 5 = 6$ ➡ $x = \frac{6}{3} = 2$ ➡ $\therefore$ $x = 2$ ***Rpta:*** El número es 2

* **Planteo de un Problema**: Por plantear un problema se entiende acomodar todos sus términos conocidos y desconocidos con respecto a la incógnita, de tal suerte que se obtenga una ecuación, expresando fielmente el sentido del problema dado.

* **Normas para el Planteo**: Aunque no hay reglas fijas para el planteo de problemas, de donde vienen las dificultades para resolver, éstas se superan y vencen únicamente con la constante práctica de múltiplos y variados problemas (Ejercicios). Con todo se pueden seguir estas normas generales:

a) Saber determinar bien, cuál es la cantidad que se ha de considerar como incógnita del problema.

b) Relacionar con precisión estas cantidades entre si, con respecto a la incógnita.

c) Igualar las expresiones equivalentes, resolviendo la ecuación obtenida.

Ejemplo: ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{5}$; aumentado en 3 es igual a sus $\frac{3}{4}$; disminuido en 4.

Raciocinio: El número buscado es "x".

- cuyos $\frac{2}{5}$ es: $\frac{2}{5}x$
- aumentado en 3 es: $\frac{2}{5}x + 3$
- sea igual .... =
- a los $\frac{3}{4}$ del mismo número o sea: $\frac{3}{4}x$
- disminuido en 4 osea: $\frac{3}{4}x - 4$

Planteo: $\frac{2}{5}x + 3 = \frac{3}{4}x - 4$; transponemos términos

$$\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}x = -4 - 3 \Rightarrow \frac{4.2x - 5.3x}{5.4} = -7 \Rightarrow \frac{8x - 15x}{20} = -7$$

$$-7x = -7.20 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 20}$$

Rpta: El número buscado es 20.

* **Clases de Problemas**: Considerando los valores que corresponden a las raíces de los problemas, éstos pueden ser:

a) Determinados: Cuando tienen un número limitado de soluciones.

b) Indeterminados: Cuando tienen un número ilimitado de soluciones.

c) Absurdos: Cuándo la solución no satisface al problema o es imposible hallar su valor.

Veamos ahora algunos ejemplos de problemas:

a) Problemas Determinados: Un padre tiene 46 años y su hijo 18 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la edad del hijo?

Raciocinio:

- La edad del padre es 46 años
- La edad del hijo es 18 años

* Dentro de cuántos años, o sea "x" para ambos.

Luego: La edad del padre será: $46 + x$

La edad del hijo será: $18 + x$

Enunciado: La edad del padre $(46 + x)$ será el doble de la del hijo $[\,2(18 + x)\,]$

Planteo: $46 + x = 2\,(18 + x)$

$46 + x = 36 + 2x$

$46 - 36 = 2x - x \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{10 = x}$

Rpta: Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la edad del hijo;

$46 + \mathbf{10} = 2\,(18 + \mathbf{10}) \Rightarrow 56 = 2\,(28) \Rightarrow \boxed{56 = 56}$

b) **Problema Indeterminado**: Halla un número cuyo dos tercios (2/3) sumado con un quinto (1/5) del mismo número resulta sus trece quinceavos (13/15).

Raciocinio:

- El número buscado es: x
- Cuyo dos tercios es: $\frac{2}{3}x$
- Sumados con $\frac{1}{5}$ del número que es: $\frac{1}{5}x$
- Resulte igual a $\frac{13}{15}$ del número que es: $\frac{13}{15}x$

Planteo: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x = \frac{13}{15}x$; damos Común denominador.

3 - 5 - 15	3			
1 - 5 - 5	5			
1 - 1 - 1				

C. D: $3 \times 5 = 15 \Rightarrow$ **C. D:** Significa **Común Denominador**

$\frac{5 \cdot 2x}{15} + \frac{3 \cdot 1x}{15} = \frac{13x}{15}$; simplificamos los denominadores

$10x + 3x = 13x$; pasamos "13x" al primer mienbro.

$10x + 3x - 13x = 0$

$\underbrace{(10 + 3 - 13)}\,x = 0$

$0x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = \frac{0}{0} = \textbf{Indeterminado}}$

Lo hallado no determina ningun valor concreto, más bien indica que cualquier valor puede satisfacer al problema propuesto.

c) **Problema Absurdo o Imposible**: Se han repartido chocolates entre cierto número de niños; dando a cada uno 4 chocolates, sobrarían 2 ; pero dando a cada uno 6 chocolates faltarían 3. Hallar el número de niños.

Raciocinio: Hay "x" niños.

- Dando 4 chocolates a cada uno, tenemos que $4 . x = 4x$ en este caso sobran 2, o sea: $(4x + 2)$ chocolates.

- Y dando 6 chocolates a cada uno tenemos que $6 . x = 6x$ pero faltarían 3 o sea: $(6x - 3)$ chocolates.

Planteo: Igualando: $4x + 2 = 6x - 3$

Recuerda que:

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Transponemos términos: $4x - 6x = -3 - 2$

$$-2x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{x = 2\frac{1}{2}}$$

Este resultado $2\frac{1}{2}$ es **absurdo** en si y no satisface al sentido del problema, porque el número de niños ha de ser un número que exprese enteros positivos.

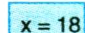
El valor hallado; $x = 2\frac{1}{2}$ satisface plenamente a la ecuación pero de ninguna manera al problema propuesto.

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Problema 1 : ¿Cuál es el número que sumado a 10 nos da 28?

Resolución:

- Representemos este número desconocido por "x".
- Que sumado a 10, o sea: $x + 10$
- Nos da 28; o sea: $x + 10 = 28$

Resolviendo la ecuación tenemos: $x = 28 - 10$  $\therefore \boxed{x = 18}$

Rpta: El número que se busca es 18.

Problema : ¿Cuál es el número cuyo triple producto; aumentado en 1 sea igual a 22?

Resolución:

- Representamos este número desconocido por "x"

- Cuyo triple producto es 3.x o sea: 3x
- Aumentado en 1 o sea: $3x + 1$
- Es igual a 22 o sea: $3x + 1 = 22$

Resolviendo la ecuación tenemos: $3x = 22 - 1 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 7}$

Rpta: El número que se busca es 7.

Problema 3: ¿Cuál es el número, cuyo triple del número aumentado en 2 es igual a 48?

Resolución:

- El número buscado es: "x"
- Cuyo triple del número aumentado en 2: $3(x + 2)$
- Es igual a 48: $3(x + 2) = 48$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$(x + 2) = \frac{48}{3} \Rightarrow x + 2 = 16 \Rightarrow x = 16 - 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 14}$$

Rpta: El número buscado es 14.

Ejemplo 4: ¿Cuál es el número cuyos $\frac{2}{3}$; aumentado en 2 es igual a sus $\frac{5}{6}$ disminuidos en 2?

Resolución:

- El número buscado es: "x"
- Cuyos $\frac{2}{3}$; o sea: $\frac{2}{3}x$
- Aumentados en 2, o sea: $\frac{2}{3}x + 2$

Sea igual .... =

- A los $\frac{5}{6}$ del mismo número: $\frac{5}{6}x$
- Disminuidos en 2 osea: $\frac{5}{6}x - 2$
- El Planteo de la ecuación será: $\frac{2}{3}x + 2 = \frac{5}{6}x - 2$

Resolviendo la ecuación tenemos: $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}x = -2 - 2$

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}x = -4$; Damos Común denominador a los dos miembros.

$$\begin{array}{cc|c} 3 - 6 & & 2 \\ 3 - 3 & & 3 \\ 1 - 1 & & \end{array} \Big\} \text{ C. D.} = 2 \times 3 = \textcircled{6}$$

$$\frac{2(2x)}{6} - \frac{1(5x)}{6} = \frac{6(-4)}{6}$$; simplificamos los denominadores.

$$4x - 5x = -24$$ (multiplico ambos miembros por -1.)

$$-x = -24$$

$\therefore$ $\boxed{x = 24}$ **Rpta:** El número buscado es 24.

Problema 5 : Dividir 27 en dos partes tales que una de ellas sea 3 unidades mayor que la otra. Hallar dichas partes.

Resolución:

- Sea "x" una de las partes
- La otra parte sería: $x + 3$

* Entiéndase que dividir es repartir, donde la suma de las partes es la cantidad por repartir o dividir.

Luego:

Primera parte + ***Segunda parte*** = ***Cantidad a dividir***

$$x \quad + \quad (x + 3) \quad = \quad 27$$

$2x = 27 - 3$ ➡ $2x = 24$ ➡ $x = \frac{24}{2} = 12$ $\therefore$ $\boxed{x = 12}$ ***(es una de las partes)***

- La otra parte será: $x + 3 = 12 + 3 = 15$

Rpta: Las partes pedidas son: 12 y 15.

Ejemplo 6 : La suma de 3 números consecutivos es 30. ¿cuáles son los números?

Resolución:

Sea el menor de los números: "x"

- El consecutivo a "x" es: $(x + 1)$
- El consecutivo a $(x + 1)$ es: $(x + 1) + 1 = (x + 2)$

* El planteo de la ecuación sería: $x + (x + 1) + (x + 2) = 30$ ➡ $3x = 30 - 1 - 2$ ➡ $3x = 27$

$x = \frac{27}{3} = 9 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 9}$ (Es el menor de los 3 números consecutivos)

Luego; los otros dos números consecutivos son: $(x + 1) = 10$ y $(x + 2) = 11$

Rpta: Los tres números consecutivos pedidos son: 9, 10 y 11.

Problema 7: La suma de dos números pares consecutivos es 50. ¿cuáles son los números?

Resolución:

Sea "x" un número par

- El número par consecutivo a "x" es: $(x+2)$

Recuerda que:

Los números pares consecutivos se diferencian en 2 unidades.
Ejemplos:
- 6, 8 y 10 son números pares consecutivos.
- 20 y 22 son números pares consecutivos

Planteo:

$$x + (x + 2) = 50 \Rightarrow 2x = 50 - 2 \Rightarrow 2x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{2} = 24$$

$\therefore \boxed{x = 24}$ (**Es uno de los números**)

Luego; el otro número par consecutivo es: $(x + 2) = 24 + 2 = 26$

Rpta: Los números pares consecutivos pedidos son: 24 y 26.

Problema 8: La suma de dos números Impares consecutivos es 48. Hallar los números:

Resolución:

Sea "x" un número impar

- El número impar consecutivo a "x" es: $(x + 2)$

Recuerda que:

Los números impares consecutivos se diferencian en 2 unidades.
Ejemplos:
- 3, 5 y 7 son números impares consecutivos.
- 11 y 13 son números impares consecutivos.

Planteo: $x + (x + 2) = 48 \Rightarrow 2x = 48 - 2 \Rightarrow 2x = 46 \Rightarrow x = \frac{46}{2} = 23$

$\therefore \boxed{x = 23}$ ***(es uno de los números)***

Luego; el otro número impar consecutivo es: $x + 2 = 23 + 2 = 25$

Rpta: Los números impares consecutivos pedidos son: 23 y 25.

Problema 9: Un padre tiene 37 años y su hijo 7 años. ¿dentro de cuántos años la edad del padre será el cuádruplo de la edad del hijo?

Resolución:

La edad del padre es: 37 años

La edad del hijo es: 7 años

- Dentro de cuántos años, o sea "x" para ambos:

Luego: La edad del padre será: $37 + x$

La edad del hijo será: $7 + x$

- La edad del padre $(37 + x)$, sea el cuádruplo de la edad del hijo $[4(7 + x)]$

Planteo: $(37 + x) = 4(7 + x) \Rightarrow 37 + x = 28 + 4x \Rightarrow x - 4x = 28 - 37$

$$-3x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{-3} = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 3}$$

Rpta: Dentro de 3 años la edad del padre será el cuádruplo de la edad del hijo.

Problema 10 : Las edades del padre y del hijo son 37 y 17 años respectivamente, ¿hace cuántos años la edad del hijo era la tercera parte de la edad del padre?

Resolución:

La edad del padre es: 37 años

La edad del hijo es: 17 años

- hace cuántos años, o sea "x" para ambos:

Luego: La edad del padre fue: $37 - x$

La edad del hijo fue: $17 - x$

- La edad del hijo $(17 - x)$, era la tercera parte de la del padre $[\frac{1}{3}(37 - x)]$.

Planteo: $(17 - x) = \frac{1}{3}(37 - x)$

$3(17 - x) = 1(37 - x)$ $\quad 51 - 3x = 37 - x$

$-3x + x = 37 - 51$

$-2x = -14 \quad x = \frac{-14}{-2} = 7 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 7}$

Rpta: Hace 7 años la edad del hijo era la tercera parte de la edad del padre.

Problema 11 : Gasté 4 soles, luego los $\frac{3}{4}$ del resto, quedándome todavía la quinta parte de lo que tenía al principio. ¿cuánto tenía?

Resolución:

Dinero que tenía = "x" soles

Sí gasté 4 soles lo que me queda es: (x - 4) soles.

Luego; gasté los $\frac{3}{4}$ del resto, o sea $\frac{3}{4}$ de lo que queda de la operación anterior: $\frac{3}{4}(x-4)$

- Lo que queda aún es : $(x-4)-\frac{3}{4}(x-4)=\frac{1}{4}(x-4)$ soles; esto que queda es la quinta parte de lo que tenía al principio o sea $\frac{1}{5}x$.

Planteo: $\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{5}x$

$5(x-4)=4x \Rightarrow 5x-20=4x \Rightarrow 5x-4x=20 \Rightarrow \therefore \boxed{x=20}$

Rpta: lo que tenía al principio era 20 soles.

Problema 12 : Por 54 soles compré cuadernos de 3 soles y de 2 soles, había tres menos que de los de 3 soles. ¿cuántos compré de cada una?

Resolución:

Sea:
- Número de cuadernos de 3 soles = x
- Número de cuadernos de 2 soles = (x - 3)

Luego:

Costo de los "x" cuadernos de 3 soles	+	Costo de los "(x - 3)" cuadernos de 2 soles	=	Dinero Total
3x	**+**	**2(x - 3)**	**=**	**54**

Planteo: $3x + 2(x-3) = 54$

Resolviendo la ecuación: $3x + 2(x-3) = 54 \Rightarrow 3x + 2x - 6 = 54 \Rightarrow 5x = 54 + 6$

$5x = 60$

$x = \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 12}$ (*Número de cuadernos de 3 soles*)

- El número de cuadernos de 2 soles es: $x - 3 = 12 - 3 = \boxed{9}$

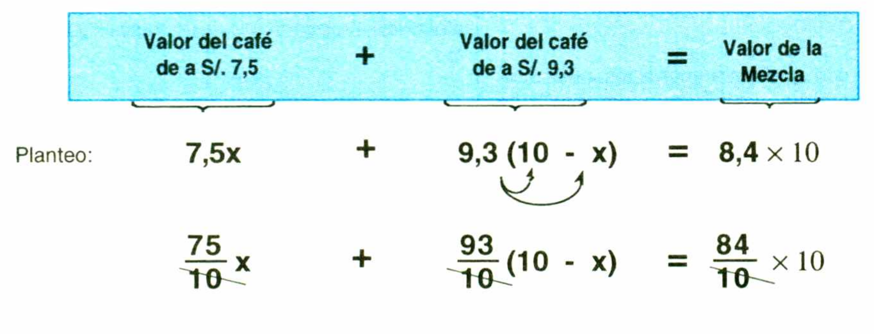
Rpta: El número de cuadernos que compró es: 12 cuadernos de 3 soles y 9 cuadernos de 2 soles.

Problema 13 : Un café que se vende a 7,5 soles el kilo, se mezcla con café que se vende a 9,3 soles el kilo; para producir una mezcla de 10 kilos que se venderá a S/. 8,4 el kilo. ¿Qué cantidad de cada clase de café deberá utilizarse?

Resolución:

Sea:

- El número de kilos de café de a 7,5 soles se denota por: x
- Entonces, el número de kilos de café de a 9,3 soles es: (10 - x)
- El valor en soles del café de 7,5 soles es : S/. 7,5x
- El valor en soles del café de 9,3 soles es : S/. 9,3 (10 - x)
- El valor en soles de la mezcla es : S/. $8,4 \times 10$



Planteo: $$7,5x + 9,3(10 - x) = 8,4 \times 10$$

$$\frac{75}{10}x + \frac{93}{10}(10 - x) = \frac{84}{10} \times 10$$

$$75x + 930 - 93x = 840$$

$$75x - 93x = 840 - 930 \Rightarrow -18x = -90 \Rightarrow x = \frac{-90}{-18} = 5$$

$\therefore$ $\boxed{x = 5}$ (***Números de Kilos de café de 7,5 soles***)

Luego, calculamos el número de kilos de S/. 9,3 : 10 - x = 10 - 5 = 5

Rpta. De cada clase se comprarán 5 kilos de café

TALLER DE EJERCICIOS Nº 61

Ejercicio 1 : Escribir una expresión algebraica que corresponda a cada una de las frases:

a) La suma de tres números naturales consecutivos, si el número del medio se denota por 2n.

b) La suma de cuatro números naturales consecutivos, si el mayor se designa por "m"

c) La suma de tres números naturales, si "x" denota el primero y se sabe que el segundo es cuatro más, que la mitad del primero y el tercero es tres veces el segundo.

Ejercicio 2 :

a) El doble de un número aumentado en 7 es 30. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Rpta. S = {8}

b) El doble de un número, aumentado en 11 es 27 . ¿Cuál es el número?

Resolución:

Rpta. S = {8}

Ejercicio 3 : Si "x" representa la edad actual en años de Nataly, escribase una expresión algebraica para cada una de las frases siguientes:

a) Dos veces su edad hace 7 años.

b) Siete años menos; que cinco veces su edad.

c) Tres veces su edad dentro de 5 años.

Ejercicio 4 : César es 18 años menor que Manuel. Si la suma de sus edades es 46 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Resolución:

Rpta. 14 y 32 años

Ejercicio 5 : La suma de cuatro números consecutivos 50. Hallar el mayor.

Resolución:

Rpta. 14

Ejercicio 6 : Hallar un número, cuyo cuádruplo, disminuido en 200 es igual al número aumentado en 1 000.

Resolución:

Rpta. 400

Ejercicio 7 : Luego de sumar 30 a un número, se multiplica por 8 y se obtiene lo mismo que si al número se le hubiera aumentado en 450. ¿Cuál es el número?

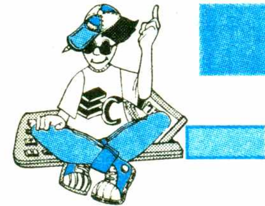
Resolución:

Rpta. 30

Ejercicio 8 : La suma de tres números enteros es 404. El segundo número supera al primero en 18 unidades y el tercero supera al segundo en 29. En consecuencia, el mayor de los tres números es:

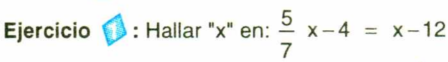
Resolución:

Rpta. 160



EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE ECUACIONES

NIVEL I



Ejercicio 1 : Hallar "x" en: $\frac{5}{7}x - 4 = x - 12$

A) 16 **B)** 28 **C)** 20 **D)** 30 **E)** 18

Ejercicio 2 : Resolver: $5(2x - 4) = 2(3x + 4)$

A) 3 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11

Ejercicio 3 : Resolver:

$$-13 - [3(x + 2) + 4] = 11 - [6(-2x - 2) + 1]$$

A) -3 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 3

Ejercicio 4 : Resolver:

$$5[a + 10 - (2a + 1)] = 3(a - 1) - 4(2a + 5)$$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2
D) -1 **E)** No hay solución

Ejercicio 5 : Si: $\frac{2}{y + 3} = \frac{2}{4 + 3\frac{1}{2}}$

Entonces "y" es igual a:

A) $4\frac{1}{2}$ **B)** $5\frac{1}{2}$ **C)** $8\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{25}{7}$ **E)** 10

Ejercicio 6 : La edad de David es el doble de la edad de Roberto; quien es 3 años mayor que Sergio. Si Sergio tiene "4a" años. ¿Cuál es la edad de David?

A) 8a **B)** 22a **C)** 14a + 2
D) 8a + 6 **E)** 8a - 6

Ejercicio 7 : Resolver:

$$8x + 2(x + 1) = 7(x - 2) + 3(x + 1) + 13$$

A) -2 **B)** 4 **C)** 3
D) -1 **E)** Indeterminado

Ejercicio 8 : Si "n" es entero. ¿Cuál de los siguientes grupos representa tres enteros consecutivos pares?

A) n ; (n + 1) ; (n + 2) **B)** n ; (n + 2) ; (n + 4)
C) 2n ; 4n ; 6n **D)** 2n ; (2n + 1) ; (2n + 2)
E) 2n ; (2n + 2) ; (2n + 4)

Ejercicio 9 : Si al séxtuplo de lo que tengo le resto 820, entonces me quedaría 40 880. ¿Cuánto tengo?

A) 7 050 **B)** 6 840 **C)** 7 040 **D)** 6 950 **E)** N.A.

Ejercicio 10 : Cinco veces un número es 10 unidades más que el triple del mismo número. Hallar el cuádruplo del número?

A) 20 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 16

Ejercicio 11 : Hallar un número entero sabiendo que la quinta parte del cubo de su diferencia con 3 es -25.

A) -1 **B)** -2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

Ejercicio 12 : Si tú piensas en un número, cuya mitad es igual a cuatro unidades más que una tercera parte del número que tienes en mente. ¿Qué número es?

A) 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 48

Ejercicio 13 : Kiko tiene 14 años menos que Adrián y ambas edades suman 56 años. Se deduce que:

I. Kiko tiene 21 años **II.** Kiko tiene 35 años
III. Adrian tiene 18 años

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** I y III
D) Sólo III **E)** Ninguna

Ejercicio 14: Resolver: $2x + 19 = \dfrac{7x}{3} + 5$; dar como respuesta: x/6

A) 14 **B)** 42 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 1

Ejercicio 15: Hallar el valor de "x" en:

$\dfrac{8x}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5x}{2} + 2$; Dar como respuesta "2x"

A) 9 **B)** 8 **C)** 18 **D)** 10 **E)** 12

Ejercicio 16: Hallar el valor de "x" en la siguiente ecuación:

$$\frac{4}{3}x - 3 = \frac{5x}{4} - 2$$

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 2 **E)** 12

Ejercicio 17: Si multiplicamos el cuadrado de la mitad de un número por el cuádruple de la tercera parte del mismo, y luego lo dividimos entre un tercio del mismo número; obtendremos:

A) La mitad del número
B) Un tercio del número
C) Un cuarto del número
D) El mismo número
E) El cuadrado del número

Ejercicio 18: Hallar el valor de "x" en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6} + \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$$

A) 1/2 **B)** 1/4 **C)** -1/4 **D)** -1/2 **E)** 1

Ejercicio 19: Resolver:

$\dfrac{x}{6} + \dfrac{3}{4} = x + \dfrac{2}{3}$; dar como respuesta: (5x)

A) 1/10 **B)** 1/5 **C)** 1/3 **D)** 1/2 **E)** 1/12

Ejercicio 20: Resolver:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\right] - 1\right\} - 1 = 0$$

A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 30

Ejercicio 21: ¿Qué número es aquel que al ser multiplicado por 5/3 aumente en 10 unidades su valor original?

A) 15 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 25

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. A	4. E	5. A
6. D	7. E	8. E	9. D	10. A
11. B	12. C	13. A	14. C	15. C
16. E	17. E	18. D	19. D	20. E
21. A				

NIVEL II

Ejercicio 1: Dada la siguiente expresión:

$$2x - [3(x - 1) + (-1)^4] = x(3 - 2) + (-4)^2$$

A) 18 **B)** 14 **C)** 8 **D)** -7 **E)** -8

Ejercicio 2: Resolver:

$$5x(8 - x) - 3x(5 - 3x) = -26 - 2x(7 - 2x)$$

A) 5/3 **B)** -3/2 **C)** 1/3 **D)** -2/3 **E)** 2/3

Ejercicio 3: Resolver:

$$(6x + 7)(5x - 4) = 6(5x^2 - 1)$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** -2

Ejercicio 4: De aquí a 15 años, Sara tendrá

cuatro veces la edad que tiene ahora. ¿Cuántos años tiene?

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 8

Ejercicio 5: La suma de tres números consecutivos pares es 54. Hallar el mayor.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 2 E) 24

Ejercicio 6: La suma de tres números consecutivos impares es 51. Hallar el menor.

A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 21

Ejercicio 7: La edad de Vanessa dentro de 8 años será de 20 años. ¿Qué edad tiene actualmente?

A) 12 años B) 13 años C) 14 años
D) 15 años E) 16 años

Ejercicio 8: La edad de Nataly hace 5 años era de 12 años. ¿Qué edad tiene actualmente?

A) 15 años B) 12 años C) 14 a ños
D) 17 años E) 18 años

Ejercicio 9: Dividir 45 en dos partes tales que una de ellas sea 5 unidades menor que la otra. Hallar una de las partes.

A) 15 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

Ejercicio 10: Hallar tres números consecutivos tales que dos veces el menor sea 57 menos que tres veces el mayor. (Dar como respuesta el mayor)

A) 53 B) 54 C) 55 D) 56 E) 57

Ejercicio 11: Hallar tres números impares consecutivos tales que la suma de los dos últimos sea 85 más que el primero. (Dar como respuesta uno de los números)

A) 78 B) 82 C) 84 D) 86 E) 83

Ejercicio 12: La suma de la tercera parte y la cuarta parte de un número es igual a su mitad más 2. ¿Qué número es?

A) 18 B) 2 C) 12 D) 24 E) 28

Ejercicio 13: Un padre tiene 50 años y su hijo 10 años. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que la edad del padre sea triple de la del hijo?

A) 8 años B) 12 años C) 10 años
D) 9 años E) 11 años

Ejercicio 14: Hallar un número cuyo quintuplo, disminuido en 7 es igual a su triple, aumentado en 3

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Ejercicio 15: Hallar el número cuyo cuádruplo disminuido en 5 es igual a su duplo aumentado en 7.

A) 15 B) 17 C) 21 D) 18 E) 19

Ejercicio 16: Las edades de un padre y su hijo son 42 y 12 años respectivamente. ¿Hace cuántos años la edad del hijo era la cuarta parte de la edad del padre?

A) 4 años B) 2 años C) 3 años
D) 6 años E) 1 año

Ejercicio 17: Dentro de cuántos años la edad del padre será 3 veces la edad del hijo, si el padre tiene 42 años y el hijo 12 años.

A) 2 años B) 6 años C) 5 años
D) 3 años E) 4 años

Ejercicio 18: Dentro de 5 años tendré el doble de años de lo que tenía hace 4 años. Hallar la edad actual.

A) 12 años B) 15 años C) 13 años
D) 16 años E) 18 años

Ejercicio 19: El número de lapicero es el doble de los lápices que tengo, si compro 7 lapiceros y un lápiz más, trendré el triple de lapiceros que lápices. ¿Cuántos lapiceros tengo?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 4

Ejercicio 20 : Vendí la octava parte de mis manzanas después la sexta parte y finalmente la quinta parte de lo que tenía. Al contarlas me quedan la mitad, menos una de las que traje. ¿Cuántas eran?

A) 140 **B)** 102 **C)** 130 **D)** 120 **E)** 150

Ejercicio 21 : El numerador de una fracción excede al denominador en 2. Si el denominador se aumenta en 7; el valor de la fracción es 1/2. ¿Cuál es la fracción?

A) 5/8 **B)** 6/7 **C)** 3/5 **D)** 5/3 **E)** 5/4

Ejercicio 22 : La suma de las edades actuales de Ana y María es 65 años, y dentro de 10 años, la edad de María será los 5/12 de la de Ana. ¿Cuál es la edad de Ana?

A) 60 años **B)** 50 años **C)** 35 años
D) 25 años **E)** 15 años

Ejercicio 23 : Hallar el número cuyos 7/8 exceden a sus 4/5 en 2.

A) 40 **B)** 40/3 **C)** 80/3 **D)** 50/3 **E)** N.A.

Ejercicio 24 : Si un número aumentado en 12 se multiplica por el mismo número disminuido en 5 resulta el cuadrado del número más 31. ¿Cuál es el número?

A) 12 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 19

Ejercicio 25 : El total recaudado por concepto de venta de 900 boletos de rifa fue de 950 soles. Si los estudiantes pagaron S/. 0,75 por cada boleto y las demás personas pagaron S/. 1,25 por cada boleto. ¿Cuántos boletos se vendieron a los estudiantes?

A) 350 **B)** 380 **C)** 550 **D)** 500 **E)** 450

Ejercicio 26 : Un café que se vende a S/. 6 el kilo, se mezcla con café que se vende a S/. 5 el kilo, para producir 20 kilos de una mezcla que se venderá a S/. 5,4 el kilo. ¿Cuántos kilos se utilizará de cada clase?

A) 6 y 14 **B)** 8 y 12 **C)** 7 y 13
D) 9 y 11 **E)** 4 y 16

Clave de Respuestas

1. D	2. D	3. B	4. B	5. C
6. B	7. A	8. D	9. B	10. D
11. E	12. D	13. C	14. C	15. B
16. B	17. D	18. C	19. B	20. D
21. D	22. B	23. C	24. B	25. A
26. B				

PROBLEMAS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1 ¿Cuál es el número impar tal que agregado a los cuatro impares que le siguen, dé un total de 905?

A) 175 **B)** 183 **C)** 191 **D)** 177 **E)** 181

Resolución:

- Sea el número impar pedido = x
- Los cuatro impares que le siguen a "x" son: (x + 2) ; (x + 4) ; (x + 6) y (x + 8)

Del enunciado; planteamos la ecuación:

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) = 905$$

$$5x + 20 = 905$$

$$5x = 905-20 \Rightarrow 5x = 885 \Rightarrow \boxed{x = 177}$$

∴ El número impar pedido es: 177 ***Rpta. D***

2 Hallar un número cuyo quíntuplo aumentado en su triple del quíntuplo da 720.

A) 30 **B)** 36 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

Resolución:

- Sea el número pedido = x

Del enunciado; planteamos la ecuación: $5x + 3(5x) = 720$

$$20x = 720 \Rightarrow \boxed{x = 36}$$

∴ El número pedido es: 36 ***Rpta. B***

3 A una iglesia asisten 399 personas entre hombres, mujeres y niños. Si el número de hombres es el quintuplo del número de mujeres y las mujeres es el triple de los niños. Hallar el número de hombres.

A) 367 **B)** 234 **C)** 315 **D)** 400 **E)** 600

Resolución:

Sea: Número de niños = x
Número de mujeres = 3x
Número de hombres = 5 (3x) = 15 x

Luego: $x + 3x + 15x = 399$

$$19x = 399 \Rightarrow \boxed{x = 21}$$

∴ Número de hombres: 15 x = 15 (21) = 315 ***Rpta. C***

4 Se tiene dos números que son entre si como 8 es a 13. Si a uno de ellos se le suma 14 y al otro se le resta su cuarta parte, los resultados son iguales. El producto de los números es:

A) 5 096 **B)** 6 656 **C)** 1 842 **D)** 5 666 **E)** 4 822

Resolución:

Sean los dos números "a" y "b"

Del enunciado: $\frac{a}{b} = \frac{8}{13}$ ⟶ $a = 8K$ (Le sumo 14)
⟶ $b = 13K$ (Le resto su cuarta parte)

Luego: $8K + 14 = 13K - \frac{1}{4}(13K)$

$$8K + 14 = \frac{39}{4}K \Rightarrow 32K + 56 = 39K \Rightarrow 56 = 7K \Rightarrow \boxed{K = 8}$$

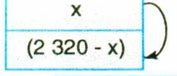
∴ El producto de los números es: 8K . 13K = 64 . 104 = 6 656 ***Rpta. B***

5 Dos números suman 2 320. Si uno de ellos le transfiere 240 unidades al otro, ambos quedan con igual cantidad. El número menor es igual a:

A) 202 **B)** 840 **C)** 1 320 **D)** 920 **E)** 1 400

Resolución:

Sean los dos números:



Le transfiere 240 unidades

Los nuevos números serán: (x - 240) ; (2 320 - x) + 240

¡ATENCIÓN!

Si dos números suman 2320, donde uno de ellos es "x"; el otro será: (2 320 - x)

Del enunciado: $(x - 240) = (2\ 320 - x) + 240$

$$2x = 2\ 320 + 480 \Rightarrow 2x = 2\ 800 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1\ 400} \text{ (\# mayor)}$$

Luego, hallamos el valor del otro número:

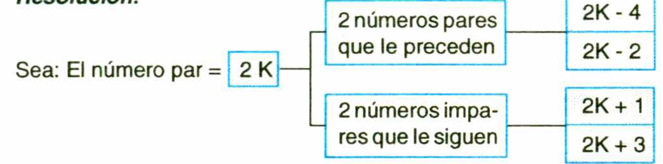
$$2\ 320 - x = 2\ 320 - 1\ 400 = \boxed{920} \text{ (\# menor)}$$

∴ El número menor es: 920 ***Rpta. D***

6 A cierto número par se le suma los dos números pares que le preceden y los dos números impares que le siguen obteniendose en total 968 unidades. La suma de los dígitos que forman el número par mencionado es:

A) 14 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 18

Resolución:



Del enunciado; planteamos la ecuación:

$$2K + (2K-4) + (2K-2) + (2K+1) + (2K+3) = 968$$

$$10K - 2 = 968$$

$$10K = 970 \Rightarrow \boxed{K = 97}$$

Luego, el número par mencionado es: 2K = 2 (97) = 194

∴ La suma de los dígitos que forman el número par mencionado es: 1 + 9 + 4 = 14 ***Rpta. A***

7 Una señora tuvo a los 24 años dos hijos mellizos. Hoy las edades de los tres suman 57 años. ¿Qué edad tienen los mellizos?

A) 9 **B)** 11 **C)** 33 **D)** 13 **E)** N.A.

Resolución:

- Este tipo de problemas, se resuelve de la manera siguiente:

	Pasado		Presente
Señora	24 años	$\xrightarrow{+x}$	(24 + x)
Mellizo (1)	0 años	$\xrightarrow{+x}$	x
Mellizo (2)	0 años	$\xrightarrow{+x}$	x

Del enunciado: $(24+x) + x + x = 57$

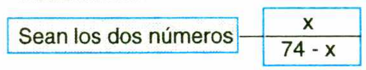
$$3x = 33 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

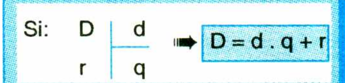
∴ Los mellizos tienen 11 años cada uno ***Rpta. B***

8 La suma de dos números es 74, su cociente es 9, dando de residuo 4. ¿Cuál es la diferencia de estos números?

A) 40 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 20 **E)** 30

Resolución:





Del enunciado:

$$\begin{array}{l|l} x & 74 - x \\ \hline 4 & 9 \end{array} \Rightarrow x = 9(74-x) + 4$$

$$x = 666 - 9x + 4$$

$$10x = 670 \Rightarrow \boxed{x = 67}$$

Luego, hallamos el otro número: $74 - x = 74 - 67 = \boxed{7}$

∴ La diferencia de estos números es: 67 - 7 = 60 ***Rpta. B***

9 Preguntando un hombre por su edad, responde: "Si al doble de mi edad se quitan 17 años, se tendría lo que me falta para tener 100 años". ¿Qué edad tiene el hombre?

A) 51 años **B)** 37 años **C)** 39 años **D)** 43 años **E)** 63 años

Resolución:

Sea la edad de la persona = x

Del enunciado; planteamos la ecuación: $2x - 17 = 100 - x$

$3x = 117 \Rightarrow \boxed{x = 39}$

∴ La edad que tiene el hombre es: 39 años ***Rpta. C***

10 Pedro nació cuando María tenía 18 años. Si actualmente la suma de sus edades es 64 años. ¿Cuántos años tiene María?

A) 31 **B)** 41 **C)** 27 **D)** 39 **E)** 26

Resolución:

	Pasado	Presente
Pedro	0 años $\xrightarrow{+x}$	x
María	18 años $\xrightarrow{+x}$	18 + x

Del enunciado: $x + (18 + x) = 64$

$2x = 46 \Rightarrow \boxed{x = 23}$

∴ Edad de María: 18 + x = 18 + 23 = 41 años ***Rpta. B***

11 El doble de un número sumado con el triple de otro dá como resultado 8, y el quintuple del segundo es igual al triple del primero, aumentado en 7. Dar la suma de ambos números.

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 5

Resolución:

Sea los dos números "a" y "b"

Del enunciado; planteamos las ecuaciones:

$* \quad 2a + 3b = 8 \quad \ldots(I)$

$** \quad 5b = 3a + 7 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{3a+7}{5} \quad \ldots(II)$

Reemplazamos (II) en (I): $2a + 3\left(\dfrac{3a+7}{5}\right) = 8 \quad \Rightarrow \quad 10a + 9a + 21 = 40$

$19a = 19 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$

Reemplazamos el valor de a = 1; en (II): $b = \dfrac{3(1)+7}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 2}$

∴ La suma de ambos números es: a + b = 1 + 2 = 3 ***Rpta. E***

12 Dos obreros trabajan juntos ganando semanalmente uno de ellos S/. 20 más que el otro. Después de igual número de semanas reciben S/. 2 400 y S/. 2 100 respectivamente. ¿Cuánto gana semanalmente cada uno de los obreros?

A) S/. 110 y S/. 130 **B)** S/. 220 y S/. 240 **C)** S/. 160 y S/. 180
D) S/. 100 y S/. 120 **E)** S/. 140 y S/. 160

Resolución:

Sea: S/. x = lo que gana uno de los obreros.
S/. (x + 20) = lo que gana el otro obrero.
y = número de semanas que trabaja cada obrero.

Del enunciado; planteamos las ecuaciones:

*) y . S/. x = S/. 2 100

**) y . S/. (x + 20) = S/. 2 400 ⇒ $\underbrace{y \cdot S/.\ x}$ + S/. 20 y = S/. 2 400

S/. 2 100 + S/. 20 y = S/. 2 400

S/. 20 y = S/. 300 ⇒ $\boxed{y = 15}$

Luego; calculamos lo que gana cada obrero:

- Un obrero gana: y . S/. x = S/. 2 100 ⇒ 15 . S/. x = S/. 2 100 ⇒ ∴ $\boxed{x = S/.\ 140}$
- El otro obrero gana: S/. (x + 20) = S/. (140 + 20) = $\boxed{S/.\ 160}$

∴ Cada obrero gana semanalmente: S/. 140 y S/. 160 ***Rpta. E***

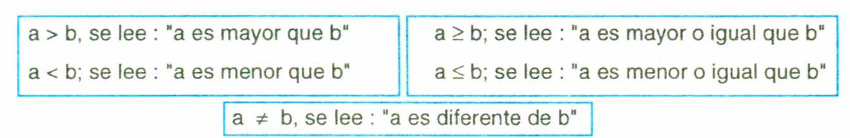
7.3.5 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

7.3.6 DESIGUALDAD

Se llama desigualdad a la relación entre dos cantidades de diferente valor.

Si: $a \neq b \Rightarrow a > b$ ó $a < b$

- **La Nomenclatura a emplear es:**



$a > b$, se lee : "a es mayor que b"	$a \geq b$; se lee : "a es mayor o igual que b"
$a < b$; se lee : "a es menor que b"	$a \leq b$; se lee : "a es menor o igual que b"

$a \neq b$, se lee : "a es diferente de b"

7.3.7 CLASES DE DESIGUALDADES

I) **Desigualdad absoluta.-** Es aquella que se verifica para todos los valores reales que se asignan a sus variables.

Ejemplo:

a) $x^2 > 0$; se verifica $\forall\ x \in \mathbb{R}$

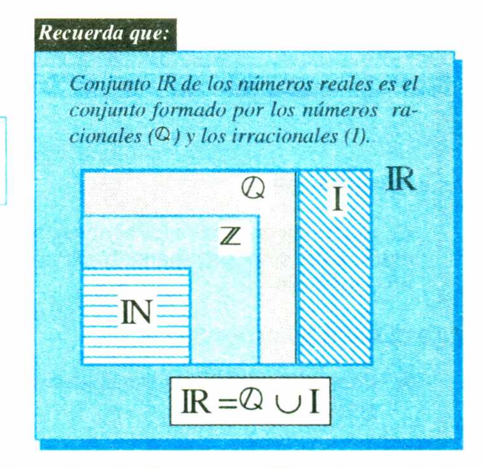
($\forall$: se lee **"Para todo"**
$\in \mathbb{R}$: **pertenece a los reales**)

Así:

$$\begin{cases} 3^2 > 0 & \Rightarrow & 9 > 0 \\ (-4)^2 > 0 & \Rightarrow & 16 > 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0 & \Rightarrow & \frac{1}{4} > 0 \end{cases}$$

Recuerda que:

Conjunto IR de los números reales es el conjunto formado por los números racionales (Q) y los irracionales (I).



II) **Desigualdad relativa o inecuación.-** Es aquella relación que se verifica solo para ciertos valores de sus incognitas.

- Para tratar este tema, es necesario estudiar previamente algunos conceptos. Veamos:

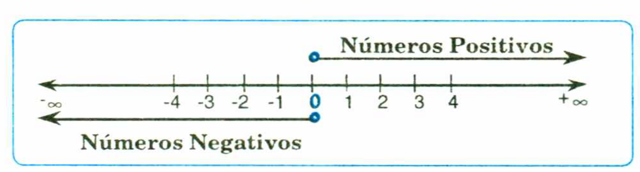
1) **Recta númerica real.-** Es aquella recta geométrica donde a cada uno de sus puntos se le hace corresponder uno y sólo un número real de donde, se definen a los números positivos y los negativos.

- **Números positivos .-** Es aquel conjunto de números mayores que el cero, es decir:

Si: "a" es positivo, entonces: $a > o$

- **Números negativos .-** Es aquel conjunto de números menores que el cero, es decir:

Si: "b" es negativo, entonces: $b < o$



- **Número mayor que otro .-** Un número será mayor que otro si y sólo si, su diferencia es un número positivo, es decir:

Si: $a > b \iff a - b > 0$

Ejemplos: **a)** $7 > 4 \iff 7 - 4 = 3$; en efecto: $3 > 0$

b) $5 > -2 \iff 5 - (-2) = 7$; en efecto: $7 > 0$

- **Número menor que otro .-** Un número será menor que otro si y sólo si; su diferencia es un número negativo. Es decir:

Si: $a < b \iff a - b < 0$

Ejemplos: **a)** $3 < 9 \iff 3 - 9 = -6$; en efecto: $-6 < 0$

b) $-5 < 6 \iff -5 - 6 = -11$; en efecto: $-11 < 0$

7.3.8 INTERVALOS

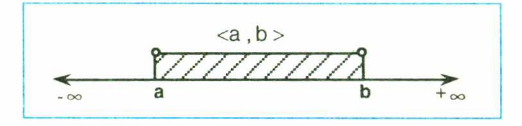
Es aquel subconjunto de los números reales (IR), cuyos elementos "x" están comprendidos entre los extremos a y b, siendo estos también números reales que pueden estar o no incluídos en el intervalo.

7.3.9 CLASES DE INTERVALOS

A) Intervalo abierto. Se llama intervalo abierto, al subconjunto de números reales comprendidos entre a y b.

El intervalo abierto se representa: $< a, b >$ ó $] a, b [$

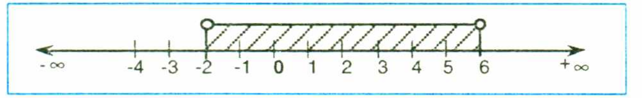
Gráficamente:



La forma de expresar que los extremos a y b no se consideran es con dos bolitas vacias como se muestra en la figura.

Donde: $x \in < a, b > \iff a < x < b$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in < -2, 6 >$



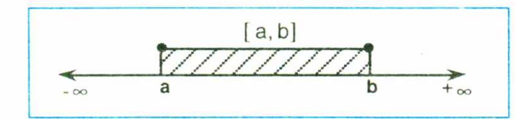
Se debe considerar todos números comprendidos entre -2 y 6; pero no a los extremos (-2 y 6).

La forma de expresar que los extremos no se consideran es con dos bolitas vacias (Ver figura).

B **Intervalo cerrado.-** Se llama intervalo cerrado, al subconjunto de números reales comprendidos entre a y b, incluyéndose "a" y "b".

El intervalo cerrado se representa: [a, b].

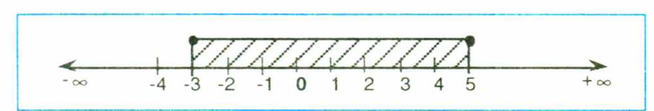
Gráficamente:



La forma de expresar que los extremos a y b si se consideran es con dos bolitas negreadas como se muestra en la figura.

Donde: $x \in [a, b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in [-3, 5]$



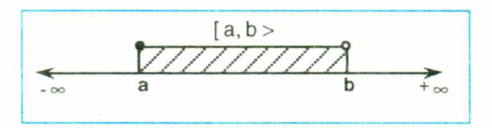
La forma de expresar que los extremos si se consideran es con dos bolitas negreadas.

C **Intervalos mixtos.-** Los intervalos mixtos pueden ser:

1 **Intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha de extremos** a **y** b.

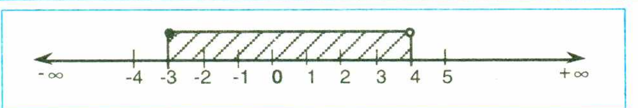
Es el subconjunto de los números reales "x", comprendidos entre a y b, sin incluir el extremo b, se representa: $[a, b >$ ó $[a, b[$

Gráficamente:



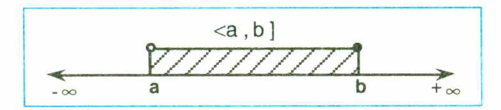
Donde: $x \in [a, b > \Longleftrightarrow a \leq x < b$

Ejemplo: Representa gráficamente: $x \in [-3, 4 >$



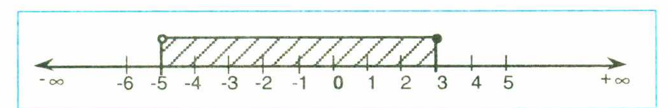
2 **Intervalo cerrado a la derecha y abierto a la izquierda de extremos** a **y** b.
Es el subconjunto de los números reales "x" comprendido entre a y b, sin incluir el extremo a, se representa: $< a, b]$ ó $]a, b]$.

Gráficamente:



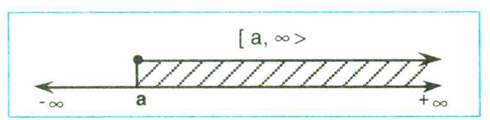
Donde: $x \in \, < a, b] \iff a < x \leq b$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in \, < -5, 3]$



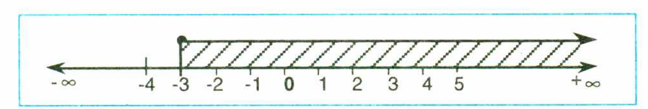
3 **Intervalo cerrado en** a **por la izquierda.** Es el subconjunto de los números reales ""x" mayores ó iguales que a; se representa: $[a, \infty>$ ó $[a, \infty[$.

Gráficamente:



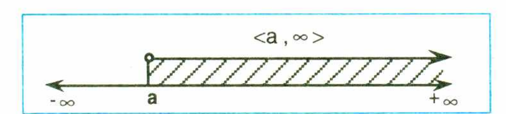
Donde: $x \in [a, \infty> \iff a \leq x < \infty$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in [-3, \infty>$



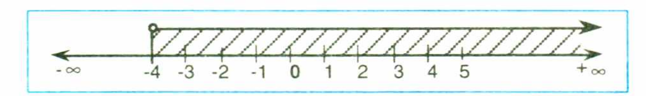
4 **Intervalo abierto en** a **por la izquierda.** Es el subconjunto de los números reales "x" mayores que a, se representa: $< a, \infty>$ ó $]a, \infty[$

Gráficamente:



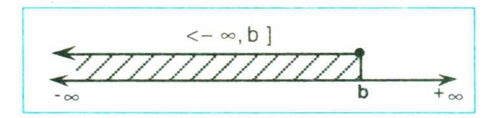
Donde: $x \in \, < a, \infty> \iff a < x < \infty$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in <-4, \infty>$



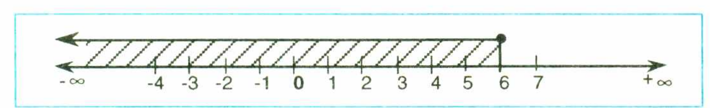
5 **Intervalo cerrado en** b **por la derecha.** Es el subconjunto de los números reales "x" menores ó iguales que b, se representa: $<-\infty, b]$ ó $]-\infty, b]$.

Gráficamente:



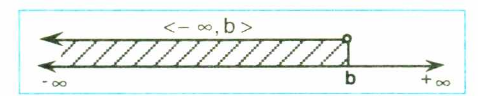
Donde: $x \in <-\infty, b] \Longleftrightarrow -\infty < x \leq b$

Ejemplo: Representar gráficamente: $x \in <-\infty, 6]$



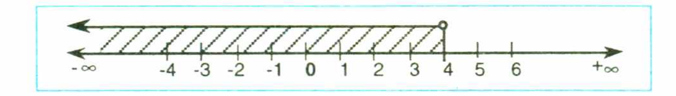
6 **Intervalo abierto en** b **por la derecha.** Es el subconjunto de la números reales "x" menores que b , se representa: $<-\infty, b>$ ó $]-\infty, b[$.

Gráficamente:



Donde: $x \in <-\infty, b> \Longleftrightarrow -\infty < x < b$

Ejemplo: Representar graficamente: $x \in <-\infty, 4>$



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE INTERVALOS

- Expresar en forma de intervalo y graficamente.

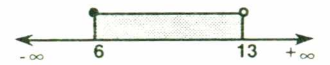
a) $6 \leq x < 13$	**c)** $-8 < x \leq 5$	**e)** $-14 \leq x \leq -4$
b) $-2 < x < 2$	**d)** $9 > x > 4$	**f)** $15 \geq x \geq 2$

Resolución:

a) $6 \leq x < 13$

En forma de intervalo: $x \in [\,6, 13\,>$

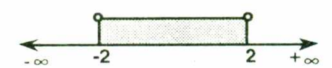
Graficamente:



b) $-2 < x < 2$

En forma de intervalo: $x \in\, < -2, 2 >$

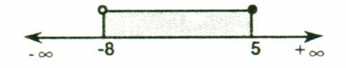
Graficamente:



c) $-8 < x \leq 5$

En forma de intervalo: $x \in\, < -8, 5\,]$

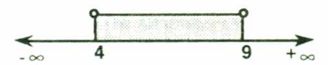
Graficamente:



d) $9 > x > 4$

En forma de intervalo: $x \in\, < 4, 9 >$

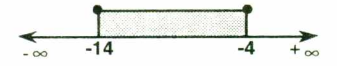
Graficamente:



e) $-14 \leq x \leq -4$

En forma de intervalo: $x \in [\,-14\,,\,-4\,]$

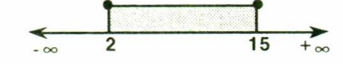
Graficamente:



f) $15 \geq x \geq 2$

En forma de intervalo: $x \in [\,2\,,\,15\,]$

Graficamente:



- **PROPIEDADES GENERALES DE LAS DESIGUALDADES**

1°) Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número, el sentido de la desigualdad ***no cambia***

Efectivamente, sea: $8 < 3$, entonces: $8 + 5 < 3 + 5$ $\therefore$ $\boxed{13 < 8}$

Esta es la propiedad más usada, veamos el siguiente ejemplo:

Resolver: $x + 5 < 11$

Restamos 5 en ambos miembros: $x + \cancel{5} - \cancel{5} < 11 - 5$ $\therefore$ $\boxed{x < 6}$

Otro ejemplo: Resolver: $x - 3 < 13$

Sumamos 3 en ambos miembros: $x - \cancel{3} + \cancel{3} < 13 + 3$ $\therefore$ $\boxed{x < 16}$

> *2°) Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido (o una igualdad y una desigualdad), resulta otra desigualdad del mismo sentido.*

En efecto, sean las desigualdades: $11 > 7$

$9 > 4$

Σ **M.A.M.:** $\underbrace{11 + 9} > \underbrace{7 + 4}$;

> Σ **M.A.M** : *Significa sumar miembro a miembro.*

$\therefore$ $\boxed{20 > 11}$

Otro ejemplo: Sean las desigualdades: $8 < 15$

$4 < 10$

- M.A.M : $8 - 4 < 15 - 10$ $\therefore$ $\boxed{4 < 5}$

> *3°) Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo la desigualdad se conserva. Si se multiplican por un mismo número negativo la desigualdad se invierte.*

En efecto sea la desigualdad: $16 < 7$

Multiplico los dos miembros por "**3**". $\mathbf{3} \cdot 16 < 7 \cdot \mathbf{3}$ $\therefore$ $\boxed{48 < 21}$

Otro ejemplo: Sea la desigualdad: $5 < 8$

Multiplico los dos miembros por "**-2**". $\mathbf{-2} \cdot 5 \ \mathbf{?} \ 8 \cdot (\mathbf{-2})$ $\therefore$ $\boxed{-10 > -16}$

Otro ejemplo: Sea la desigualdad: $-3 > -9$

Multiplico los dos miembros por "**-4**". $\mathbf{-4}(-3) \ \mathbf{?} \ -9 \cdot (\mathbf{-4})$ $\therefore$ $\boxed{12 < 36}$

Corolario

Si se cambia el signo de los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad cambia de sentido.
En efecto la alteración dicha equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por el número negativo "-1".

Así: $a < b \Rightarrow -a > -b.$

4°) Restando miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario, resulta otra desigualdad del mismo sentido que la del minuendo.

En efecto, sean las desigualdades: $8 < 10$

$5 < 6$

$-$ **M.A.M :** $8 - 5 < 10 - 6 \quad \therefore \quad \boxed{3 < 4}$

Otro ejemplo: Sean las desigualdades:

$13 > 10$

$5 < 8$

$-$ **M.A.M :** $13 - 5 > 10 - 8 \quad \therefore \quad \boxed{8 > 2}$

Otro ejemplo: Sean las desigualdades:

$9 < 23$

$4 > 2$

$-$ **M.A.M :** $9 - 4 < 23 - 2 \quad \therefore \quad \boxed{5 < 21}$

5°) Dos desigualdades entre números positivos del mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro.

En efecto, sean las desigualdades: $14 > 6$

$5 > 3$

$\times$ **M.A.M :** $14 \,.\, 5 > 6 \,.\, 3 \quad \therefore \quad \boxed{70 > 18}$

6°) Dos desigualdades entre números positivos, de sentido contrario, se pueden dividir miembro a miembro, y resulta una desigualdad del sentido de la del dividendo.

En efecto:

sean las desigualdades:

$30 > 10$

$2 < 5$

: **M.A.M :** $\frac{30}{2} > \frac{10}{5} \quad \therefore \quad \boxed{15 > 2}$

Otro ejemplo: Sean las desigualdades:

$12 < 20$

$6 > 4$

: **M.A.M :** $\underbrace{\frac{12}{6}} < \underbrace{\frac{20}{4}}$

$\therefore \quad \boxed{2 < 5}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 62

Ejercicio 1 : Utilizar los simbolos > y < para expresar una comparación correcta entre el primero y segundo número de cada uno de los pares siguientes:

a) 5..... 21	**e)** 0......-3	**i)** $(-4)^3$......$(-3)^4$	**m)** $\frac{5}{6}$......... $\frac{7}{8}$
b) -8.....-4	**f)** 7...... 4	**j)** $(-3)^2$......$(-2)^3$	**n)** $\frac{2}{5}$......... $\frac{4}{9}$
c) -5.....-21	**g)** -32....-23	**k)** $(12)^2$.....$(-7)^2$	**ñ)** $-\left(\frac{5}{9}\right)$...... $-\left(\frac{6}{11}\right)$
d) -3..... 2	**h)** 128....182	**l)** $(8)^3$......$(19)^2$	**o)** $-\left(\frac{7}{8}\right)$...... $-\left(\frac{6}{7}\right)$

Ejercicio 2 : LLenar cada espacio en blanco con un número que haga cierto el enunciado:

a) 7 <	**d)** 25 >	**g)** .....< 8	**j)** | 10 - 4 | > ....
b) -9 <	**e)** 0 >	**h)** .....< - 11	**k)** $(-3)^2$ < ......
c) - 23 < ...	**f)** | - 6 | <	**i)** ..... > 0	**l)** (-11) >.....

Ejercicio 3 : Indicar que enunciados son ciertos y cuáles son falsos:

a) 9 - 8 > 8 - 9 ... ( )	**e)** - 6 < - 5 < 0 ... ( )	**i)** 2 < | -3 | < 4 ... ( )
b) -4 . 6 < - 6 . 4... ( )	**f)** - 8 < - | - 7 | < 0 ... ( )	**j)** - 5 - 2 < - 13 < - 4 - 11... ( )
c) | 9 - 17 | > 6 ... ( )	**g)** 5 . (- 6) < 5 . 0 < 5 . 2 ... ( )	**k)** - 7 + 1 < 3 + 1 < 10 + 1 ... ( )
d) 3 . $(6)^2$ > 6 . $(3)^2$... ( )	**h)** - 7 - 3 < - 3 < 7 - 3 ... ( )	**l)** - 17 + 3 > - 20 + 3 > - 19 + 3 ... ( )

Ejercicio 4 : Si: S = { - 1, - 10, 0, 2, 3, 6, 10 }, ¿Qué elementos de S son soluciones de la inecuación : 3x - 6 < 14 - 2x ? ¿Cuáles no lo son ?

Ejercicio 5 : Si: 9 > - 6, indicar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos, y justificar las respuestas.

a) Sumamos 12 a los dos miembros: 9 + 12 > - 6 + 12 .... ( )

b) Sumamos - 7 a los dos miembros: 9 + (-7) > - 6 + (-7) .... ( )

c) Multiplicamos por 4 a los dos miembros: 9 . 4 > -6 . 4 .... ( )

d) Multiplicamos por - 3 a los dos miembros: - 3.9 > - 3.(- 6) .... ( )

e) Multiplicamos por - 10 a los dos miembros: -10.9 < -10.(- 6) .... ( )

Ejercicio 6 : Si: $a < 8$, indicar cuáles de los enunciados siguientes son ciertos, y justificar las respuestas.

a) Sumamos 3 a los dos miembros: $a + 3 < 8 + 3$	.... ( )
b) Sumamos - 2 a los dos miembros: $a + (-2) < 8 + (-2)$	.... ( )
c) Multiplicamos por 5 a los dos miembros: $a . 5 < 5 . 8$	.... ( )
d) Multiplicamos por -4 a los dos miembros: $-4 . a < -4 . 8$	.... ( )
e) Multiplicamos por -1 a los dos miembros: $-1 . a > -1 . 8$	.... ( )

Ejercicio 7 : Indicar si los enunciados siguientes son ciertos o falsos, y corregir los enunciados que se consideren falsos:

a) $4 < 5$ y $-4 > -5$ ... ( )	c) $-1 < -3$ y $1 < 3$ ... ( )	e) $-5 < 2$ y $5 > -2$ ... ( )
b) $7 > -8$ y $-7 < 8$ ... ( )	d) $-12 > -6$ y $12 > 6$ ... ( )	f) $-7 > -10$ y $7 < 10$ ... ( )

Ejercicio 8 : Si: $-9 > -11$ ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos ?

a) $-9 - 5 > -11 + 4$	... ( )
b) $-9 - 5 > -11 - 5$	... ( )
c) $-9 . 13 > -11 . 13$	... ( )
d) $-9 . (-4) > -11 . (-4)$	... ( )
e) $-9 . (-1) < -11 . (-1)$	... ( )

Ejercicio 9 : Si: $b < 7$ ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos ?

a) $b + (-3) < 7 + (-3)$	... ( )
b) $b + 11 < 7 + 11$	... ( )
c) $b . 3 < 7 . 3$	... ( )
d) $b . (-1) < 7 . (-1)$	... ( )
e) $b . (-5) > 7 . (-5)$	... ( )

Ejercicio 10 : Expresar en forma de intervalo y gráficamente:

a) $6 \leq x < 17$ ⇒	d) $10 > x \geq -2$ ⇒	g) $-4 < x \leq 6$ ⇒ ....
b) $-9 < x < -1$ ⇒	e) $13 > x > 4$ ⇒	h) $12 > x > -1$ ⇒ ....
c) $5 < x < 16$ ⇒	f) $11 \geq x \geq 3$ ⇒	i) $-3 \geq x > -10$ ⇒ ....

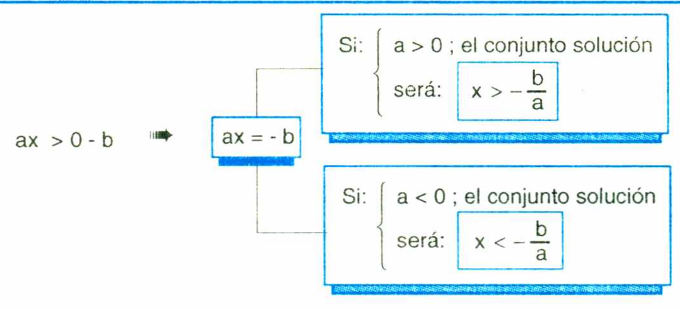
7.4 INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Son aquellas que al reducirse toma una de las formas siguientes.

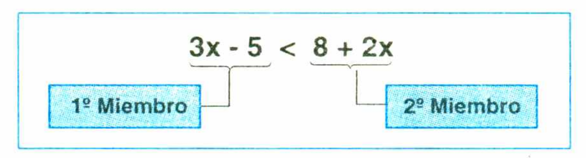
$ax + b > 0$	$ax + b \geq 0$
$ax + b < 0$	$ax + b \leq 0$

Donde: $\begin{cases} x & : \text{Incógnita} \\ a \text{ y } b & : \text{Coeficientes} \\ & \quad a \text{ y } b \in \mathbb{R} \end{cases}$

De la ecuación: $ax + b > 0$; pasamos "b" al segundo mienbro como - b.



- En toda inecuación se consideran dos miembros:
  - **Primer Miembro**, Todo lo escrito a la izquierda del signo.
  - **Segundo Miembro**, Todo lo escrito a la derecha del signo.



7.4.1 RESOLVER UNA INECUACIÓN

Es hallar su conjunto solución, esto es, el conjunto de todos los valores de "x" que conviertan el enunciado abierto en una proposición verdadera.

Para resolver inecuaciones de primer grado seguinos los siguientes pasos:

1º Se suprimen los signos de colección, si los hay.

2º Se reduce la inecuación al común denominador, si es fraccionaria

3º Se reunen las incógnitas en el primer miembro y los demás en el segundo (transposición de términos).

4º Se reunen los términos semejantes, si los hay.

5º Se despeja la incógnita.

Ejemplo 1: Hallar el conjunto solución de la inecuación: $2x - 5 < 3$, en el conjunto IN de los números naturales.

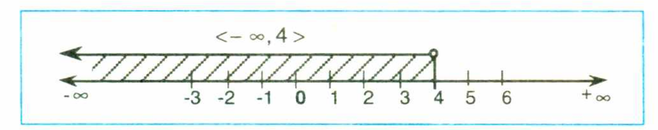
Resolución:

$2x - 5 < 3$; Transponemos términos: $2x < 3 + 5$

$2x < 8$; despejamos "x"

$x < \frac{8}{2}$ ∴ $x < 4$ (los números naturales menores que 4 son: 3, 2, 1 y 0.)

Graficando La Recta Numérica:



Como se observará "x" tomará cualquier valor numérico menor que 4, pero en este caso del problema solo nos pide números naturales menores que 4, siendo estos los números: 0, 1, 2 y 3

Rpta: El conjunto solución de la Inecuación: $2x - 5 < 3$, es:
$S = \{x \in IN / x < 4\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3\}$

Ejemplo 2 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $3x - 7 \leq 11 - 3x$, en el conjunto IN de los números naturales.

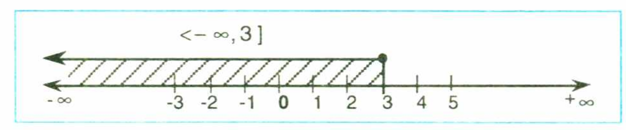
Resolución:

$3x - 7 \leq 11 - 3x$; Transponemos términos: $3x + 3x \leq 11 + 7$

$6x \leq 18$; despejamos "x"

$x \leq \frac{18}{6}$ ∴ $x \leq 3$ (los números naturales menores o igual a 3 son: 3, 2, 1 y 0)

Graficando en la Recta Numérica:



Como se observará en la gráfica "x" toma cualquier valor numérico que sean menores o igual a 3, pero para nuestro problema solo nos piden los valores naturales siendo estos: 0, 1, 2 y 3.

Rpta: El conjunto solución de la inecuación: $3x - 7 \leq 11 - 3x$
es: $S = \{x \in IN / x \leq 3\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3\}$

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la inecuación: $12x + 5 < 3x + 50$, en el conjunto IN de los números naturales

Resolución:

$12x + 5 < 3x + 50$; Transponemos términos: $12x - 3x < 50 - 5$

$9x < 45$; despejamos "x"

$x < \frac{45}{9}$ ∴ $x < 5$ (los números naturales menores que 5 son: 4, 3, 2, 1 y 0)

Rpta: El conjunto solución de la inecuación: $12x + 5 < 3x + 50$,
es: $S = \{x \in IN / x < 5\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Ejemplo 4 : ¿Cuál es el menor número natural que satisface la siguiente inecuación:

$$5(2x - 3) > 7x - 3\ ?$$

Resolución:

$5(2x - 3) > 7x - 3$; efectuamos el producto indicando en el primer miembro.

$10x - 15 > 7x - 3$; Transponemos términos: $10x - 7x > -3 + 15$

$3x > 12$; despejamos "x"

$x > \frac{12}{3}$ ⇒ $\therefore$ $\boxed{x > 4}$ (los números natural mayor que 4 es el 5)

Rpta: El menor número natural que satisface la inecuación: $5(2x - 3) > 7x - 3$; es el número 5.

Ejemplo 5 : ¿Cuál es el mayor valor natural que satisface la siguiente inecuación:

$$5(x - 1) \geq 2(3x - 4)\ ?$$

Resolución:

$5(x - 1) \geq 2(3x - 4)$; efectuamos los producto indicados en ambos miembros

$5x - 5 \geq 6x - 8$; Transponemos términos: $5x - 6x \geq -8 + 5$

$-x \geq -3$; al multiplicar por -1 a los dos miembros, el signo de orden cambiaria

$-1(-x) \leq -1(-3)$ ⇒ $\therefore$ $\boxed{x \leq 3}$ (El mayor valor natural que toma es el 3)

Rpta: El mayor valor natural que satisface la inecuación: $5(x - 1) \geq 2(3x - 4)$, es el número 3.

Ejemplo 6 : ¿Cuál es el mayor valor natural que satisface la siguiente inecuación:

$$\frac{x}{2} + 5 < \frac{x}{3} + 6\ ?$$

Resolución:

$$\frac{x}{2} + 5 < \frac{x}{3} + 6$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 6 - 5$$

Aplicamos el producto Cruzado
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$

$$\frac{3.x - 2.x}{2.3} < 1$$

$\frac{3x - 2x}{2.3} < 1$ ⇒ $\frac{x}{6} < 1$; despejamos "x"

$x < 1 \cdot 6$ ⟹ $\therefore$ $\boxed{x < 6}$ (El mayor valor natural que toma x es el número 5)

Rpta: El mayor valor natural que satisface la inecuación: $\frac{x}{2} + 5 < \frac{x}{3} + 6$; es el número 5.

Ejemplo 7 : ¿Cuál es el menor entero que satisface la siguiente inecuación:

$$\frac{x+2}{3} < \frac{2x+7}{5} \ ?$$

Resolución:

$\frac{x+2}{3} < \frac{2x+7}{5}$; transponemos términos.

$5(x+2) < 3(2x+7)$; efectuamos los productos indicados

$5x + 10 < 6x + 21$; nuevamente transponemos términos.

$5x - 6x < +21 - 10$

$-x < 11$; al multiplicar por -1 a los dos miembros, el signo de orden cambiaria

$-1(-x) > -1(11)$ ⟹ $\therefore$ $\boxed{x > -11}$ (El menor entero que toma "x" es el número -10)

Rpta: El menor entero que satisface la inecuación: $\frac{x+2}{3} < \frac{2x+7}{5}$; es el número -10.

Ejemplo 8 : ¿Cuál es el menor entero que satisface la siguiente inecuación:

$$\frac{x-7}{2} - \frac{1}{3} > 1 + \frac{x+9}{9} \ ?$$

Resolución:

Damos común denominador:

2 - 3 - 9	2		
1 - 3 - 9	3	C. D = 2 × 3 × 3 = (18)	
1 - 1 - 3	3		
1 - 1 - 1			

Luego: $\frac{9(x-7)}{18} - \frac{6.1}{18} > \frac{18.1}{18} + \frac{2(x+9)}{18}$

Simplificamos los denominadores. $9(x-7) - 6 > 18 + 2(x+9)$

$$9x - 63 - 6 > 18 + 2x + 18$$

Transponemos términos: $9x - 2x > 18 + 18 + 63 + 6$

$7x > 105$; despejamos "x". $x > \frac{105}{7}$

$\therefore$ $x > 15$ (El menor entero que toma "x" es el número 16)

Rpta: El menor entero que satisface la inecuación: $\frac{x-7}{2} - \frac{1}{3} > 1 + \frac{x+9}{9}$, es el número 16.

Ejemplo 9 : ¿Hallar el menor entero que no satisface a la siguiente inecuación:

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{7x}{4} > 7 \ ?$$

Resolución:

Damos común denominador:

3 - 2 - 4	2			
3 - 1 - 2	2	C. D = 2 × 2 × 3 = (12)		
3 - 1 - 1	3			
1 - 1 - 1				

Luego: $\frac{4.2x}{12} + \frac{6.x}{12} - \frac{3.7x}{12} > \frac{12.7}{12}$

Simplificamos los denominadores. $8x + 6x - 21x > 84$

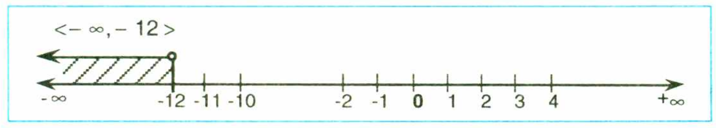
$-7x > 84$

- Multiplicamos por -1 a los dos miembros y cambia el signo de orden.

$$(-1)(-7x) > (-1) . 84$$

- Efectuamos los productos indicados. $7x < -84$
- Despejamos x. $x < \frac{-84}{7}$ ➠ $\therefore$ $x < -12$

Luego para su mejor comprención gráficamos el resultado hallado, en la recta numérica, veamos:



De acuerdo a la gráfica el menor entero que no satisface a la inecuación dada es el número - 12.

Rpta: El mayor entero que no satisface a la inecuación: $\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{7x}{4} > 7$, es el número - 12.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE INECUACIONES

Problema 1 : Obtener el menor número natural tal que siete menos que cinco veces el número sea mayor que 63.

Resolución:

Sea: "x" el número que buscamos.

Del enunciado del problema planteamos la inecuación: $5x - 7 > 63$

Entonces, resolvemos la inecuación asi: $5x > 63 + 7$

$5x > 70$; despejamos x.

$x > \frac{70}{5}$ ➧ $x > 14$ (El menor número entero que toma "x" es el número 15)

Rpta: El menor número natural que es una solución de la inecuación es 15.

Problema 2 : Hallar el menor par de números naturales consecutivos tales que un tercio del número menor sumado a un cuarto de número mayor exceda a 16.

Resolución:

Sean los dos números naturales consecutivos: Menor : x ; Mayor : x + 1

Del enunciado del problema, planteamos la inecuación:

Un tercio del número menor sumado a un cuarto del número mayor exceda a 16.

$$\frac{1}{3}x \quad + \quad \frac{1}{4}(x+1) \quad > \quad 16$$

Entonces, resolvemos la inecuación asi:

$$\frac{4.1x + 3.1(x+1)}{3.4} > 16$$

$$\frac{4x + 3x + 3}{12} > 16$$

➧ $7x + 3 > 16 . 12$ ➡ $7x > 192 - 3$

$7x > 189$ ➡ $x > \frac{189}{7}$

$\therefore$ $x > 27$ (El menor entero que toma "x" es el número 28)

Rpta: El menor par de número naturales consecutivos que cumplen con la inecuación son: 28 y 29.

Problema 3: Manuel compra dos veces el número de cuadernos de S/. 5. que el de S/. 8. Si no tiene más de S/. 360. Para gastar en cuadernos. ¿Cuál será el número máximo de cuadernos de S/. 5. Que puede comprar?

Resolución:

Sea: x = número de cuadernos de S/. 8.

2x = número de cuadernos de S/. 5.

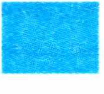
Luego: **(Lo que paga por los cuadernos de S/. 5.) + (Lo que paga por los cuadernos de S/. 8.) ≤ (Lo que paga en total)**

S/. 5 . (2x) + S/. 8 . (x) ≤ S/. 360

Resolviendo la inecuación se tiene: $10x + 8x \leq 360$

$$18x \leq 360 \Rightarrow x \leq \frac{360}{18} \Rightarrow x \leq 20$$

Rpta: El máximo número de cuadernos de S/. 5 que puede comprar es 2x = 2(20) = 40.



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE INECUACIONES

Ejercicio 1: Hallar el conjunto solución de cada inecuación, sabiendo que "x" pertenece al conjunto IN de los números naturales.

a) $2 - 3x \leq 9 - 4x$	**d)** $2x + 3 > 3(x - 2)$	**g)** $2(x + 1) + 3 > 5(x - 2) + 7$
b) $5x - 2 < 2x + 10$	**e)** $3x - 4 < 2x + 6$	**h)** $3/2\,x - 3 \leq 2 - x$
c) $x - 2 < 10 + \frac{x}{2}$	**f)** $3x + 6 > 6x - 12$	**i)** $9/7\,x + 3 < 2/7\,x + 11$

Ejercicio 2 : Hallar el conjunto solución de cada inecuación sabiendo que "x" pertenece al conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

a) $12x - 1 < 3x - 37$	**e)** $2(x+1) + 7 \leq 17$	**i)** $\frac{x}{6} + 7 < \frac{1}{3} + \frac{x}{2}$
b) $3x - 7 < 5x + 9$	**f)** $\frac{x-3}{4} < \frac{x-1}{3} + 2$	**j)** $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 6 \geq x - \frac{x}{10}$
c) $8x - 9 < 21 - 7x$	**g)** $\frac{3x-2}{2} < \frac{3x-4}{5} - 2$	**k)** $\frac{2}{7}x + \frac{x}{3} - \frac{5}{14}x > 11$
d) $3x - 8 < 5(2x - 3)$	**h)** $\frac{x}{7} + 3 \geq \frac{x}{8} + 4$	**l)** $\frac{x-3}{10} < 4 + \frac{x+7}{5}$

Ejercicio 3 : El enunciado abierto; $(x - 2) + x + (x + 2) < 60$ podría ser una traducción como el siguiente: La suma de tres números enteros impares consecutivos es menor que 60. Redactense enunciado linguísticos que correspondan a cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

a) $x + (x+3) < 27$	**c)** $5x \geq x + 40$	**e)** $\frac{x}{2} - 3 \leq 5$
b) $12x \leq 36$	**d)** $3x + 1 < 16$	**f)** $x + (x+1) + (x+2) < 26$

Ejercicio 4 : Escribir un enunciado abierto para cada uno de los enunciados lingüistícos siguientes; y dar el dominio y el significado de la variable empleada; entonces, resolver cada inecuación respecto de la variable:

a) Diéz más tres veces un número es menor que 30.
b) Ocho menos cinco veces un número es mayor que 45.
c) Dos veces un número menos siete es 80, al menos.
d) Cinco más un cierto número es 20, a lo más

Ejercicio 5 : Problemas sobre inecuación:

a) Obtener el mayor entero tal que cinco más siete veces el entero sea menor que 40.

b) Hallar el menor par de números naturales consecutivos tales que un quinto del número menor sumado a un sexto del número mayor exceda a 2.

c) ¿Cuál es el menor número natural que satisface la siguiente inecuación: $7(4x - 5) > 23x - 5$?

d) ¿Cuál es el mayor valor natural que satisface la siguiente inecuación: $7(x - 2) \geq 4(5x - 9) - 4$?

e) ¿Cuál es el mayor valor natural que satisface la siguiente inecuación: $\frac{x}{6} + 21 < \frac{x}{7} + 22$?

f) ¿Cuál es le mayor valor entero que satisface la siguiente inecuación: $\frac{4x+9}{5} < \frac{3x+6}{4}$?

g) ¿Cuál es el menor entero que satisface la siguiente inecuación: $\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{4} > 4 + \frac{2x-10}{8}$?

h) ¿Hallar el mayor entero que no satisface a la siguiente inecuación: $\frac{11x}{5} - \frac{5x}{6} - \frac{x}{2} < 26$?

i) ¿Hallar el mayor entero que no satisface a la siguiente inecuación: $\frac{3}{4}x + \frac{x}{7} - \frac{7}{8}x < 1$?

j) Sara compra tres veces el número de lapiceros de S/. 3. que el de S/. 4. Si no tiene más de S/. 780 para gastar en lapiceros. ¿Cuál será el número máximo de lapiceros de S/. 3. que puede comprar?

k) Nataly compra dos veces el número de platos de S/. 7 que el de S/. 9. Si no tiene menos de S/. 414. Para gastar en platos. ¿Cuál será el número mínimo de platos de S/. 9. que puede comprar?

Clave de Respuestas

1.
a) $S = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 7\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 4\}$ ó $S = \{10, , 2, 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 24\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 23\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 9\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 8\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 9\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 8/3\}$ ó $S = \{0, 1, 2\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 2\}$ ó $S = \{0,1, 2\}$
i) $S = \{x \in \mathbb{N} / x < 8\}$ ó $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, 7\}$

2
a) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x < -4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > -8\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x < 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > 1\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 4\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > -29\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x < -2\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 56\}$
i) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > 20\}$
j) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 30\}$
k) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > 14\}$
l) $S = \{x \in \mathbb{Z} / x > -57\}$

5
a) 4 b) 6 y 7 c) 7 d) 2 e) 41 f) -7
g) 9 h) 29 i) 55 j) 180 k) 18

¿SABÍAS QUE...

... para multiplicar el siguiente número 1034482758620689655172413793 (que es un poco kilométrico), por 3, lo que hay que hacer es mudar el 3 final para el primer lugar?

Compruébalo.

....

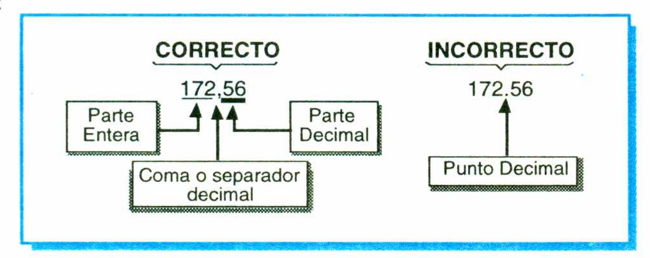
SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES S.I.

8 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES - S I.

8.1 NORMAS PRELIMINARES

a) La escritura de los valores numéricos se hará utilizando las cifras arábigas, la numeración decimal, y se separará la parte entera de la decimal mediante una coma (,). No se utilizará el punto (.) para separar enteros decimales.

Ejemplo:



* Veamos otros ejemplos:

Correcto	Incorrecto
36,215	36.215
5 142,83	5 142.83
0,231 7	0.2317

b) Para facilitar la lectura de los valores numéricos se recomienda escribirlos en grupos de tres cifras (contados a partir de la coma decimal hacia la izquierda o derecha) separados por un espacio en blanco.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
3 572 214,36	3 572,214.36
0,285 41	0.28541
0,000 216 9	0.000 216 9

c) Se podrá omitir el espacio en blanco en valores numéricos de cuatro cifras. También cuando se escriben los años ya sea en fechas o no, en acotaciones de dibujos técnicos, en códigos de identificación, números telefonicos, numeración de elementos en serie, en computación. En valores numéricos escritos en documentos en los que podría haber lugar a fraude o estafa, se pueden suprimir los espacios entre grupos.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
7245 ó 7 245	7,245
0,7214 ó 0,721 4	0.7214
año de 1993	año de 1,993

d) Los valores numéricos que sólo contengan parte decimal, deben escribirse con un Cero a la izquierda del separador decimal, que es indicativo de que no tiene parte entera.

Ejemplo:

Correcto	Incorrecto
0,372 5	,372 5
0,846	,846

e) Cuando se escriba un valor numérico entero, no es necesario escribir la coma decimal y los ceros a la derecha, siempre y cuando esos ceros no sean cifras significativas.

- Cuando se escriban valores numéricos encolumnados, la coma decimal debe escribirse en una sola columna.
- Cuando se escriban valores numéricos en serie estos deberán separarse entre si con punto y coma. **La coma es Separador Decimal**.

Ejemplos:

	Correcto	Incorrecto
Números naturales menores que 8	1; 2; 3; 4; 5; 6; 7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Serie de valores	5,40 ; 6,35 ; 7,30	5, 40, 6, 35, 7, 30
Coordenadas de un punto en el plano	(2,3; 6,4)	(2, 3, 6, 4)

f) Cuando sea necesario presentar varios valores numéricos seguidos de la misma unidad de medida, se encolumnarán los valores muméricos y se escribirá la unidad de medida, únicamente en la linea del primer valor numérico y en un margen separado con un espacio en blanco de la cifra más extrema de la derecha de los valores numéricos.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
325,60 Kg	325,60kg
18,483 65	18,483 65
5 267,23	5 267,23
0,741	0,741

Correcto		Incorrecto
24	N	24 N
736,142 5	kg	736,142 5 kg
4 080,6	Pa	4 080,6 Pa
19,73	mm	19,73 m m

g) El sistema internacional "**SI**" elimina los exponentes: 1, 2, 3, etc que el sistema métrico decimal "SMD" empleaba para indicar los millones, billones, trillones, etc, y los reemplaza como en el caso de "mil" por espacios en blanco.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
5 328 176	5 328,176
7 321 673 962 134	$7^{2}321{,}673^{1}692{,}134$
4 213 652 871 324 963 142	$4^{3}213{,}652^{2}871{,}324^{1}963{,}142$

- **SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES - SI.**

Nació por acuerdo de la undécima conferencia general de pesas y medidas que se desarrolló en París, Francia en 1960.

El sistema internacional no es otra cosa que la evolución máxima a que llegó el sistema métrico decimal y está formado por unidades de base, unidades suplementarias y unidades derivadas.

Además se puede formar múltiplos y submúltiplos decimales de cada unidad, mediante el uso de prefijos.

Este nuevo sistema se constituyó desde entonces en un medio de comunicación a nivel internacional que ha permitido que más de 90 paises puedan comprender y desarrollar un lenguaje común de medición.

El Sistema Internacional de Unidades cuya sigla es **SI**, es el nuevo sistema de unidades de medida que ha sido adaptado a nivel mundial, en lugar del sistema métrico decimal y otros a fin de facilitar las transacciones comerciales.

Por ley N° 23560 promulgada el 31 de Diciembre de 1982 se establece en nuestro país el **Sistema Legal de Unidades de Medida del Perú** contenido por unidades del sistema internacional **(SI)**, y desde 1983 se hace obligatoria su enseñanza en todos los niveles del sistema educativo, asi como su aplicación en todas las actividades que se desarrollen en nuestro medio.

- **VENTAJAS DEL SISTEMA**

El sistema tiene tres ventajas importantes la primera es que sólo existe una unidad de medida para cada magnitud. Asi por ejemplo: El metro es la unidad de longitud y se elimina el "pie", "pulgada" y "yarda", "milla" y otros.

Otra de las ventajas es la utilización de un cuadro único de símbolos y abreviaturas que evita las confuciones y por último la conversión entre una y otras medidas se hace más sencilla.

- **REGLAS PARA EL USO DEL SISTEMA**

- Los nombres de las unidades del sistema internacional se escriben totalmente con **minúscula** a excepción del grado **"celsius"** que es la unidad de temperatura.
- Cuando se escriba una cantidad acompañada de una unidad del sistema internacional se recomienda escribir la cantidad seguida del símbolo de la unidad.
- Los nombres de unidades que provienen de nombres científicos deben conservarse en su forma original.
- En el encabezamienta de carteles el nombre de la unidad de medida debe escribirse en letras **mayúsculas**.
- Los símbolos no se pluralizan siempre se escriben en singular independiente del valor numérico que los acompañen.
- La escritura de los valores numéricos se hará utilizando las cifras arábigas la numeración decimal y se separará la parte entera de la decimal mediante una **coma**. No se utiliza el punto para separar enteros de decimales.
- Para facilitar la lectura de los valores numéricos se recomienda escribirlos en grupos de tres cifras a partir de la coma decimal hacia la izquierda.
- Se utiliza el grado celsius en vez de grado centigrado.

8.1.1 ESCRITURA DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

Las unidades del SI se clasifican en:

- Unidades Básicas
- Unidades Suplementarias
- Unidades Derivadas

I UNIDADES BÁSICAS

El Sistema Internacional de unidades establece las unidades siguientes:

Magnitud Física	Unidad Básica	Símbolo
Longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	k
intensidad luminosa	candela	cd
cantidad de sustancia	mol	mol

*Observación: Las unidades como el **"ampere"** y el **"kelvin"** provienen de los nombres de dos científicos, por ello sus símbolos se les escribe con mayúsculas:(**A**) y (**K**), pero el nombre de las unidades va con minúscula*

* Los nombres de las unidades tienen plural: metros, kilogramos, segundos, etc.
* Los símbolos carecen de plural y no llevan punto (.) pues no son abreviaturas sino símbolos: m kg s A K cd mol

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
metro	Metro
25 segundos	veinticinco s.
2 m	2 mts.
6 kg	6 kgs.

II UNIDADES SUPLEMENTARIAS

El Sistema Internacional de unidades, establece dos unidades suplementarias.

Magnitud Física	Unidad Básica	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

III UNIDADES DERIVADAS

Las unidades derivadas son innumerables se forman combinando algebraicamente **las Unidades Básicas y las Suplementarias**.

Las unidades derivadas se obtienen: como productos o cocientes de otras unidades.

Ejemplos:

Magnitud Física	Símbolo
Unidad de velocidad	m/s
Unidad de aceleración	m/s^2
Unidad de densidad	kg/m^3
Unidad de momento de fuerza	N.m

* Cuándo la unidad resultante es un producto, se indica poniendo el símbolo de una a continuación de la otra, separandolos con un espacio o con un punto. Al enunciarlos (Esto es, al hablarlos), se dice los nombres de los dos, uno a continuación de otro.

Ejemplos:

Wh	watt hora (significa watt multiplicado por hora)
kw.h	kilowatt hora
N.m	newton metro
Pa.s	Pascal segundo

* Cuando la unidad resultante es un cociente se indica poniendo el símbolo de una a continuación de otra, separándolas con raya oblicua a con raya de quebrado. Al enunciarlas se dicen los nombres de los dos intercalando la palabra "por" entre ellas.

Ejemplos:

kg/m^3	kilogramo por metro cúbico
km/h	kilometro por hora
$\frac{m^3}{s}$	metro cúbico por segundo

* Cuando la unidad resultante es una combinación de productos y cocientes sigue ambas reglas.

$\frac{J}{Kg. K}$ ó J / (Kg. K)	joule por kilogramo kelvin

* Jamás se debe usar más de dos rayas ablicuas en la escritura de los símbolos de una unidad compuesta.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
m/s^2	m/s/s
J/(kg.k)	J/kg/k

* No se puede cambiar nombres y símbolos al expresar el nombre de una unidad derivada.

Ejemplos:

Correcto	Incorrecto
kg/m^3 ó kilogramo por metro cúbico	kilogramo/m^3 ó kilogramo/metro Cúbico
rad/s ó radián por segundo	radián/s ó radián/segundo

* No se permite usar unidades **SI** en combinación con unidades de otro sistema. ***Ejemplo:*** kg/pie^3

* Se recomienda no usar paréntesis para agrupar las unidades del numerador. Cuando en el denominador aparecen más de dos unidades, deberán agruparse con paréntesis.

Ejemplo:

Correcto	Incorrecto
$m^2.kg/(S^3.A)$	$m^2.kg/S^3.A$ ó $(m^2.kg)/S^3.A$
J/(k.mol)	J/k.mol

III Unidades Derivadas

Magnitud Física	Unidad	Símbolo
Area	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Dencidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Fuerza (y también peso)	newton	N
Presión	pascal	Pa

* Las unidades como "Newton" y "Pascal" provienen de los nombres de dos científicos por ello sus simbolos se les escribe con mayusculas: (N) y (Pa) pero el nombre de las unidades van con minusculas.

Observación:

1) *El nombre de cada magnitud tiene su respectivo símbolo, que es único e invariable tal como se presenta en la tercera columna de los cuadros I, II y III.*

   *El símbolo **no es abreviatura** de una palabra.*

2) *Cada símbolo no lleva plural ni punto después de él. Es correcto, por ejemplo expresar "12 kilogramos" de esta manera 12 kg*

   Es incorrecto expresarlo de alguna de estas formen: 12 kg. ó 12 kgs ó 12 kgrs.

3) *Cada unidad de base tiene múltiplos y submúltiplos potencias de diez, estos se indican utilizando **prefijo**.*

***Ejemplo**: kilometro = km **prefijo**: kilo y **unidad**: metro*

***El Prefijo**: Siempre se escribe junto a la unidad, formando de esta manera una sola palabra.*

A continuación presentamos la lista de los prefijos **SI**.

	Prefijo	Símbolo	Factor	Equivalente
MÚLTIPLOS	exa	**E**	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
	peta	**P**	10^{15}	1 000 000 000 000 000
	tera	**T**	10^{12}	1 000 000 000 000
	giga	**G**	10^{9}	1 000 000 000
	mega	**M**	10^{6}	1 000 000
	kilo	**k**	10^{3}	1 000
	hecto	**h**	10^{2}	100
	deca	**da**	10^{1}	10
SUBMÚLTIPLOS	deci	**d**	10^{-1}	0,1
	centi	**c**	10^{-2}	0,01
	mili	**m**	10^{-3}	0,001
	micro	**u**	10^{-6}	0,000 001
	nano	**n**	10^{-9}	0,000 000 001
	pico	**p**	10^{-12}	0,000 000 000 001
	femto	**f**	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
	atto	**a**	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001

Observaciones

1) *No todos los prefijos son utilizados en la vida diaria.*

2) *Con excepción de los prefijos exa **(E)**; peta **(P)**; tera **(T)**; giga **(G)** y mega **(M)**; los otros símbolos se escriben con letras **minusculas**.*

3) *En el **S.I.** se recomienda utilizar los múltiplos y submúltiplos relacionados de 1 000 en 1 000.*

Asi: En lugar de 3 000 m es preferible utilizar 3 km

En lugar de 0,02 m es preferible utililzar 2 cm

4) *El símbolo de cada unidad se escribe a continuación del valor numérico dejando un espacio.*

***Ejemplos**: 16 m^2 ; 35 m/s*

8.2. UNIDADES DE LONGITUD, MASA Y PESO, SUPERFICIE (ÁREA), VOLUMEN Y CAPACIDAD

8.2.1 UNIDADES DE LONGITUD DEL S.I.

- La unidad fundamental de las medidas de longitud es el **metro.**

  El metro es la longitud del trayecto recorrido, en el vacío, por un rayo de luz en un tiempo de 1/299 792 458 segundos.

- Los múltiplos y submúltiplos del metro se dan en el cuadro siguiente:

	Unidad	Símbolo	Factor	Equivalente m
MULTIPLOS	exámetro	Em	10^{18} m	1 000 000 000 000 000 000 m
	petámetro	Pm	10^{15} m	1 000 000 000 000 000 m
	terámetro	Tm	10^{12} m	1 000 000 000 000 m
	gigámetro	Gm	10^{9} m	1 000 000 000 m
	megámetro	Mm	10^{6} m	1 000 000 m
	kilómetro	Km	10^{3} m	1 000 m
	hectómetro	hm	10^{2} m	100 m
	decámetro	dam	10^{1} m	10 m
Unidad Fundamental	**metro**	**m**	**10^{0} m**	**1 m**
SUBMULTIPLOS	decímetro	dm	10^{-1} m	0,1 m
	centímetro	cm	10^{-2} m	0,01 m
	milímetro	mm	10^{-3} m	0,001 m
	micrómetro	µm	10^{-6} m	0,000 001 m
	nanómetro	nm	10^{-9} m	0,000 000 001 m
	picómetro	pm	10^{-12} m	0,000 000 000 001 m
	femtómetro	fm	10^{-15} m	0,000 000 000 000 001 m
	attómetro	am	10^{-18} m	0,000 000 000 000 000 001 m

- Segun el sistema internacional **(S.I.)** los múltiplos **preferidos** son:

  El kilometro (km) y el megámetro (Mm).

- Los submúltiplos **preferidos** son: El milímetro (mm) y el micrómetro **(µm).**

8.2.2 CONVERSIÓN DE UNIDADES DE ORDEN SUPERIOR A INFERIOR Y VICEVERSA

- **MÉTODO DE FACTOR DE CONVERSIÓN**: Este método consiste en múltiplicar por 1 a la expresión que desea transformar como por ejemplo: queremos transformar 5 km a m; en este caso multiplicamos: 5 km $\times$ 1, donde el 1 lo reemplazamos por $\frac{1\text{Km}}{1\text{Km}}$ aúnque también podría ser $\frac{1\text{dm}}{1\text{dm}}$ ó $\frac{1\text{cm}}{1\text{cm}}$ ó $\frac{1\text{mm}}{1\text{mm}}$; como observarás cualquiera de las fracciones mencionadas es a 1

$$\text{(osea: } 1 = \frac{1\text{Km}}{1\text{Km}} = \frac{1\text{dm}}{1\text{dm}} = \frac{1\text{cm}}{1\text{cm}} = \frac{1\text{mm}}{1\text{mm}} \text{)}$$

De estas fracciones tomo la que me conviene, en este caso $\frac{1Km}{1Km}$ ya que nos dan a convertir 5 km a m; veamos:

$$5\text{ km} = 5\text{ km} \times 1 = 5\text{ km} \times \frac{1\text{ Km}}{1\text{ Km}} = 5\text{ km} \times \frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ Km}}$$

Factor de conversión

Luego: $5\text{ km} = 5\text{ km} \times \frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ Km}} = 5\,000\text{ m}$ $\therefore$ $5\text{ km} = 5\,000\text{ m} = 5 \times 10^3\text{ m}$ **Rpta.**

Ejemplo 2: Expresar: 12, 46 km en cm

Resolución:

$$12{,}46\text{ km} = 12{,}46\text{ km} \times \frac{1\,000\text{ m}}{1\text{ Km}} \times \frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}$$

(Es igual a 1) **(Es igual a 1)**

Luego: 12,46 km = 12,46 x 1 000 x 100 cm = 1 246 000 cm

$\therefore$ $12{,}46\text{ km} = 1\,246\,000\text{ cm} = 1\,246 \times 10^3\text{ cm}$ ***Rpta.***

Ejemplo 3: Expresar: 3,48 m en hm

Resolución:

$$3{,}48\text{ m} = 3{,}48\text{ m} \times \frac{1\text{ hm}}{100\text{ m}} = \frac{3{,}48\text{ hm}}{100} = 0{,}034\,8\text{ hm}$$

(Es igual a 1)

$\therefore$ $3{,}48\text{ m} = 0{,}034\,8\text{ hm} = 348 \times 10^{-4}$ ***Rpta.***

Ejemplo 4: Expresar: 36,174 mm en km

Resolución:

$$36{,}174\text{ mm} = 36{,}174\text{ mm} \times \frac{0{,}001\text{ m}}{1\text{ mm}} \times \frac{1\text{ Km}}{1\,000\text{ m}}$$

$$36{,}174 \text{ mm} = \underbrace{36\,174 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}\times \frac{1}{10^{3}}$$

$$= 36\,174 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \text{ km} = 36\,174 \times 10^{-9} \text{ km}$$

$\therefore$ $36{,}174 \text{ mm} = 36\,174 \times 10^{-9} \text{ km}$ **Rpta.**

Recuerda que:

10	$= 10^{1}$
100	$= 10^{2}$
1 000	$= 10^{3}$
0,1	$= 10^{-1}$
0,001	$= 10^{-3}$
0,000 1	$= 10^{-4}$

Ejemplo 5 : Expresar: 1 300 cm en dam

Resolución:

$$1\,300 \text{ cm} = 1\,300 \text{ cm} \times \boxed{\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}} \times \boxed{\frac{1 \text{ dam}}{10 \text{ m}}} = \frac{1\,300}{1\,000} \text{dam} = \frac{13}{10} \text{dam}$$

$$1\,300 \text{ cm} = \frac{13}{10} \text{ dam} = 1,3 \text{ dam}$$

$\therefore$ $1\,300 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ dam} = 13 \times 10^{-1} \text{ dam}$ **Rpta.**

Ejemplo 6 : Expresar: 25 000 000 µm en km

Resolución:

Sabemos que: $25\,000\,000 \ \mu\text{m} = 25 \times 10^{6} \ \mu\text{m}$

Luego: $$25\,000\,000 \ \mu\text{m} = 25 \times 10^{6} \ \mu\text{m} \times \boxed{\frac{10^{-6} \text{ m}}{1 \ \mu\text{m}}} \times \boxed{\frac{1 \text{ Km}}{10^{3} \text{ m}}}$$

$$= 25 \times 10^{6} \times 10^{-6} \times \frac{1}{10^{3}} \text{ km}$$

$$= 25 \times 10^{6} \times 10^{-6} \times 10^{-3} \text{ km} = 25 \times 10^{-3} \text{ km}$$

$\therefore$ $25\,000\,000 \ \mu\text{m} = 25 \times 10^{-3} \text{ km}$ **Rpta.**

Ejemplo 7 : Transforma en incomplejas de orden inferior los complejos siguientes:

a) 2 hm 3 dam 5 m 1 dm **b)** 5 km 4 hm 1 dam 8 dm 7 mm

Resolución:

a) En la expresión: 2hm 3dam 5 m 1 dam; la unidad de menor orden es el dm, lo cual quiere decir que debo convertir toda la expresión a dm; veamos:

(*) $$2 \text{ hm} = 2 \text{ hm} \times \boxed{\frac{100 \text{ m}}{1 \text{ hm}}} \times \boxed{\frac{1 \text{ dm}}{0,1 \text{ m}}} = \frac{2 \times 100}{0,1} \text{ dm} = \frac{2 \times 10^{2}}{10^{-1}} \text{ dm}$$

$$2\text{ hm} = 2\times10^2\times10^{+1}\text{ dm} = 2\times10^3\text{dm}$$

$$\therefore\ \boxed{2\text{ hm} = 2\times10^3\text{ dm} = 2\ 000\text{ dm}}$$

(*) $3\text{ dm} = 3\text{ dam}\times\boxed{\dfrac{10\text{ m}}{1\text{ dam}}}\times\boxed{\dfrac{1\text{ dm}}{0,1\text{ m}}} = \dfrac{3\times10}{0,1}\text{ dm} = \dfrac{3\times10}{10^{-1}}\text{ dm}$

$$3\text{ dam} = 3\times10\times10^{+1}\text{ dm} = 3\times10^2\text{ dm}$$

$$\therefore\ \boxed{3\text{ dam} = 3\times10^2\text{ dm} = 300\text{ dm}}$$

(*) $5\text{ m} = 5\text{ m}\times\boxed{\dfrac{1\text{ dm}}{0,1\text{ m}}} = \dfrac{5}{0,1}\text{ dm} = \dfrac{5}{10^{-1}}\text{ dm} = 5\times10^{+1}\text{ dm} = 5\times10\text{ dm}$

$$\therefore\ \boxed{5\text{ m} = 5\times10\text{ dm} = 50\text{ dm}}$$

Luego: 2 hm 3 dam 5 m 1 dm = 2 000 d m + 300 dm + 50 dm + 1 dm

$= \boxed{2\ 351\text{ dm}}$ ***Rpta.***

b) En la expresión: 5 km 4hm 1 dam 8 dm 7 mm; la unidad de menor orden es el mm, lo cual quiere decir que se debe convertir toda la expresión a mm, veamos:

(*) $5\text{ Km} = 5\text{ km}\times\boxed{\dfrac{10^3\text{ m}}{1\text{ km}}}\times\boxed{\dfrac{1\text{ mm}}{10^{-3}\text{ m}}} = 5\times10^3\times10^{+3}\text{ mm} = 5\times10^6\text{ mm}$

$$\therefore\ \boxed{5\text{ km} = 5\times10^6\text{ mm} = 5\ 000\ 000\text{ mm}}$$

(*) $4\text{ hm} = 4\text{ hm}\times\boxed{\dfrac{10^2\text{ m}}{1\text{ hm}}}\times\boxed{\dfrac{1\text{ mm}}{10^{-3}\text{ m}}} = 4\times10^2\times10^3\text{ mm} = 4\times10^5\text{ mm}$

$$\therefore\ \boxed{4\text{ hm} = 4\times10^5\text{ mm} = 400\ 000\text{ mm}}$$

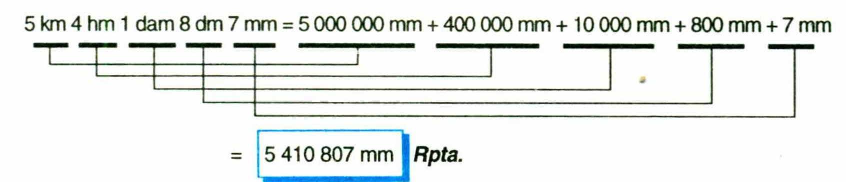
(*) $1\text{ dam} = 1\text{ dam}\times\boxed{\dfrac{10\text{ m}}{1\text{ dam}}}\times\boxed{\dfrac{1\text{ mm}}{10^{-3}\text{ m}}} = 1\times10\times10^3\text{ mm} = 10^4\text{ mm}$

$$\therefore\ \boxed{1\text{ dam} = 10^4\text{ mm} = 10\ 000\text{ mm}}$$

(*) $8\text{ dm} = 8\text{ dm}\times\boxed{\dfrac{10^{-1}\text{ m}}{1\text{ dm}}}\times\boxed{\dfrac{1\text{ mm}}{10^{-3}\text{ m}}} = 8\times10^{-1}\times10^3\text{ mm} = 8\times10^2\text{ mm}$

$\therefore$ $8\text{ dm} = 8 \times 10^2\text{ mm} = 800\text{ mm}$

Luego:



= 5 410 807 mm ***Rpta.***

Problema 8: Vanessa tiene su colegio a una distancia de 4 hm 7 dam 9 m de su casa, si recorre el camino, dos veces al día. ¿Cuántos metros anda diariamente?

Resolución:

De la expresión: 4 hm 7 dam 9 m lo convertimos a m ; veamos:

$$4\text{ hm} = 4\cancel{\text{hm}} \times \frac{100\text{ m}}{1\cancel{\text{hm}}} = 400\text{ m}$$

$$7\text{ dam} = 7\cancel{\text{dam}} \times \frac{10\text{ m}}{1\cancel{\text{dam}}} = 70\text{ m}$$

Luego: 4 hm 7 dam 9 m = 400m + 70 m + 9 m = 479 m

Como recorre dos veces al día el mismo camino, los 479 m lo multiplicamos por 2, Asi:

479 m x 2 = 958 m

Rpta: Vanessa anda diariamente 958 m

TALLER DE EJERCICIOS Nº 63

Ejercicio 1 : Completa:

1 m = ... cm = ... dm = ... mm

1 dam = ... m = ... cm = ... dm

Ejercicio 2 : Encierra en un circulo los múltiplos del metro.

mm

man

cm hm km

dam dm

Ejercicio 3 : Completa

1 dam	100 cm
1 dm	100 mm
1 m	10 m

Ejercicio 4 : Completa estas equivalencias.

1 m = ... dm = ... cm = ... mm

1 hm = ... m = ... km = ... dm

1 km = ... m = ... dam = ... mm

Ejercicio 5 : Completa lo que falte, siguiendo el modelo:

1 dm es la décima parte del m	1 dm = 0,1 m
1 hm es .... del km	1 dm = ... km
1 cm es .... del dam	1 cm = ... dam
1 mm es .... del m	1 mm = ... m
1 dam es .... del Mm	1 dam = ... Mm

Ejercicio 6 : Encierra en un circulo los submúltiplos del metro

man mm

cm hm km

dam dm

Ejercicio 7 : Completa estas igualdades:

1 cm = ... m = ... dam = ... dm

1 dm = ... dam = ... hm = ... Mm

1 dam = ... km = ... m = ... Mm

Ejercicio 8 : Establece una correspondencia entre estos conjuntos.

A	B
km	0,1 m
dam	10 m
cm	0,001 m
mm	1 000 000 m
Mm	0,01 m
dm	1 000 m

Ejercicio 9 : Expresa en centímetros:

(a) 9 dam (d) 5 km

(b) 3m (e) 9 hm

(c) 7 dm (f) 7 mm

Rpta. **a)** 9 000 cm **b)** 300 cm **c)** 70 cm **d)** 500 000 cm **e)** 0,000 000 9 cm **f)** 0,7 cm

Ejercicio 10 : Expresa en decámetros:

(a) 241 hm (e) 72 km

(b) 0,0025 Mm (f) 1 422 m

(c) 2 345 hm (g) 17 mm

(d) 17 556 cm (h) 18 609 km

Rpta. **a)** 2 410 dam **b)** 250 dam **c)** 23 450 dm **d)** 17,556 dam **e)** 7 200 dam **f)** 142,2 dam **g)** 0,001 7 dam **h)** 1 860 900 dam

Ejercicio 11 : Expresa en centímetros:

(a) 24,3 dm	(c) 75 mm	(e) 86,25 dam	(g) 12 km
(b) 125,68 mm	(d) 0,0034 dam	(f) 64,025 dm	(h) 27,176 hm

Rpta. **a)** 243 cm **b)** 1256,8 cm **c)** 7,5 cm **d)** 3,4 cm **e)** 86 250 cm **f)** 640,25 cm **g)** 12×10^5 cm **h)** 271 760 cm

Ejercicio 12 : Calcula el perímetro de un cuadrado en cm, cuyo lado mide 3 m 4 dm

Rpta. 1 360cm

Ejercicio 13: Un Pedestal tiene 7,5 dm de altura. ¿Cuántos centímetros le faltan para medir un metro?

Rpta. 25 cm

Ejercicio 14: En una distancia de 20 hm 4 dam 7 m se han colocado cuatro árboles. La distancia entre el primero y el segundo es de 8 dam 7 m; el segundo y el tercero distan entre si 6 dam. ¿Cuántos metros estan separados entre si el tercero y el cuarto árbol?

Rpta. 1 900 m

Ejercicio 15: Transforma en incomplejos de orden inferior los complejos siguientes:

a) 9 Mm 3 km 7 hm 8 dm 7 mm
b) 15 km 4 dam 7 cm 9 mm
c) 3 mm 9 cm 5 dm 4 m 6 dam
d) 12 km 9hm 17 dm 8cm

Rpta. **a)** 9 003 700 807 mm **b)** 15 040 079 mm **c)** 64 593 mm **d)** 1 200 178 cm

Ejercicio 16: Expresa en metros los incomplejos siguientes:

a) 4 km 7 hm 8 cm
b) 22 Mm 5 km 3 hm 6 dm
c) 8 m 5 dm 7 cm 2 mm
d) 4 dm 1 cm 7 mm

Rpta. **a)** 4 700,08 m **b)** 22 005 300,6 m **c)** 8,572 m **d)** 0,417 m

Ejercicio 17: Expresa en centímetros los complejos:

a) 9 dam 3 m 7 dm 5 cm
b) 14 dam 9 dm 3 cm 7 mm
c) 5 km 9 hm 2 dm
d) 8 km 4 hm 3 m

Rpta. **a)** 9 375 cm **b)** 14 093,7 cm **c)** 590 020 cm **d)** 840 300 cm

Ejercicio 18: Un automóvil recorre diariamente un trayecto de 98 km 9 hm 6 dam; tardando 2 horas. ¿Cúal es el camino recorrido en 1 hora?

Rpta. 49 km 4,5 hm 3 dam

Ejercicio 19: Un automóvil recorre cada día 70 km 2 hm 3 dam 5 m ¿Cuál es el camino recorrido en 15 días?

Rpta. 1 050 km 30 hm 45 dam 75 m

Ejercicio 20: Para instalar una red eléctrica se han colocado entre dos ciudades postes que distan entre si 48 m, si la distancia entre las dos ciudades es 19,2 km ¿Cuántos postes habrá?

Rpta. 401 postes

8.2.3 UNIDADES DE MASA DEL S.I.

La unidad fundamental de masa es el kilogramo (kg). El kilogramo es la unidad de masa (y no de peso ni de fuerza).

- Recuerda que no es lo mismo **masa** que **peso**, pues el peso de una misma masa puede variar por diversas circunstancias. Sin embargo, en la práctica no establecemos esta distinción asi, nos preguntamos **cuál** es la masa de un trozo de pan sino **cuánto** pesa un trozo de pan. Por eso **Las Unidades de masa también se emplean como unidades de peso**.

- Los múltiplos y submúltiplos del kilogramo se pueden apreciar en el cuadro siguiente:

	Unidad	Símb.	Factor	Equivalencia en g
MÚLTIPLOS	exágramo	Eg	10^{18}g	1 000 000 000 000 000 000 g
	petágramo	Pg	10^{15}g	1 000 000 000 000 000 g
	terágramo	Tg	10^{12}g	1 000 000 000 000 g
	gigágramo	Gg	10^{9}g	1 000 000 000 g
	megágramo	Mg	10^{6}g	1 000 000 g
Unidad Fundamental	**kilogramo**	**kg**	**10^{3}g**	**1 000 g**
SUBMÚLTIPLOS	gramo	g	10^{0}g	1 g
	milígramo	mg	10^{-3}g	0,001 g
	micrógramo	ug	10^{-6}g	0,000 001 g
	nanógramo	ng	10^{-9}g	0,000 000 001 g
	picógramo	pg	10^{-12}g	0, 000 000 000 001 g
	femtógramo	fg	10^{-15}g	0,000 000 000 000 001 g
	attógramo	ag	10^{-18}g	0, 000 000 000 000 000 001 g

- Como se observa estas medidas crecen y decrecen de mil en mil.

- Segun el sistema internacional (S.I), los **Múltiplos Preferidos** son:
megágramo (Mg); gigágramo (Gg), teragramo (Tg) ; petágramo (Pg) y el exágramo (Eg).

- **Los Submúltiplos Preferidos** son: gramo (g), milígramo (mg), micrógramo (ug) nanógramo (ng), picógramo (pg), fentógramo (Fg) y el attógramo (ag).

  El megágramo (Mg) que equivale a 1 000 kg, en el comercio el Mg toma el nombre de **Tonelada** o tonelada métrica cuyo símbolo es: t.

- Los múltiplos: decágramo (dag = 10 g) y hectógramo (hg = 100 g) y los submúltiplos: decígramo (dg = 0,1 g) y centígramo (cg = 0,01 g) **son no preferidos**.

Ejemplo 1 : Expresar: 4, 73 kg

(a) En g **(b)** En Mg **(c)** En ug

Resolución:

Aplicando el método de factor de conversión se tiene:

(a) 4,73 kg en g $\rightarrow$ $4{,}73\text{ kg} = 4{,}73\text{ kg} \times \boxed{\dfrac{10^3\text{ g}}{1\text{Kg}}}$

Este factor de conversión es igual a 1

porque : $1\text{Kg} = 10^3\text{g} \Rightarrow 1 = \dfrac{10^3\text{ g}}{1\text{Kg}}$

Luego: $4{,}73\text{ kg} = \underbrace{4{,}73}\times 10^3\text{ g}$; pero; $\boxed{4{,}73 = 473 \times 10^{-2}}$

$4{,}73\text{ kg} = 473 \times \underbrace{10^{-2} \times 10^3\text{ g}}$

$4{,}73\text{ kg} = 473 \times 10^{-2+3}\text{ g} = 473 \times 10^1\text{g} = 4\ 730\text{ g}$

$\therefore$ $\boxed{4{,}73\text{ kg} = 4\ 730\text{ g}}$ ***Rpta.***

(b) 4,73 kg en mg

$4{,}73\text{ kg} = 4{,}73\text{ kg} \times \dfrac{10^3\text{g}}{1\text{Kg}} \times \dfrac{1\text{mg}}{10^{-3}\text{g}}$, pero: $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

$4{,}73\text{ kg} = 4{,}73 \times 10^{3-(-3)}\text{ mg} = \underbrace{4{,}73} \times 10^6\text{ mg}$

$4{,}73\text{ kg} = 473 \times \underbrace{10^{-2} \times 10^6}\text{ mg} = 473 \times 10^{-2+6}\text{ mg} = 473 \times 10^4\text{ mg}$

$\boxed{4{,}73\text{ kg} = \underbrace{473 \times 10^4}\text{ mg} = 4\ 730\ 000\text{ mg}}$ ***Rpta.***

(c) 4,73 en ug

$4{,}73\text{ kg} = 4{,}73\text{kg} \times \boxed{\dfrac{10^3\text{g}}{1\text{Kg}}} \times \boxed{\dfrac{1\mu\text{ g}}{10^{-6}\text{g}}}$

$4{,}73\text{ kg} = 4{,}73 \times 10^{3-(-6)}\text{ ug} = \underbrace{4{,}73} \times 10^9\text{ ug}$

$4{,}73\text{ kg} = \underbrace{473 \times 10^{-2}} \times 10^9\text{ ug} = 473 \times 10^{-2+9} = 473 \times 10^7\text{ ug}$

$\therefore$ $\boxed{4{,}73\text{ kg} = 473 \times 10^7\text{ ug}}$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Expresar: 5,6 g

(a) En kg **(b)** En Mg

Resolución:

(a) 5,6 g en kg

$$5{,}6\text{ g} = 5{,}6\ \cancel{g} \times \boxed{\frac{1\text{kg}}{10^3\ \cancel{g}}} \leftarrow$$

Este factor de conversión es igual a 1 porque: $1\text{ kg} = 10^3\text{ g} \rightarrow \frac{1\text{kg}}{10^3\text{ g}} = 1$

Luego: $5,6\text{ g} = \underbrace{5,6}\times\frac{1\text{kg}}{10^3}$; pero: $\boxed{5{,}6 = 56 \times 10^{-1}}$

$$5,6\text{ g} = \underbrace{56\times10^{-1}}\times\frac{1\text{ kg}}{10^3} = 56\times10^{-1-3}\text{ kg} = 56\times10^{-4}\text{ kg}$$

$\therefore$ $\boxed{5{,}6\text{ g} = 56 \times 10^{-4}\text{ kg} = 0{,}005\ 6\text{ kg}}$ ***Rpta.***

(b) 5,6 g en Mg

$$5{,}6 = \underbrace{5{,}6\ \cancel{g}} \times \boxed{\frac{1\text{Mg}}{10^6\ \cancel{g}}}$$

$$5{,}6\text{ g} = 56 \times 10^{-1} \times \frac{1}{10^6}\text{ Mg} = 56 \times 10^{-1-6}\text{ Mg} = 56 \times 10^{-7}\text{ Mg}$$

$\therefore$ $\boxed{5{,}6 = 56 \times 10^{-7}\text{ Mg} = 0{,}000\ 005\ 6\text{ Mg}}$ ***Rpta.***

Problema 1: Si una mercancía vale 1 375 dólares el kilogramo . ¿Cuánto cuesta 1 ug?

Resolución:

En primer lugar, convertimos 1 kg a ug

$$1\text{ kg} = 1\ \cancel{kg} \times \boxed{\frac{10^3\ \cancel{g}}{1\cancel{kg}}} \times \boxed{\frac{1\text{ug}}{10^{-6}\ \cancel{g}}}$$

$1\text{ kg} = 1 \times 10^{3+6}\text{ ug} = 1 \times 10^9\text{ ug}$

$\underbrace{1\text{ kg}} = 1 \times 10^9\text{ ug}$

$1\ 375\text{ dólares} = 1 \times 10^9\text{ ug} \Rightarrow \frac{1\ 375\text{ dólares}}{10^9} = 1\text{ ug}$ $\therefore$ $\boxed{1\ 375 \times 10^{-9}\text{ dólares} = 1\text{ ug}}$

Rpta: $\boxed{1\text{ ug de mercancía cuesta: } 1\ 375 \times 10^{-9}\text{ dólares}}$

Problema 2: Expresar en gigágramos cada una de las cantidades siguientes:

(a) 36,5 Mg **(b)** 20 567 ng

Resolución:

(a) 36,5 Mg en Gg

$$36{,}5\ \text{Mg} = 36{,}5\ \text{Mg} \times \boxed{\frac{10^{6}\ \text{g}}{1\ \text{Mg}}} \times \boxed{\frac{1\ \text{Gg}}{10^{9}\ \text{g}}} = 365 \times 10^{-1} \times 10^{6} \times \frac{1}{10^{9}}\ \text{Gg}$$

$36{,}5\ \text{Mg} = 365 \times 10^{-1+6-9}\ \text{Gg} = 365 \times 10^{-4}\ \text{Gg}$ $\therefore$ $\boxed{36{,}5\ \text{Mg} = 365 \times 10^{-4}\ \text{Gg}}$ ***Rpta.***

(b) 20 567 ng en Gg

$$20\,567\ \text{ng} = 20\,567\ \text{ng} \times \boxed{\frac{10^{-9}\ \text{g}}{1\ \text{ng}}} \times \boxed{\frac{1\ \text{Gg}}{10^{9}\ \text{g}}} = 20\,576 \times 10^{-9-9}\ \text{Gg}$$

$\therefore$ $\boxed{20\,567\ \text{ng} = 20\,567 \times 10^{-18}\ \text{Gg}}$

Problema 3: Quiero dividir un queso que pesa 6 kg, en tres partes iguales. ¿Cuál es el peso de cada trozo en megágramos?

Resolución:

El queso de 6 kg se va a dividir en 3 partes iguales, donde cada parte pesará:

$$\text{Peso de cada trozo} = \boxed{\frac{6\text{kg}}{3} = 2\text{kg}}$$

Luego, convertimos los 2 kg a megágramos (Mg)

$$2\ \text{kg} = 2\ \text{kg} \times \boxed{\frac{10^{3}\ \text{g}}{1\ \text{kg}}} \times \boxed{\frac{1\text{Mg}}{10^{6}\ \text{g}}} = 2 \times 10^{3-6}\ \text{Mg} = 2 \times 10^{-3}\ \text{Mg}$$

$\therefore$ $\boxed{2\ \text{kg} = 2 \times 10^{-3}\ \text{Mg} = 0{,}002\ \text{Mg}}$

Rpta: El peso de cada trozo de queso es: 0,002 Mg

Problema 4: Tenemos 4 kg de masa para hacer panes. ¿Cuántos panes podemos obtener si cada uno pesa 80 g ?

Resolución:

$$\text{Sabemos que el número de panes} = \frac{\text{Peso de la masa}}{\text{Peso de cada pan}}$$

Luego:

$$\text{Número de panes} = \frac{4\ \text{kg}}{80\ \text{g}} = \frac{4 \times 1000\ \text{g}}{80\ \text{g}} = 50$$

Rpta: Con los 4 kg de masa se pueden obtener 50 panes de 80 gramos c/u.

Problema 5: Se han vendido 3 t 2q 5 Mg 6kg de remolacha a razón de 4 soles el kilogramo. ¿Cuánto se debe pagar?

Resolución:

Se ha considerado este tipo de problema, puesto que en el comercio todavía se siguen usando las siguientes unidades de masa como son:

$$\begin{cases} 1 \text{ tonelada} = 1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg} \\ 1 \text{ quintal} = 1 \text{ q} = 100 \text{ kg} \end{cases}$$

Luego, convertimos: 3t 2q 5Mg 6 kg en kg

$$3t\ \ 2q\ \ 5Mg\ \ 6kg = 3(1\,000 \text{ kg}) + 2(100 \text{ kg}) + 5(1\,000\,000 \text{ kg}) + 6 \text{ kg}$$

$$= 3\,000 \text{ kg} + 200 \text{ kg} + 5(1\,000 \text{ kg}) + 6 \text{ kg}$$

$= 8\,206$ kg ; como el kg de remolacha vale 4 soles, lo que debe pagar es:

$$8\,206 \times 4 \text{ soles} = \boxed{32\,824 \text{ soles}}$$

Rpta: Lo que se debe pagar por los 8 206 kg de remolacha es 32 824 soles

TALLER DE EJERCICIOS Nº 64

Ejercicio 1 : Expresa en terágramos cada una de las cantidades siguientes:

a) 23,476 Mg	**b)** 1 800 mg	**c)** 3 680 kg

Rpta. **a)** $23\,476 \times 10^{-9}$ Tg **b)** 18×10^{-4} Tg **c)** 368×10^{-8} Tg

Ejercicio 2 : Completa:

a) 358 mg =……g	**c)** 2,376 kg ……Tg	**e)** 118,5 g = ……Gg
b) 273 ug = ……kg	**d)** 1 274 g = ……kg	**f)** 32 644 Mg = ……kg

Rpta. **a)** 0,358 g **b)** 273×10^{-9}g **c)** $2\,376 \times 10^{-12}$ Tg
d) 1,274 kg **e)** $1\,185 \times 10^{-10}$ Gg **f)** $32\,644 \times 10^{3}$ kg

Ejercicio 3 : Expresa en kilogramos cada una de las cantidades siguientes:

a) 56 Mg	**b)** 107,32 mg	**c)** 25 477 Gg

Rpta. **a)** 56×10^{3} Kg **b)** 10 732 kg^{-8} kg **c)** $25\,477 \times 10^{6}$ Kg

Ejercicio 4 : Una botella llena de vino pesa 3,455 kg; si la botella vacía tiene un peso de 324 g ¿Cuál es el peso del vino que contiene?

Rpta. 3,131 kg

Ejercicio 5 : Si 5 kg de queso laive cuestan 75 soles. ¿Cuánto cuesta 1 Mg?

Rpta. 15 000 soles

Ejercicio 6 : Una pastilla para la tos pesa 4 g ¿Cuánto pesará una caja de 100 pastillas?

Rpta. 400 g

Ejercicio 7 : Un vendedor compra una mercancía a 775 soles los 25 kg y la vende a 42,75 soles el kg ¿Cuánto gana en total? ¿Cuánto en cada kg?

Rpta. S/. 293,75 y S/. 11,75

Ejercicio 8 : Tenemos 2 kg de masa para hacer pasteles ¿Cuántos pasteles podemos obtener si cada uno pesa 50 g?

Rpta. 40 pasteles

Ejercicio 9 : Si el kilogramo de clavos vale 36 soles. ¿Cuánto vale un cuarto de kilogramo? ¿y medio kilogramo?

Rpta. S/. 9 y S/. 18

Ejercicio 10 : El agua que cabe en un vaso pesa 200 g ¿Cuál será el peso del agua contenida en 23 vasos? **Rpta.** 4,6 Kg

Ejercicio 11 : Cálcula el precio de 4 kg 7 Mg; de garbanzos a 3 soles el kilogramo? **Rpta.** 21 012 soles

Ejercicio 12 : Una tonelada de carbón cuesta 12 586 soles. ¿Cuánto costará un saco de 75 kg? **Rpta.** 943,95 soles

Ejercicio 13 : ¿Cuánto cuestan 8q 7kg de acero si se pagan a 35 soles los 100g? **Rpta.** 282 450 soles

Ejercicio 14 : Se han vendido 4t 3q 7 Mg 6 kg de fierro a razón de 15 soles el kilogramo ¿Cuánto se debe pagar? **Rpta.** 169 590 soles

8.2.4 UNIDADES DE SUPERFICIE DEL S.I.

La unidad fundamental de las medidas de superficie es el **metro cuadrado** cuyo símbolo es m^2

Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado se dan en el cuadro siguiente:

	Unidad	Símbolo	Factor	Equivalencia en m^2
MULTIPLOS	exámetro cuadrado	Em^2	10^{36} m^2	
	petámetro cuadrado	Pm^2	10^{30} m^2	
	terámetro cuadrado	Tm^2	10^{24} m^2	
	gigámetro cuadrado	Gm^2	10^{18} m^2	
	Megámetro cuadrado	Mm^2	10^{12} m^2	1 000 000 000 000 m^2
	kilómetro cuadrado	Km^2	10^6 m^2	1 000 000 m^2
	hectómetro cuadrado	hm^2	10^4 m^2	10 000 m^2
	decámetro cuadrado	dam^2	10^2 m^2	100 m^2
Unidad Fundamental	**metro cuadrado**	$\mathbf{m^2}$	$\mathbf{10^0\ m^2}$	**1 $\mathbf{m^2}$**
SUBMULTIPLOS	decímetro cuadrado	dm^2	10^{-2} m^2	0,01 m^2
	centímetro cuadrado	cm^2	10^{-4} m^2	0,0001 m^2
	milímetro cuadrado	mm^2	10^{-6} m^2	0,000 001 m^2
	micrómetro cuadrado	um^2	10^{-12} m^2	0,000 000 000 001 m^2
	nanómetro cuadrado	nm^2	10^{-18} m^2	
	picómetro cuadrado	pm^2	10^{-24} m^2	
	femtómetro cuadrado	fm^2	10^{-30} m^2	
	attómetro cuadrado	am^2	10^{-36} m^2	

Ejemplo 1: Expresa 34,9 km^2

(a) En dam^2 (b) cm^2

Resolución:

a) **34,9 km^2 en dam^2**

$$34{,}9\ km^2 = 34{,}9\ km^2 \times \boxed{\frac{10^6\ m^2}{1\ km^2}} \times \boxed{\frac{1\ dam^2}{10^2\ m^2}}$$

$$34{,}9\ km^2 = \underline{34{,}9} \times 10^{6-2}\ dam^2 = \underline{349 \times 10^{-1}} \times 10^4\ dam^2$$

$$34{,}9\ km^2 = 349 \times 10^{-1+4}\ dam^2 = \boxed{349 \times 10^3\ dam^2}$$

$\therefore$ $\boxed{34{,}9\ km^2 = 349 \times 10^3\ dam^2 = 349\ 000\ dam^2}$ ***Rpta.***

b) **34,9 km^2 en cm^2**

$$34{,}9\ km^2 = 34{,}9\ km^2 \times \boxed{\frac{10^6\ m^2}{1\ km^2}} \times \boxed{\frac{1\ cm^2}{10^{-4}\ m^2}}$$

$$34{,}9\ km^2 = 34{,}9 \times 10^{6-(-4)}\ cm^2 = \underline{34{,}9} \times 10^{10}\ cm^2 = \underline{349 \times 10^{-1}} \times 10^{10}\ cm^2$$

$$34{,}9\ km^2 = 349 \times 10^{-1+10}\ cm^2 = \boxed{349 \times 10^9\ cm^2}$$

$\therefore$ $\boxed{34{,}9\ km^2 = 349 \times 10^9\ cm^2}$ ***Rpta.***

Ejemplo 2: Expresa 47 m^2

(a) En hm^2 (b) En km^2

Resolución:

Recuerda que:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

(a) **47 m^2 en hm^2**

$$47\ m^2 = 47\ m^2 \times \boxed{\frac{1\ hm^2}{10^4\ m^2}} = 47 \times 10^{-4}\ hm^2$$

$\therefore$ $\boxed{47\ m^2 = 47 \times 10^{-4}\ hm^2 = 0{,}004\ 7\ hm^2}$

(b) **47 m^2 en km^2**

$$47\ m^2 = 47\ m^2 \times \boxed{\frac{1\ km^2}{10^6\ m^2}} = 47 \times 10^{-6}\ km^2$$

$\therefore$ $\boxed{47\ m^2 = 47 \times 10^{-6}\ km^2 = 0{,}000\ 047}$ ***Rpta.***

Ejemplo 3 : ¿Cuántos mm^2 tiene un m^2?

Resolución:

$$1\ m^2 = 1\ m^2 \times \boxed{\frac{1\ mm^2}{10^{-6}\ m^2}} = 1 \times 10^6\ mm^2$$

$\therefore$ $\boxed{1\ m^2 = 1 \times 10^6\ mm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2}$ ***Rpta.***

Ejemplo 4 : Reduce a dm^2 ; 5 dam^2 16 m^2 2 hm^2

Resolución:

* **5 dam^2 en dm^2**

$$5\ dam^2 = 5\ dam^2 \times \boxed{\frac{10^2\ m^2}{1\ dam^2}} \times \boxed{\frac{1\ dm^2}{10^{-2}\ m^2}} = 5 \times 10^2 \times 10^2\ dm^2$$

$\therefore$ $\boxed{5\ dam^2 = 5 \times 10^4\ dm^2 = 50\ 000\ dm^2}$

** **16 m^2 en dm^2**

$$16\ m^2 = 16\ m^2 \times \boxed{\frac{1\ dm^2}{10^{-2}\ m^2}} = 16 \times 10^2\ dm^2$$

$\therefore$ $\boxed{16\ m^2 = 16 \times 10^2\ dm^2 = 1\ 600\ dm^2}$

*** **2 hm^2 en dm^2**

$$2\ hm^2 = 2\ hm^2 \times \boxed{\frac{10^4\ m^2}{1\ hm^2}} \times \boxed{\frac{1\ dm^2}{10^{-2}\ m^2}} = 2 \times 10^4 \times 10^2\ dm^2 = 2 \times 10^6\ dm^2$$

$\therefore$ $\boxed{2\ hm^2 = 2 \times 10^6\ dm^2 = 2\ 000\ 000\ dm^2}$

Luego: 5 dam^2 16 m^2 2 hm^2 = 50 000 dm^2 + 1 600 dm^2 + 2 000 000 dm^2

$\therefore$ $\boxed{5\ dam^2\ 15\ m^2\ 2\ hm^2 = 2\ 051\ 600\ dm^2}$ ***Rpta.***

Ejemplo 5 : Hallar la siguiente resta: 4 km^2 35 hm^2 64 m^2 - 2 km^2 41 hm^2 65 m^2

Resolución:

Como se observará la cantidad de hm^2 y de m^2 del minuendo son menores que la del sustraendo; para poder restar, se procede de la manera siguiente:

$4\ km^2\ 35\ hm^2\ 64\ m^2 = 4(1\ 000\ 000\ m^2) + 35(10\ 000\ m^2) + 64\ m^2 =$ **$4\ 350\ 064\ m^2$**

$2\ km^2\ 41\ hm^2\ 65\ m^2 = 2(1\ 000\ 000\ m^2) + 41(10\ 000\ m^2) + 65\ m^2 =$ **$2\ 410\ 065\ m^2$**

Luego: $4\ 350\ 064\ m^2 - 2\ 410\ 065\ m^2 = 1\ 939\ 999\ m^2$ ***Rpta.***

OTRA FORMA:

($1\ hm^2 = 10\ 000\ m^2$)

$4\ km^2\ 35\ hm^2\ 64\ m^2 \rightarrow 4\ km^2\ (34\ hm^2 + 1\ hm^2)\ 64\ m^2 \rightarrow 4\ km^2\ 34\ hm^2\ 10\ 064\ m^2$

$2\ km^2\ 41\ hm^2\ 65\ m^2 \rightarrow 2\ km^2\ 41\ hm^2\ 65\ m^2 \rightarrow 2\ km^2\ 41\ hm^2\ \ 65\ m^2$

$9\ 999\ m^2$

Ahora trabajamos con los dos primeros términos, tanto del minuendo como los del sustraendo, veamos:

($1\ km^2 = 100\ hm^2$)

$4\ km^2\ 34\ hm^2 \rightarrow (3\ km^2 + 1\ km^2)\ 34\ hm^2 \rightarrow 3\ km^2\ 134\ hm^2$

$2\ km^2\ 41\ hm^2 \rightarrow 2\ km^2\ 41\ hm^2 \rightarrow 2\ km^2\ 41\ hm^2$

$1\ km^2\ 93\ hm^2$

Luego: $4\ km^2\ 35\ hm^2\ 64\ m^2\ -$

$2\ km^2\ 41\ hm^2\ 65\ m^2$

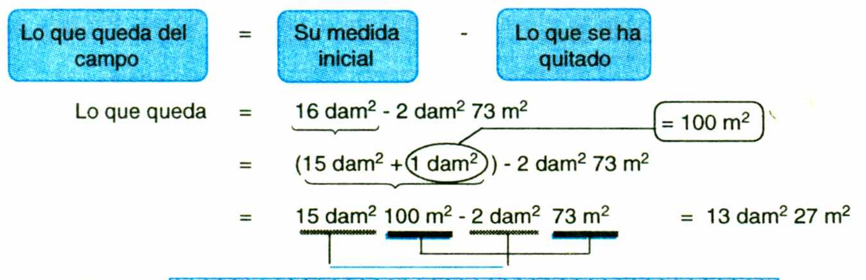
$1\ km^2\ 93\ hm^2\ 9\ 999\ m^2 = 1\ 000\ 000\ m^2 + 93(10\ 000\ m^2) + 9\ 999\ m^2$

$= 1\ 939\ 999\ m^2$ ***Rpta.***

Problema 1 : De un campo deportivo que mide 16 dam^2 se han quitado 2 dam^2 73 m^2 . ¿Con qué extensión ha quedado dicho campo?

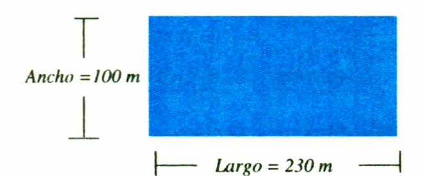
Resolución:

Sabemos que:



Problema 2 : Un campo rectángular tiene 230 m de largo por 100 m de ancho, se vende a S/. 36 el m^2 ¿cuál es el valor del campo?

***Resolución*:**



- En primer lugar, hallamos el área del rectángulo para asi saber cuántos m^2 hay en total.

Area ▭ = largo x ancho

Area ▭ = 230 m x 100 m = $23\,000\ m^2$

- El segundo lugar, calculamos el costo del terreno:

$$\text{costo del terreno} = 23\,000\ m^2 \times \frac{S/.\ 36}{1\ m^2} = S/.\ 828\,000$$

***Rpta*:** El valor del terreno es de S/. 828 000

* **Unidades Agrarias:** Son aquellas unidades de superficie que se utilizan para medir la superficie de los terrenos, campos, huertos etc. La **Unidad** fundamental de las medidas agrarias es el **área** cuyo símbolo es **a**, y que equivale a 1 dam^2

$$1a = 1\ dam^2 = 100\ m^2$$

Tiene un múltiplo que es la **hectárea**, cuyo símbolo es **ha** y que equivale a 10 000 m^2

$$1\ ha = 1\ hm^2 = 10\,000\ m^2 \Rightarrow 1\ ha = 100\ a$$

Y tiene un submúltiplo llamado **centárea**, cuyo símbolo es **ca** y equivale a 1 m^2

$$1\ ca = 1\ m^2 \Rightarrow 1\ ca = 0{,}01\ a$$

Ejemplo 1 : Expresar: 16 ha a *a*

***Resolución*:**

$$16\ ha = 16\ ha \times \frac{100\ a}{1\ ha}$$

(Este factor de conversión que es igual a 1, porque: $1\ ha = 100\ a \Rightarrow 1 = \frac{100\ a}{1\ ha}$)

Luego: 16 ha = 1 600 *a* ***Rpta.***

Ejemplo 2 : Expresar: 45 ca a *a*

***Resolución*:**

$$45\ ca = 45\ \cancel{ca} \times \frac{0{,}01\ a}{1\ \cancel{ca}} = 45 \times 10^{-2}\ a \quad \therefore \quad 45\ ca = 45 \times 10^{-2}\ ca = 0{,}45\ a$$ ***Rpta.***

Problema 1 : ¿Cuál es la extensión en hectáreas, de un campo que mide 125 m de largo y 100 m de ancho.

Resolución:

- Extensión del campo = largo x ancho
= 125 m x 100 m

∴ **Extensión = 12 500 m²**

Luego, convertimos los m² a hectáreas.

$$\text{Extensión} = 12\,500\ m^2 \quad \frac{1\ ha}{10\ 000\ m^2} = \frac{125}{100}\ ha = 1{,}25\ ha$$

Rpta: La extensión del campo es de 1,25 ha

Problema 2 : Una hacienda que tiene 32 ha 12a 16 m² de extención, se quiere dividir en cuatro parcelas de la misma extensión ¿Cuántos m² tendrá cada parcela?

Resolución:

En primer lugar convertimos: 32 ha 12a 16 m² en m² ; Así:

$$32ha\ 12a\ 16m^2 = 32(10\ 000\ m^2) + 12(100\ m^2) + 16\ m^2 = 320\ 000\ m^2 + 1\ 200\ m^2 + 16\ m^2$$

Luego: 32ha 12a 16m² = **321 216 m²**

En segundo lugar, calculamos el número de m² que tiene cada parcela

$$(\text{Extensión en } m^2 \text{ de cada parcela}) = \frac{\text{Extensión de la hacienda en } m^2}{4} = \frac{321\ 216\ m^2}{4}$$

$$= 80\ 304\ m^2$$

Rpta: Cada parcela tendrá: 80 304 m²

Problema 3 : En una linea cuya extensión es de 5 ha 30a 50 ca, se han sembrado 3ha 6a 25ca de trigo, y 1ha 4a de cebada. ¿Cuántos metros cuadrados quedan por sembrar?

Resolución:

Extensión de la linea: 5 ha 30 a 50 ca

Lo sembrado: 3 ha 6a 25 ca + 1 ha 4a = 4 ha 10 a 25 ca

Lo que queda por sembrar:

5 ha 30 a 50 ca –
4 ha 10 a 25 ca
1 ha 20 a 25 ca (Lo convertimos a m²)

$$1\ ha\ 20\ a\ 25\ ca = 10\ 000\ m^2 + 20(100\ m^2) + 25(1\ m^2)$$

$$= 12\ 025\ m^2$$

Rpta: El número de metros cuadrados que quedan por sembrar es: 12 025

TALLER DE EJERCICIOS Nº 65

Ejercicio 1 : Expresar:

a)	0,125 km^2 en m^2	e)	12 345 c*a* en h*a*	i)	3 452,36 dam^2 en km^2
b)	14 Mm^2 en km^2	f)	23,48 km^2 en dam^2	j)	23 124,25 m^2 en h*a*
c)	16,23 h*a* en *a*	g)	8,27 dam^2 en dm^2	k)	45 000 mm^2 en Mm^2
d)	3 248 cm^2 en m^2	h)	800 m^2 en h*a*	l)	13 000 000 um^2 en Gm^2

Rpta.

a) 125 x 10^3 m^2	**b)** 14 x 10^6 km^2	**c)** 1 623 *a*	**d)** 0,324 8 m^2
e) 1,234 5 h*a*	**f)** 234 800 dam^2	**g)** 82 700 dm^2	**h)** 0,08 h*a*
i) 0,345 236 km^2	**j)** 2,312 425 h*a*	**k)** 45 x 10^{-15} Mm^2	**l)** 13 x 10^{-24} Gm^2

Ejercicio 2 : Establece una correspondencia:

A	B
km^2	100 a
dam^2	1 000 a
hm^2	100 a
dm^2	0,01 m^2

Ejercicio 3 : Completa las igualdades siguientes:

(a) 2,25 m^2 + ...m^2 = 5m^2

(b) 241 mm^2 + ...mm^2 = 4 cm^2

(c) 1 dam^2 = 53 m^2 + ...m^2

(d) 1 m^2 = 90 dm^2 + ...dm^2

Rpta. **a)** 2,75 m^2 **b)** 159 mm^2 **c)** 47 m^2 **d)** 10 dm^2

Ejercicio 4 : Un campo rectángular que tiene 180 m de largo por 130 m de ancho se vende a S/. 585 000 ¿A cómo se vende el m^2?

Rpta. S/. 25

Ejercicio 5 : Si el m^2 de un terreno vale S/. 28 ; averigua lo que cuestan

a)	2 dam^2	b)	3 h*a*	c)	25 *a*	d)	32 c*a*

Rpta. **a)** S/. 5 600 **b)** S/. 840 000 **c)** S/. 70 000 **d)** S/. 896

Ejercicio 6 : Expresa en metros cuadrados: 500 dm^2 y 7 200 cm^2 ***Rpta.*** 5 m^2 y 0,72 m^2

Ejercicio 7 : ¿Cuántos cm^2 tiene el metro cuadrado? ***Rpta.*** 10 000 cm^2

Ejercicio 8: Expresa en m^2 ; 8 km^2 7 dam^2 92 hm^2 — ***Rpta.*** 8 920 700 m^2

Ejercicio 9: ¿cuántos centiáreas tiene 1 km^2 ? — ***Rpta.*** 1 000 000 *ca*

Ejercicio 10: Una provincia tiene 10 000 km^2, exprésalo en hectáreas. — ***Rpta.*** 1 000 000 h*a*

Ejercicio 11 : Un hm^2 se ha dividido en 100 partes iguales ¿Qué nombre recibe cada una de esas partes? — ***Rpta.*** 1*a* (área)

Ejercicio 12: Mi madre ha vendido un campo de 3ha 7a 240ca, a razón de 53 soles el metro cuadrado. ¿Cuánto habrá cobrado? — ***Rpta.*** S/. 1 639 820

Ejercicio 13 : De un patio de recreo que medía 20 dam^2 ; se han dedicado para una canchita de fulbito 6 dam^2 65 m^2 ¿Qué terreno queda libre? — ***Rpta.*** 13 dam^2 35 m^2

Ejercicio 14: De un patio de recreo que media 16 dam^2, se ha hecho tres divisiones; 5 dam^2 60 m^2; para jugar a balóncesto; 6 dam^2 50 m^2 para jugar a balóncesto ; el resto para jardín. ¿Qué terreno se ha dejado para jardín? — ***Rpta.*** 3 dam^2 90 m^2

Ejercicio 15: Un señor que tenía una finca de 2h*a* 27*a*, vendió 124*a* ¿Cuántos m^2 le quedan?

Ejercicio 16 :Realiza, por el procedimiento que quieras, las siguientes operaciones.

a) 16 hm^2 24 m^2 127 cm^2 x 5

b) 70 hm^2 95 m^2 835 cm^2 x 5

c) 6 km^2 47 hm^2 26 m^2 - 4 km^2 89 hm^2 67 m^2

8.2.5 UNIDADES DE VOLUMEN Y DE CAPACIDAD DEL S.I.

En el sistema internacional (S.I) el volúmen y la capacidad se consideran como una sola magnitud física y por consiguiente tienen una misma unidad fundamental; el metro cúbico, cuyo símbolo es m^3.

Los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico se dan en el cuadro siguiente:

	Unidad	Símbolo	Factor	
MULTIPLOS	exámetro cúbico	Em^3	10^{54} m^3	
	petámetro cúbico	Pm^3	10^{45} m^3	
	terámetro cúbico	Tm^3	10^{36} m^3	
	gigámetro cúbico	Gm^3	10^{27} m^3	
	Megámetro cúbico	Mm^3	10^{18} m^3	
	kilómetro cúbico	Km^3	10^9 m^3	1 000 000 000 m^3
	hectómetro cúbico	hm^3	10^6 m^3	1 000 000 m^3
	decámetro cúbico	dam^3	10^3 m^3	1 000 m^3
Unidad Fundamental	**metro cúbico**	$\mathbf{m^3}$	$\mathbf{10^0\ m^3}$	**1 m^3**
SUBMULTIPLOS	decímetro cúbico	dm^3	10^{-3} m^3	0,001 m^3
	centímetro cúbico	cm^3	10^{-6} m^3	0,000 001 m^3
	milimetro cúbico	mm^3	10^{-9} m^3	0,000 000 0001 m^3
	micrómetro cúbico	um^3	10^{-18} m^3	
	nanómetro cúbico	nm^3	10^{-27} m^3	
	picómetro cúbico	pm^3	10^{-36} m^3	
	femtómetro cúbico	fm^3	10^{-45} m^3	
	attómetro cúbico	am^3	10^{-54} m^3	

Ejemplo 1 : Expresa: 9,63 km^3 **a)** En m^3 **b)** En dam^3

Resolución:

a) 9,63 km^3 en m^3

$$9{,}63\ km^3 = 9{,}63\ km^3 \times \frac{10^9\ m^3}{1\ km^3}$$

En este factor de conversión es igual a 1; porque:

$$1\ km^3 = 10^9\ m^3 \Rightarrow 1 = \frac{10^9\ m^3}{1\ km^3}$$

$$9{,}63\ km^3 = 963 \times 10^{-2} \times 10^9 m^3 = 963 \times 10^7\ m^3$$

$\therefore$ $9{,}63\ km^3 = 963 \times 10^7\ m^3$ ***Rpta.***

b) 9,63 km^3 en dam^3

$$9{,}63\ km^3 = 9{,}63\ \cancel{km}^3 \times \frac{10^9\ \cancel{m}^3}{1\ \cancel{km}^3} \times \frac{1\ dam^3}{10^3\ \cancel{m}^3} = 9{,}63 \times 10^{9-3}\ dam^3$$

$$9{,}63\ km^3 = 9{,}63 \times 10^6\ dam^3 = 963 \times 10^{-2} \times 10^6\ dam^3 = 963 \times 10^4\ dam^3$$

$\therefore$ $9{,}63\ km^3 = 963 \times 10^4\ dam^3$ ***Rpta.***

Ejemplo 2 : Expresa: 368 m^3 **a)** En hm^3 **b)** En km^3

Resolución:

a) 368 m^3 en hm^3

$$368\ m^3 = 368\ m^3 \times \frac{1\ hm^3}{10^6\ m^3} = 368 \times 10^{-6}\ hm^3$$

$\therefore$ $368\ m^3 = 368 \times 10^{-6}\ hm^3$ ***Rpta.***

b) 368 m^3 en km^3

$$368\ m^3 = 368\ m^3 \times \frac{1\ km^3}{10^9\ m^3} = 368 \times 10^{-9}\ km^3$$

$\therefore$ $368\ m^3 = 368 \times 10^{-9}\ km^3$ ***Rpta.***

- **COMPLEJOS E INCOMPLEJOS DE VOLUMEN.**

(Recuerda que: números complejos son los que expresan unidades de varios órdenes de la misma especie y que números incomplejos son los que indican unidades de un sólo orden).

Así cuando decimos que un cuerpo geométrico tiene un volumen de 13 500 dm^3 lo hemos expresado con un número incomplejo (unidad de un sólo orden).

Pero si el volumen anterior lo escribimos así: 13 m^3 500 dm^3, lo hemos expresado en número complejo. (Unidad de varios ordenes).

Reducción de Complejos de Volumen a Incomplejos de Ordenes Inferior.

Observa el siguiente complejo de volumen, y reflexiona sobre cómo lo reducimos a incomplejos: 121 dm^3 3 cm^3 26 mm^3

Tu sabes que una unidad de orden superior vale 1 000 de la inmediata inferior. Pues bien,

$$\begin{cases} 121\ dm^3 = 121\ 000\ cm^3 = 121\ 000\ 000\ mm^3 \\ 3\ cm^3 = 3\ 000\ mm^3 \end{cases}$$

Por lo siguiente el volumen anterior expresado en mm^3 (Unidad de un sólo orden) será:

121 dm^3 3 cm^3 26 mm^3 = 121 000 000 mm^3 + 3 000 mm^3 + 26 mm^3

= **121 003 026 mm^3**

Lo que te dice que:

Para convertir un complejo de volumen en incomplejo de orden inferior, se escriben las cifras de los órdenes sucesivos, reservando tres lugares para cada orden y poniendo ceros en los lugares que resulten.

Ejemplo: Reduce a incomplejos el siguiente complejo: 5 m^3 7 dam^3 8 mm^3

Resolución:

$$\begin{cases} 5 \text{ m}^3 = 5\,000 \text{ dm}^3 = 5\,000\,000 \text{ cm}^3 = 5\,000\,000\,000 \text{ mm}^3 \\ 7 \text{ dm}^3 = 7\,000 \text{ cm}^3 = 7\,000\,000 \text{ mm}^3 \end{cases}$$

Luego: 5 m^3 7 dm^3 8 mm^3 = 5 000 000 000 mm^3 + 7 000 000 mm^3 + 8 mm^3

= **5 007 000 008 mm^3**

OPERACIONES CON UNIDADES DE VOLUMEN: Puede ocurrir dos casos:

a) **Las cantidades están expresadas en la misma unidad de medida.**

Este caso no ofrece dificultad alguna, pues se trata de una operación corriente así:

Ejemplo 1 : 85 m^3 + 5m^3 = 90 m^3 ***Ejemplo 2 :*** 36 dm^3 x 4 = 144 dm^3

b) **Las cantidades están expresadas en distinta unidad de medida.**

En este caso el procedimiento más cómodo es reducir las cantidades dadas a la misma unidad de medida, esto es, reducir el complejo a incomplejo, lo que ya sabes hacer, de esta forma, la operación queda reducida al primer caso.

Ejemplo 1 : Queremos sumar: 5 m^3 10 dm^3 3 cm^3 y 2 m^3 15 cm^3 para ello expresamos los sumandos en la misma unidad de volumen.

Primer Sumando:	*Segundo Sumando:*
5 m^3 10 dm^3 3 cm^3	2 m^3 15 cm^3
5 m^3 = 5 000 000 cm^3 +	2 m^3 = 2 000 000 cm^3 +
10 dm^3 = 10 000 cm^3	15 cm^3 = 15 cm^3
5 010 0003 cm^3	2 000 015 cm^3

Luego: 5 m^3 10 dm^3 3 cm^3 + 2m^3 15 cm^3 = 5 010 003 cm^3 + 2 000 015 cm^3

$\therefore$ 5 m^3 10 dm^3 3 cm^3 + 2 m^3 15 cm^3 = 7 010 018 cm^3 ***Rpta.***

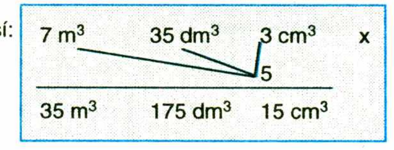
Ejemplo 2 : Queremos multiplicar: $7m^3$ 35 dm^3 3 cm^3 por 5. Para ello reducimos el multiplicando a una misma unidad de medida, quedando así la operación.

$$\left.\begin{array}{lcr} 7\ m^3 = 7\ 000\ dm^3 = & & 7\ 000\ 000\ cm^3 \\ 35\ dm^3 = & & 35\ 000\ cm^3 \\ 3\ cm^3 = & & 3\ cm^3 \end{array}\right\} +$$

$$7\ 035\ 003\ cm^3$$

Donde: 7 035 003 cm^3 x 5 = **35 175 015 cm^3**

También se podría haber realizado la operación así:



Ejemplo 3 : Haz la siguiente división: 35 m^3 175 dm^3 15 cm^3 : 5

Resolución:

$$\frac{35\ m^3}{5}\ \frac{175\ dm^3}{5}\ \frac{15\ cm^3}{5} = \boxed{7\ m^3\ 35\ dm^3\ 3\ cm^3}$$

OTRA FORMA:

$$\begin{array}{lcr} 35\ m^3 = 35\ 000\ dm^3 = & 35\ 000\ 000\ cm^3 & \\ 175\ dm^3 = & 175\ 000\ cm^3 & + \\ 15\ cm^3 = & 15\ cm^3 & \\ \hline & 35\ 175\ 015\ cm^3 & \end{array}$$

Luego: $\dfrac{35\ 175\ 015\ cm^3}{5} = \boxed{7\ 035\ 003\ cm^3}$ ***Rpta.***

Problema 1 : En una casa han gastado en un año 1 hm^3 y 324 m^3 de agua. ¿Cuánto habrán que pagar a razón de 1,20 soles el m^3?

Resolución:

La expresión: 1 hm^3 324 m^3, lo convertimos a m^3, veamos:

$$1\ hm^3\ 324\ m^3 = 1\ 000\ 000\ m^3 + 324\ m^3 = 1\ 000\ 324\ m^3$$

Luego: Si por 1 m^3 paga 1,20 soles; por los 1 000 324 m^3 pagará:

$$1\ 000\ 324\ m^3 = 1\ 000\ 324 \times 1,20 \text{ soles} = 1\ 200\ 388,80 \text{ soles}$$

Rpta. Lo que tiene que pagar es 1 200 388,80 soles.

Problema 2 : Reduce a incomplejo el siguiente número complejo: $3\ m^3\ 12\ dm^3\ 20\ cm^3$.

Resolución:

La expresión: $3m^3\ 12\ dm^3\ 20\ cm^3$, lo convertimos a cm^3, veamos:

$$3\ m^3 = 3\ m^3 \times \frac{1cm^3}{10^{-6}\ m^3} = 3 \times 10^6\ cm^3$$

$$\therefore \quad \boxed{3\ m^3 = 3 \times 10^6\ cm^3 = 3\ 000\ 000\ cm^3}$$

$$12\ dm^3 = 12\ dm^3 \times \frac{10^{-3}\ m^3}{1\ dm^3} \times \frac{1\ cm^3}{10^{-6}\ m^3} = 12 \times 10^{-3} \times 10^6\ cm^3 = 12 \times 10^{-3+6}\ cm^3$$

$$\therefore \quad \boxed{12\ dm^3 = 12 \times 10^3\ cm^3 = 12\ 000\ cm^3}$$

Luego: $3\ m^3\ 12\ dm^3\ 20\ cm^3 = 3\ 000\ 000\ cm^3 + 12\ 000\ cm^3 + 20\ cm^3 = 3\ 012\ 020\ cm^3$

$$\therefore \quad \boxed{3\ m^3\ 12\ dm^3\ 20\ cm^3 = 3\ 012\ 020\ cm^3}$$ ***Rpta.***

- **UNIDADES DE CAPACIDAD**

Llamamos capacidad de cualquier vasija o recipiente a su **volumen interior**, asi pues, las medidas de capacidad son también volúmenes con las medidas de capacidad medimos los líquidos, los gases y cualquier materia que se adapte a la vasija que la contiene.

Hemos dicho que se llama capacidad de una vasija o recipiente cualquier volumen interior. Es decir que la **capacidad** de un recipiente es el volumen de su parte interna. Pues bien.

La Capacidad de un Decímetro Cúbico (dm^3) se llama Litro.

$$\boxed{1\ \text{litro} = \text{capacidad de } 1\ dm^3}$$

A continuación establecemos la siguiente correspondencia entre unidades de capacidad y de volumen.

La Flecha debe leerse: "Capacidad de".

$1\ m^3$	$100\ dm^3$	$10\ dm^3$	$1\ dm^3$	$100\ cm^3$	$10\ cm^3$	$1\ cm^3$
⬇	⬇	⬇	⬇	⬇	⬇	⬇
1 kl (kilolitro)	1 hl (hectolitro)	1 dal (decalitro)	1 l (litro)	1 dl (decilitro)	1 cl (centilitro)	1 ml (mililitro)

A la vista de los correspondientes anteriores, observarás que:

1. Usamos unas medidas mayores que el litro unidad de capacidad; son sus múltiplos:

Megalitro	(Ml)	=	1 000 000 litros = 10^6 litros
Kilolitro	(Kl)	=	1 000 litros = 10^3 litros
hectolitro	(hl)	=	100 litros = 10^2 litros
decalitro	(dal)	=	10 litros = 10^1 litros

2. Usamos unas medidas menores que el litro. Son sus divisores o Submúltiplos.

decilitro	(dl)	=	0,1 litro = 10^{-1} litro
centilitro	(cl)	=	0,01 litro = 10^{-2} litro
mililitro	(ml)	=	0,001 litro = 10^{-3} litro

3. Tanto los múltiplos como los submúltiplos del litro se nombran de manera semejante a los del metro.

4. Las unidades de capacidad aumentan y disminuyen de 10 en 10.

Esto es, una unidad de 10 veces mayor que la inmediata inferior y 10 veces menor que inmediata superior.

Correspondencia entre las unidades de volumen, capacidad y masa (peso) referidas al agua pura.

Volumen	Capacidad	Masa (peso)
1 m^3	1 kl	1 000 kg (tonelada métrica)
100 dm^3	1 hl	100 kg (quintal métrico)
10 dm^3	1 dal	10 kg
1 dm^3	1 l	1 kg
100 cm^3	1 dl	100 g
10 cm^3	1 cl	10 g
1 cm^3	1 ml	1 g

Observación: *El litro cuyo símbolo es l no es una unidad del sistema internacional (S.I). Es simplemente el nombre comercial del decimetro cúbico.*

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Ejercicio 1 : Expresa: 324,5 cm^3 en *l*

Resolución:

$$324{,}5\ cm^3 = 324{,}5\ \cancel{cm^3} \times \frac{10^{-6}\ \cancel{m^3}}{1\ \cancel{cm^3}} \times \frac{1\ \cancel{dm^3}}{10^{-3}\ \cancel{m^3}} \times \frac{1\ l}{1\ \cancel{dm^3}}$$

$$324{,}5\ cm^3 = \underline{324{,}5} \times 10^{-6} \times 10^3\ l = \underline{3\ 245 \times 10^{-1}} \times 10^{-3}\ l = 3\ 245 \times 10^{-4}\ l$$

$$\therefore\ 324{,}5\ cm^3 = 3\ 245 \times 10^{-4}\ l = \boxed{0{,}324\ 5\ l}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : Expresa: 23 000 dm^3 en kl

Resolución:

$$23\ 000\ dm^3 = 23\ 000\ \cancel{dm^3} \times \frac{1\ \cancel{l}}{1\ \cancel{dm^3}} \times \frac{1\ kl}{10^3\ \cancel{l}} = \frac{23\ \cancel{000}}{1\ \cancel{000}}\ kl = 23\ kl$$

$$\therefore\ \boxed{23\ 000\ dm^3 = 23\ kl}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 3 : En un tonel hay 35 hl 3 dal 8 l de vino, añades 8 kl 3 l de vino. ¿Cuántos litros de vino hay en el tonel?

Resolución:

Primera Suma:

35 hl =	3 500 litros	
3 da$l$ =	30 litros	+
8 l =	8 litros	
	3 538 litros	

Segunda Suma:

8 kl =	8 000 litros	
3 l =	3 litros	+
	8 003 litros	

Luego: El total de litros de vino que hay en el tonel son:

$$\therefore\ \boxed{3\ 538\ litros + 8\ 003\ litros = 11\ 541\ litros}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 4 : ¿Cuántas botellas de medio litro llenarás con 2 m^3 y 15 dm^3 de agua?

Resolución:

En primer lugar convertimos los 2 m^3 y 15 dm^3 a litros.

$$2\ m^3\ 15\ dm^3 = 2\ (1\ kl) + 15\ (l) = 2\ (1\ 000\ l) + 15\ l$$

$$= 2\ 000\ l + 15\ l = \boxed{2\ 015\ l}$$

En segundo lugar calculamos el número de botellas de medio litro.

Número de botellas de medio litro = $\dfrac{\text{Capacidad Total}}{\text{Capacidad de cada botella}} = \dfrac{2\ 015\ l}{1/2\ l} = 4\ 030$

Rpta. El número de botellas de medio litro son: 4 030

Ejercicio 5 : De un tonel de vino que contiene 3 k*l* se han sacado 6 h*l*. ¿Cuántos decalitros de vino quedan en el tonel?

Resolución:

Contenido del tonel de vino = 3 k*l* = 3 (1 000 *l*) = 3 000 *l*

Se ha sacado = 6 h*l* = 6 (100 *l*) = 600 *l*

Lo que queda = 3 000 *l* - 600 *l* = 2 400 *l*

Luego; convertimos los 2 400 *l* a decalitros (dal). ➠ $2\ 400\ l = 2\ 400\not{l} \times \dfrac{1\ \text{dal}}{10\not{l}} = 240\ \text{dal}$

Rpta. En el tonel quedan 240 dal de vino

Ejercicio 6 : Una vasija vacía pesa 2 kg., se llena de agua y pesa 45 kg. ¿Cuántos dm^3 de agua contiene la vasija?

Resolución:

Peso de la vasija vacía = 2 kg

Peso de la vasija llena de agua = 45 kg

Luego; el peso del agua sería: 45 kg - 2 kg = 43 kg

Ahora convertimos los 43 kg a dm^3; veamos: 43 kg = 43 x 1 kg = 43 x 1 dm^3 = 43 dm^3

Rpta. La vasija contiene 43 dm^3 de agua.

Ejercicio 7 : Si 1 dm^3 de agua vale 0,25 soles. ¿Cuál es el precio de 3 kl 5 dal?

Resolución:

En primer lugar, convertimos los 2 kl 5 dal a dm^3.

2 k*l* 5 dal = 5 (1 000 *l*) + 5 (10 *l*) = 5 050 *l* = 5 050 dm^3 ➠ ∴ **2 k*l* 5 dal = 5 050 dm^3**

Luego: Si 1 dm^3 de agua vale 0,25 soles, los 5 050 dm^3 costarán:

2 kl 5 dal = 5 050 dm^3 = 5 050 x 0,25 soles = 1 262,50 soles

Rpta. El precio de 2 kl dal es de 1 262,50 soles

TALLER DE EJERCICIOS Nº 66

Ejercicio 1 : Completa las siguientes igualdades:

a) 18 m^3 = ... dm^3	**b)** 3 dm^3 = ... cm^3	**c)** 2 cm^3 = ... mm^3

Rpta. **a)** 18 000 **b)** 3 000 **c)** 2 000

Ejercicio 2 : Reduce a incomplejos el siguiente número complejo: ***Rpta.*** 6 016 000 010 mm^3

6 m^3 16 dm^3 10 mm^3

Ejercicio 3 : Escribe en forma decreciente las siguientes medidas: ***Rpta.*** 0,045 dam^3 ; 0,4 m^3; 6,35 dm^3 y 300 cm^3

63,5 dm^3 ; 0,045 dam^3 ; 3 00 cm^3 ; 0,4 m^3

Ejercicio 4 : Tres personas han comprado 26 m^3 80 hm^3 y 5 dam^3 de agua mineral, se la quieren distribuir en partes iguales. ¿Qué cantidad de agua mineral corresponderá a cada una? ***Rpta.*** 26 668 342 m^3

Ejercicio 5 : En una casa han gastado, en un caño, 1 dam^3 y 822 m^3 de agua. ¿Cuánto habrá que pagar a razón de 5 soles el m^3? ***Rpta.*** S/. 9 110

Ejercicio 6 : Sabiendo que el volumen de un cubo es de 125 m^3, averigua cuál será la longitud de cada una de sus tres dimensiones. ***Rpta.*** 5 m^3

Ejercicio 7 : Un grifo dá 2 dm^3 de agua por segundo. ¿Cuánto tiempo será necesario para llenar un depósito de m^3 y 440 dm^3? ***Rpta.*** 720 s

Ejercicio 8 : Sobre un campo de forma cuadrada, de 70 m de lado, ha caido durante un día de lluvia 50 dm^3 de agua por m^2 ¿Cuántos m^3 de agua han caido sobre dicho campo? ***Rpta.*** 245 m^3

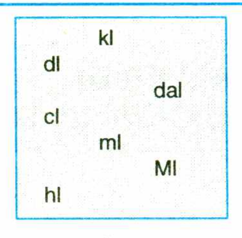
Ejercicio 9 : Si un metro cúbico de agua vale 7 soles. ¿Cuál es el precio de 13 dam^3 y 5 dm^3? ***Rpta.*** S/. 91 000,035

Ejercicio 10 : Completa esta igualdades:

1 *l* = 10 d*l* = ... c*l* = ... m*l*

1 k*l* = 1 000 *l* = ... d*l* = ... c*l*

Ejercicio 11 : Establece una correspondencia entre conjuntos:



A

1 000 000 l
10 l
100 l
0,1 l
1 000 l
0,01 l
0,001 l

B

Ejercicio 12 : En 45 dal. ¿Cuántos litros, decilitros y mililitros hay?

Rpta. 450 l; 4 500 dl y 450 000 ml

Ejercicio 13 : Si un litro de leche cuesta 1,80 soles. ¿Cuánto cuesta un hectolitro?

Rpta. S/. 180

Ejercicio 14 : Un deposito contiene 2 hl de aciete y ha costado 144 soles. ¿A como resulta el litro? ¿y el centilitro?

Rpta. S/. 0,72 y S/. 0,007 2

Ejercicio 15 : Expresa en litros:

Rpta. a) 8 709,02 l b) 1 545,33 l

a) 8 kl 7 hl 9 *l* 2 cl **b)** 15 hl 4 dal 5 *l* 3 dl 3 cl

Ejercicio 16 : Efectuar las siguientes restas:

a) 6 hl - 5dal 4 l = **b)** 15 kl 4 l - 85 dal 9 dl =

Ejercicio 17 : Si se tiene 5 toneladas de vino de un litro cada una. ¿Cuántas copas se pueden llenar, si en cada una caben 25 centilitros?

Rpta. 20 copas

Ejercicio 18 : Si una ampolla de inyectable cuesta 4,30 soles el mililitro. ¿A cómo resulta el precio del litro?

Rpta. S/. 4 300

Ejercicio 19 : Completa las igualdades:

a) 5 dal = ... *l* **b)** 96,3 hl = ... *l*

Ejercicio 20 : Una vasija vacía pesa 2 kg; se llena de agua y pesa 45 kg. ¿Cuántos dm3 de agua contiene la vasija?

Rpta. 43 dm^3

8.2.6 UNIDADES DE TIEMPO

El tiempo es la única magnitud no decimal del sistema internacional **(S.I)**

Su unidad fundamental es el **segundo** cuyo símbolo es **S**

Los múltiplos del segundo se pueden apreciar en la siguiente lista:

año	=	a
día	=	d
hora	=	h
minuto	=	min

OTRAS UNIDADES DE TIEMPO:

- Un año se divide en 12 meses:

Enero	= 31 días	Julio	= 31 días
Febrero	= 28 días	Agosto	= 31 días
Marzo	= 31 días	Setiembre	= 30 días
Abril	= 30 días	Octubre	= 31 días
Mayo	= 31 días	Noviembre	= 30 días
Junio	= 30 días	Diciembre	= 31 días

- En los años bisiestos, febrero tiene 29 días.
- Un año tiene también cuatro estaciones: Primavera, Verano, Otono y Invierno.

También conoces o has oído nombrar otras unidades de tiempo como son:

Semana	= 7 días
Quincena	= 15 días
Trimestre	= 3 meses
Semestre	= 6 meses
Bienio	= 2 años
Trienio	= 3 años
Lustro	= 5 años
Década	= 10 años
Siglo	= 100 años
Milenio	= 1 000 años

Recuerda que:

- *Un año tiene 12 meses que son de 30,31 ó 28 días*
- *Un año tiene 365 días y si es bisiesto, 366. Entonces febrero tiene 29 días.*
- *Un día tiene 24 horas, 1 hora 60 minutos y el minuto 60 segundos.*

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE UNIDADES DE TIEMPO

Ejercicio 1 : ¿Cuántos días son 4 920 horas?

Resolución:

$$4\,920 \text{ h} = 4\,920 \not{h} \times \boxed{\frac{1 \text{ día}}{24 \not{h}}} = \frac{4\,920}{24} \text{ días} = 205 \text{ días}$$

$\therefore$ $\boxed{4\,920 \text{ horas} = 205 \text{ días}}$ ***Rpta.***

Ejercicio 2 : ¿Cuántos días son 24 semanas?

Resolución:

$$24 \text{ semanas} = 24 \cancel{\text{semanas}} \times \boxed{\frac{7 \text{ días}}{1 \cancel{\text{semana}}}} = 24 \times 7 \text{ días} = 168 \text{ días}$$

∴ **24 semanas = 168 días** ***Rpta.***

Ejercicio 3: Reduce a horas 2 100 minutos.

Resolución:

$$2\,100 \text{ min} = 2\,100 \cancel{\text{min}} \times \boxed{\frac{1 \text{ h}}{60 \cancel{\text{min}}}} = 35 \text{ h}$$

∴ **2 100 minutos = 35 horas** ***Rpta.***

Ejercicio 4: Un omnibus que va de Lima a Piura recorre en cierto tramo 120 km en 2 h 40 min ¿Cuántos metros recorre por minuto en dicho tramo?

Resolución:

De la expresión: 2 h 40 min, convertimos las horas a minutos.

2 h 40 min = 2(60 min) + 40 min

= 120 min + 40 min = **160 min**

∴ **2 h 40 min = 160 min**

- También convertimos los 120 km a m; veamos:

120 km = 120(1 000 m) = **120 000 m**

Luego, decir que recorre 120 km en 2 h 40 min es lo mismo que decir que 120 000 m lo recorre en 160 min.

De donde: $\text{En 1 min recorre} = \dfrac{120\,000 \text{ m}}{160} = 750 \text{ m}$

Rpta: **En 1 minuto recorre 750 m**

Ejercicio 5: Un tren recorrio 248 km en 8 horas. ¿Qué distancia recorrió por hora?

Resolución:

Si en 8 horas recorrió 248 km ; en 1 hora recorrió = $\dfrac{248 \text{ km}}{8} = 31 \text{ km}$

Rpta: **Por hora el tren recorrió 31 km**

Ejercicio 6: Un transportista sale de Chimbote hacia Lima a las 7 de la mañana, conduciendo un camión a una velocidad de 60 km/h ¿A qué distancia de Chimbote se hallará después de 3 h 20 min?

Resolución:

De la expresión: 3h 20 min ; convertimos los 20 min a horas

$$20 \text{ min} = 20 \text{ min} \times \boxed{\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}} = \frac{20}{60} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

De donde:

$$3 \text{ h } 20 \text{ min} = 3 \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = \boxed{\frac{10}{3} \text{ h}}$$

Este es el tiempo empleado en recorrer un espacio "e" desde Chimbote hasta el lugar donde se encuentra.

Recuerda que:

Espacio = velocidad × tiempo

$$\text{Espacio} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{10}{3} \text{ h} = 200 \text{ km}$$

Rpta:

Después de 3h 20 min se encuentra a 200 km de Chimbote.

Ejercicio 7: Un auto empleó 6 horas en recorrer un trayecto de 300 km ¿Cuánto tiempo empleará para recorrer el triple trayecto con la misma velocidad?

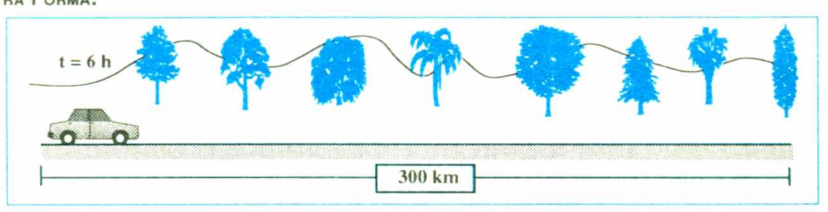
Resolución:

Si en 6 h recorre un trayecto de 300 km, en 1 h recorrerá: $\frac{360 \text{ km}}{6} = 50$ km

Luego, Si en 1h recorre 50 km; para recorrer el triple trayecto con la misma velocidad; osea: 3 × 300 km = 900 km; debe emplear:

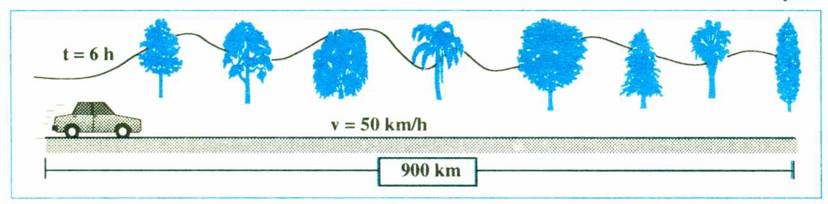
$$\frac{900}{50} = \boxed{18 \text{ h}}$$

OTRA FORMA:



Sabemos que: $\boxed{\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}}}$ ➡ $\text{Velocidad} = \frac{300 \text{ km}}{6 \text{ h}} = \boxed{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$

Si el trayecto es el triple el gráfico es el siguiente:



Sabemos que: $\text{Tiempo} = \dfrac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}}$ ➠ $\text{Tiempo} = \dfrac{900 \cancel{km}}{50 \dfrac{\cancel{km}}{h}} = \boxed{18 \text{ h}}$

Rpta: El tiempo que empleará en recorrer el triple trayecto con la misma velocidad es 18 h

Ejercicio 8: Reduce a meses 9 años y medio

Resolución:

$$9 \text{ años y medio} = 9{,}5 \text{ años} = 9{,}5 \cancel{\text{años}} \times \boxed{\dfrac{12 \text{ meses}}{1 \cancel{\text{año}}}} = \boxed{114 \text{ meses}}$$

∴ 9 años y medio = 114 meses ***Rpta.***

Ejercicio 9: ¿Cuántos lustros son 390 años?

Resolución:

$$390 \text{ años} = 390 \cancel{\text{años}} \times \boxed{\dfrac{1 \text{ lustro}}{5 \text{ años}}} = \dfrac{390}{5} \text{ lustros} = \boxed{78 \text{ lustros}}$$

∴ 390 años = 78 lustros ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 69

Ejercicio 1 : ¿Cuántos segundos hay en una hora?	***Rpta.***	3 600 s
Ejercicio 2 : En tres hora ¿Cuántos segundos hay?	***Rpta.***	10 800 s
Ejercicio 3 : ¿Cuántos segundos hay en 5h 20 min?	***Rpta.***	19 200 s
Ejercicio 4 : ¿Cuántas horas hay en 1 560 min?	***Rpta.***	26 h
Ejercicio 5 : ¿Cuántas horas hay en 216 000 min	***Rpta.***	3 600 h
Ejercicio 6 : Reduce a min un mes de 30 días	***Rpta.***	43 200 min
Ejercicio 7 : ¿Cuántas horas son 40 320 minutos?	***Rpta.***	672 h
Ejercicio 8 : ¿Cuántos días son: 20 años 3 meses 2 semanas ?	***Rpta.***	7 404 días
Ejercicio 9 : ¿Cuántos días son 2 472 horas?	***Rpta.***	103 días
Ejercicio 10 : ¿Cuántos días son 36 semanas?	***Rpta.***	252 días
Ejercicio 11 : Reduce a días 15 semanas 3 días	***Rpta.***	108 días
Ejercicio 12 : Reduce a meses 7 años y medio	***Rpta.***	90 meses
Ejercicio 13 : ¿Cuántas semanas son 434 días	***Rpta.***	62 semenas
Ejercicio 14 : ¿Cuántos lustros son 225 años	***Rpta.***	45 lustros
Ejercicio 15 : Un tren recorrió 366 km en 6h ¿Qué distancia recorrió por hora?	***Rpta.***	61 km
Ejercicio 16 : Un tren empleó 10 horas en recorrer un trayecto de 560 km ¿Cuánto tiempo emplearía para recorrer el doble trayecto con la misma velocidad?	***Rpta.***	20 h
Ejercicio 17 : Un coche recorre 1 236 metros por minuto. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una hora, 30 minutos?	***Rpta.***	111,24 km
Ejercicio 18 : De Paita al Callao, un barco tarda en llegar 15 días y 6 horas. ¿Cuál es el total de horas empleadas en la travesía?	***Rpta.***	366 h
Ejercicio 19 : ¿Cuántos trimestres hay en un año? ¿Cuántos bimestres? ¿Cuántos cuatrimestres? ¿Y cuántos semestres?	***Rpta.***	4 ; 6 ; 3 y 2
Ejercicio 20 :Un niño dice a su amigo "Hoy cumplo dos lustros". ¿Cuántos años tiene?	***Rpta.***	10 años

¿SABÍAS QUE...

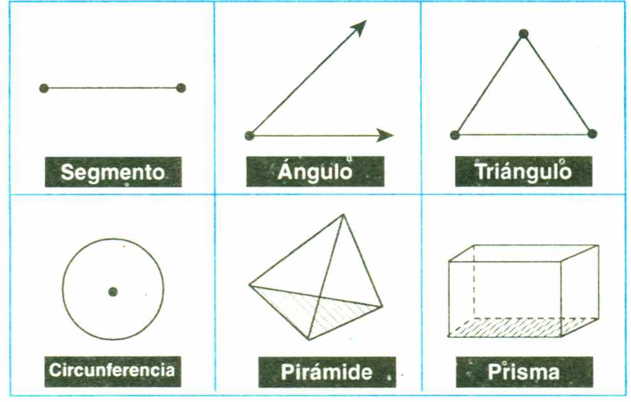
... la noción de conjunto no es nueva en el campo de la matemática, pues ya en su época Galileo Galilei se había referido a ella en una de sus obras?

Sin embargo, la paternidad de la **teoría de conjuntos** *en su sentido actual se le atribuye a Georg Cantor (1 845 - 1 918), matemático ruso que desarrolló dicha teoría en una serie de memorias en la década de 1 874 a 1 884.*

ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

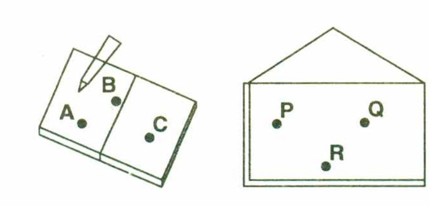
Cada vez que los matemáticos inician el desarrollo de una teoría fijan como punto de partida los conceptos primitivos los cuales se aceptan sin definir y sólo se dan a conocer características de dichos conceptos. En el caso de la Geometría, los **conceptos primitivos** sin definir son; el **punto la recta y el plano** con ellos sí podemos definir conceptos nuevos como por ejemplo el de figuras geométricas:



La Geometría tiene por objeto el estudio de tales figuras, sus propiedades y las mediciones de sus longitudes, aberturas, perímetros, superficies, volúmenes, etc.

EL PUNTO

Las marcas dejadas por un lápiz en un cuaderno o una tiza en la pizarra son algunas representaciones extraídas de nuestro entorno real que nos dan una idea aproximada de lo que es un Punto.



Los puntos se designan por letras mayúsculas A, B, C, ... , P, Q, R, etc

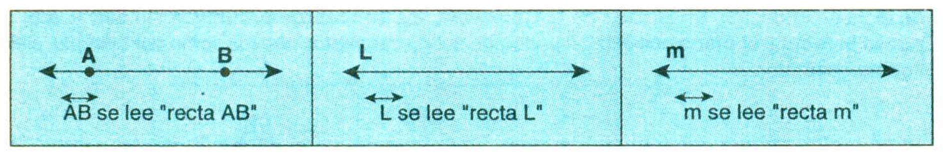
El Punto se caracteriza por **no tener dimensiones** y sirve para indicarnos una posición en el espacio; esto es algo que sólo se acepta en nuestra imaginación pues en la vida real los puntos que encontramos siempre tienen dimensiones, por más pequeños que parezcan.

LA RECTA

El borde de una regla a una cuerda extendida nos dan una idea aproximada de lo que es parte de una recta.

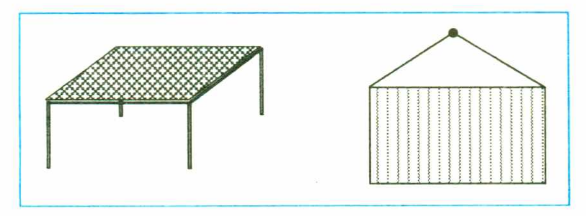
La **recta** es una línea que se extiende infinitamente en ambos sentidos pero siguiendo una misma dirección. Se designa por dos letras mayúsculas o por una sola letra (Mayúscula o minúscula).

Ejm:



EL PLANO

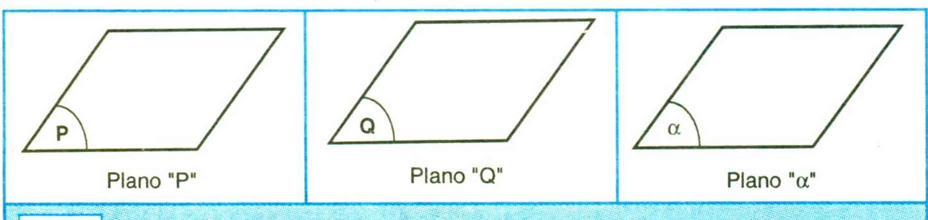
La superficie de una mesa o de una pizarra nos dan una idea aproximada de los que es parte de un plano.



Describimos un **plano** como una superficie ilimitada generada por la recta al moverse sin cambiar de dirección.

Se designa por una letra mayúscula **P,Q,R,....** o por una letra griega α,β,γ, **... etc.**

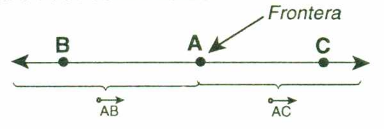
Ejemplos:



NOTA: Gráficamente se representa sólo a una parte del plano, por un paralelogramo, suponiendo que se extiende indefinidamente

SEMIRRECTA, RAYO Y SEGMENTO DE RECTA

Consideremos una recta "BC" y un punto **A** al cual llamaremos **frontera** que separa a a la recta en dos **semirrectas**.



Se lee: "Semirrecta AB"

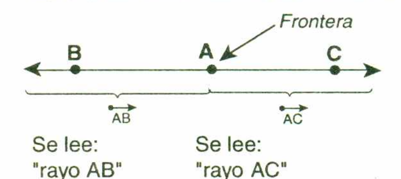
Se lee : "Semirrecta AC"

La frontera no pertenece a las semirrectas que ella misma determina.

$$A \notin \overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB} \text{ y } A \notin \overset{\circ\!\!\rightarrow}{AC}$$

RAYO

Es la unión de la semirrecta con la frontera



Se lee: "rayo AB"

Se lee: "rayo AC"

La frontera si pertenece a los rayo que ella determina. O sea:

$$\overset{\bullet\!\!\rightarrow}{AC} = \overset{\circ\!\!\rightarrow}{AC} \cup \{A\}$$

$$\overset{\bullet\!\!\rightarrow}{AB} = \overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB} \cup \{A\}$$

NOTA: a la frontera «A» también se le llama **origen** de los rayo AC y AB.

SEGMENTO DE RECTA:

Es una línea recta limitada en sus extremos. Se designa por las letras mayúsculas correspondientes a sus extremos. A diferencia de la recta, el rayo y la semirrecta, el segmento se caracteriza por tener **longitud.**

Se denota por las dos letras mayúsculas de sus extremos acompañadas de una "rayita" en la parte superior

$\overline{AB}$: se lee "segmento AB" o

$\overline{BA}$: se lee "segmento BA"

La longitud (o distancia entre los extremos) se donota sin la «rayita» superior.

Ejemplo:

AB: se lee "longitud del segmento AB"
AB = 8 cm, o también
BA = 8 cm

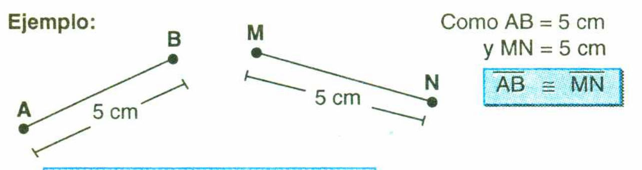
A B
8 cm

Congruencia de Segmentos:

Dos segmentos se dice que son congruentes cuando tienen igual longitud.

El símbolo ≅ se lee "es congruente a"

Ejemplo:



Como AB = 5 cm
y MN = 5 cm

$\overline{AB} \cong \overline{MN}$

Operaciones con Segmentos:

Las operaciones se realizan con los números que indican las longitudes.

Ejemplo:
Con respecto a la figura que se muestra, realizar las siguientes operaciones.

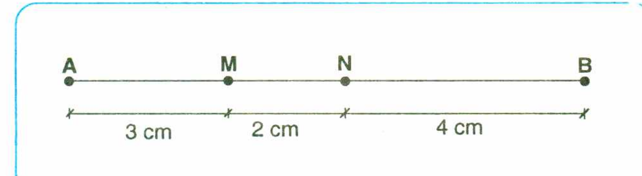
i) AM + MN - NB

ii) 2AM + 3MN

iii) AM.MN + MN.NB

iv) $\dfrac{2AM.NB}{MN + NB}$

v) $NB^2 - AM^2$



Resolución:

※ En primer lugar hallamos las longitudes de cada segmento.
Del gráfico vemos que:

AM = 3 cm ; MN = 2 cm ; NB = 4 cm

※ Luego reemplazamos en cada operación:

i) AM + MN - NB = 3 cm + 2 cm - 4 cm = **1 cm** **Rpta.**

ii) 2AM + 3MN = 2(3 cm) + 3(2 cm) = 6 cm + 6 cm = **12 cm** **Rpta.**

iii) AM.MN + MN.NB = (3 cm)(2 cm) + (2 cm) (4 cm) = $6\ cm^2 + 8\ cm^2 = 14\ cm^2$ **Rpta.**

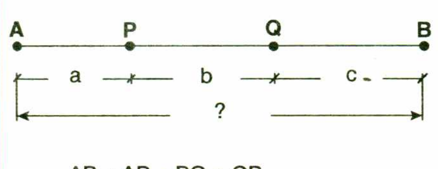
iv) $\dfrac{2AM.NB}{MN + NB} = \dfrac{2(3\ cm)(4\ cm)}{2\ cm + 4\ cm} = \dfrac{24\ cm^2}{6\ cm} = 4\ cm$ **Rpta.**

v) $NB^2 - AM^2 = (4\ cm)^2 - (3\ cm)^2 = 16\ cm^2 - 9\ cm^2 = 7\ cm^2$ **Rpta.**

Propiedades de los Segmentos:

① Propiedad de la Suma

Si un segmento se divide en varias partes, la longitud total es igual a la suma de las longitudes de cada una de las partes.

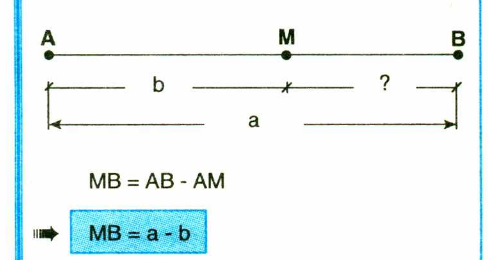


$AB = AP + PQ + QB$

➠ $AB = a + b + c$

② Propiedad de la Diferencia

Si un segmento se divide en dos partes la longitud de una de ellas es igual a la longitud total menos la longitud de la otra parte.

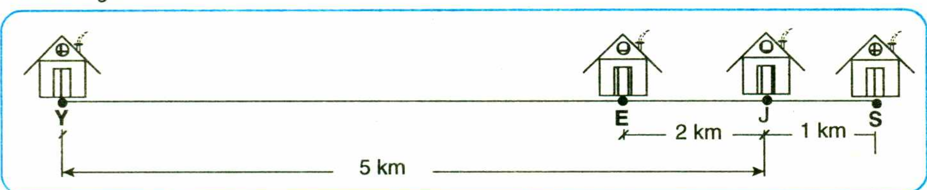


$MB = AB - AM$

➠ $MB = a - b$

Ejemplo:

Yolanda, Emily, Judith y Sofía viven en una avenida y sus casas están distanciadas según como indica la figura:



i) ¿A qué distancia viven Yolanda y Sofía?

ii) ¿Cuál es la distancia entre las casa de Yolanda y Emily?

Resolución:

Utilizamos la siguiente notación:

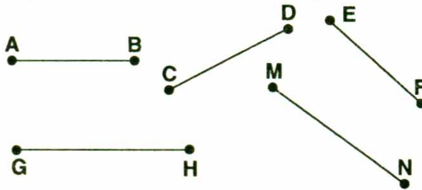
YS	➠	Distancia entre las casas de Yolanda y Sofía
YE	➠	Distancia entre las casas de Yolanda y Emily.

i) Según la propiedad ①
$YS = 5\text{ km} + 1\text{ km} = 6\text{ km}$ **Rpta.**

ii) Según la propiedad ②
$YE = 5\text{ km} - 2\text{ km} = 3\text{ km}$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 70

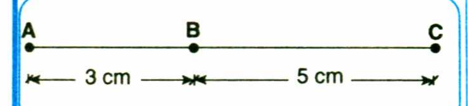
Ejercicio 1 Usa tu regla y escribe las longitudes de cada uno de los segmentos:



¿Qué segmentos son congruentes?
Completar los espacios en blanco:

AB ≅ ..... ; ..... ≅ .....

Ejercicio 2 La figura muestra a tres puntos colineales A, B y C



Calcular

i) AC = ...

ii) AB + BC = ...

iii) BC - AB = ...

iv) AB.BC = ...

v) AB.AC = ...

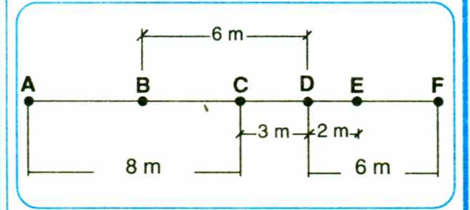
vi) AC.(BC - AB) = ...

vii) 3AB + 5BC = ...

viii) $\dfrac{2AB + 3AC}{BC - AB}$ = ...

ix) $BC^2 - AB^2 + 2AB.BC$ = ...

Ejercicio 3 Con respecto al siguiente gráfico.



A) Calcular las siguientes longitudes:

i) CE **ii)** AF **iii)** BC **iv)** AB
v) EF **vi)** BE **vii)** CF

Resolución:

i) CE = 3 m + 2 m = 5 m

ii) AF = ...

iii) BC = ...

iv) AB = ...

v) EF = 6 m - 2 m = 4 m

vi) BE = ...

vii) CF = ...

B) Completar escribiendo el segmento congruente respectivo.

i) BC ≅ CD

ii) BD ≅ .....

iii) ..... ≅ CE

iv) ..... ≅ BE

C) Realizar las siguientes operaciones

i) 2AB + 3EF = ...

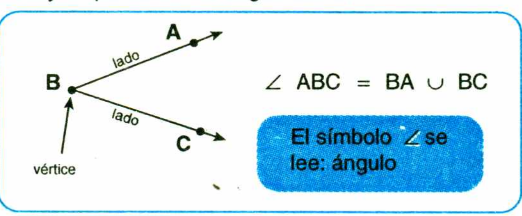
ii) 5BE - 2AF = ...

iii) BC.AD - CD.DF = ...

iv) 6BD + BC - 2AE = ...

ÁNGULOS

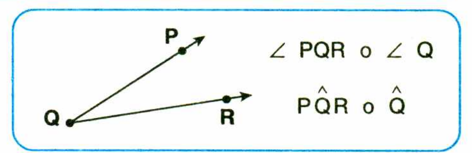
Ángulo se define como la unión de dos rayos que tienen su origen común.



Elementos

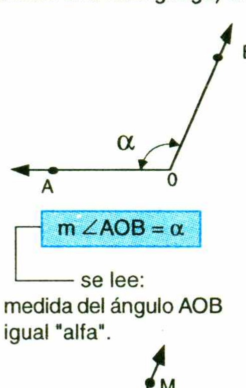
- **Lados:** Son los rayos BA y BC
- **Vértice:** Es el origen común B.

Notación.- Los ángulos se designan con tres letras mayúsculas; la letra central corresponde al vértice. Algunas veces cuando no hay lugar a confusión se designan sólo con la letra del vértice. **Ejemplo:**



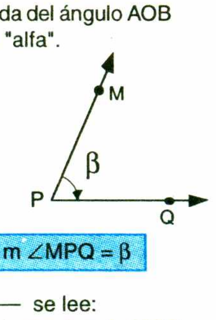
MEDIDA DE UN ÁNGULO.- Los ángulos se miden en grados sexagesimales. Para encontrar la medida de un ángulo se utiliza un instrumento llamado **transportador.**

Cuando no se conoce la medida de un ángulo, se acostumbra escribir una variable (generalmente una letra griega) en la abertura, para indicar su medida.



m ∠AOB = α

se lee: medida del ángulo AOB igual "alfa".



m ∠MPQ = β

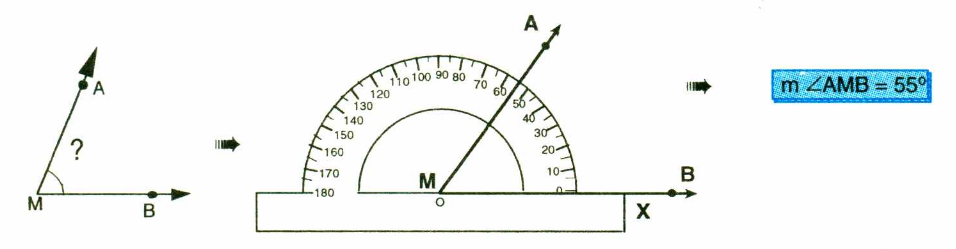
se lee: medida del ángulo MPQ igual "beta".

Algunas letras del alfabeto griego son:

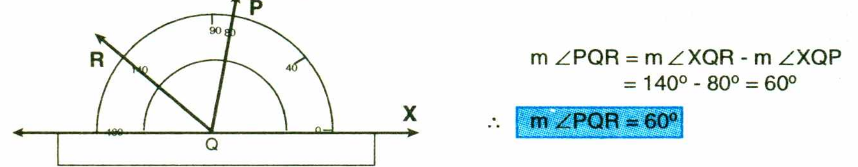
Símbolo	Nombre
α	alfa
β	beta
γ	gamma
θ	theta
π	pi
σ	sigma
φ	phi
ω	omega

Empleo de Transportador

El transportador es un semicírculo graduado de 0° a 180°. Por ejemplo para medir el ángulo AMB se hace coincidir el vértice M con el origen "O" del rayo OX del transportador; la medida queda indicada por la intersección del lado MA con la escala graduada.



OBSERVACION.- Si necesitamos medir varios ángulos al mismo tiempo y no nos es posible hacer coincidir un lados del ángulo con eje del transportador, procederemos así:



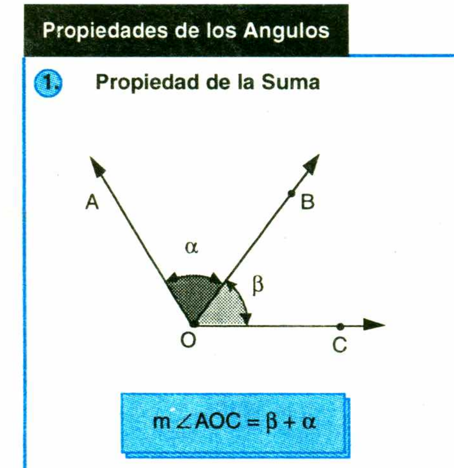
$$m\angle PQR = m\angle XQR - m\angle XQP = 140° - 80° = 60°$$

$\therefore$ $m\angle PQR = 60°$

El ejemplo anterior nos induce a enunciar las siguientes propiedades:

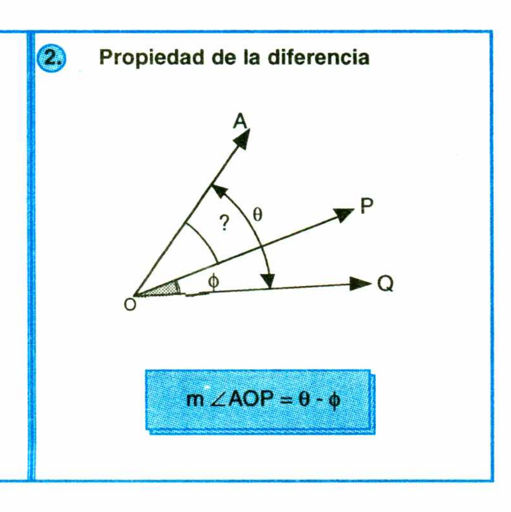
Propiedades de los Angulos

1. Propiedad de la Suma

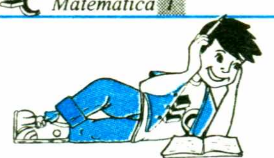


$m\angle AOC = \beta + \alpha$

2. Propiedad de la diferencia

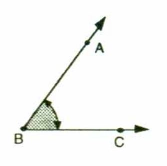


$m\angle AOP = \theta - \phi$

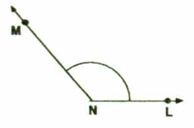


TALLER DE EJERCICIOS Nº 71

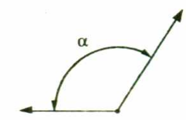
Ejercicio 1 Usando el transportador calcular la medida de los siguientes ángulos:



m ∠ABC = ...

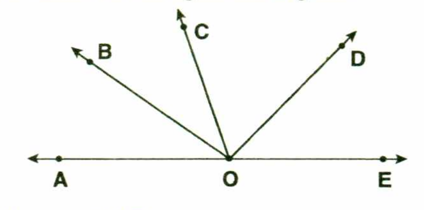


m ∠MNL = ...



α = ...

Ejercicio 2 Usando el transportador. Calcular la medida de los siguientes ángulos.



i) m ∠AOB = ...

ii) m ∠BOC = ...

iii) m ∠COD = ...

iv) m ∠DOE = ...

v) m ∠AOC = ...

vi) m ∠BOD = ...

vii) m ∠BOE = ...

viii) m ∠AOE = ...

Ejercicio 3 Usando el transportador. Calcula la medida de cada ángulo y realiza las operaciones indicadas.

m ∠POQ = ...
m ∠QOR = ...
m ∠ROS = ...

i) m ∠POQ + m ∠QOR = ...

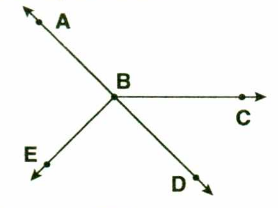
ii) m ∠POR - m ∠QOR = ...

iii) m ∠ROS + m ∠QOP = ...

iv) m ∠POS - (m ∠POQ + m ∠ROS) = ...

....

Ejercicio 4 Utilizando el transportador, realiza las siguientes operaciones.



i) m ∠ABD + m ∠EBD = ...

ii) m ∠CBE - m ∠EBA = ...

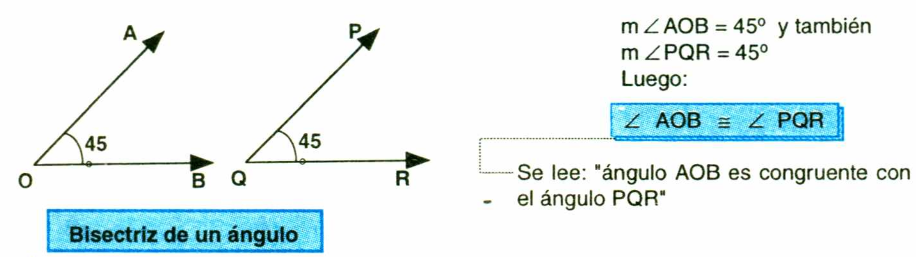
iii) 2 m ∠ABC - m ∠CBD = ...

iv) m ∠ABD + 2 m ∠CBD = ...

Congruencia de ángulos:

Dos ángulos se dice que son congruentes cuando sus medidas son iguales.

Ejemplo: al medir con tu transportador encontrarás que:



m∠AOB = 45° y también
m∠PQR = 45°
Luego:

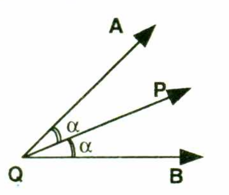
∠ AOB ≅ ∠ PQR

Se lee: "ángulo AOB es congruente con el ángulo PQR"

Bisectriz de un ángulo

Es el rayo que partiendo del vértice, divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

Ejemplo:



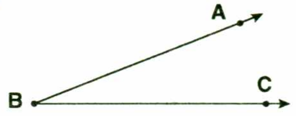
$\overrightarrow{OP}$ divide al ∠AOB en dos ángulos AOP y POB que son congruentes por tener la misma medida "α". Luego.

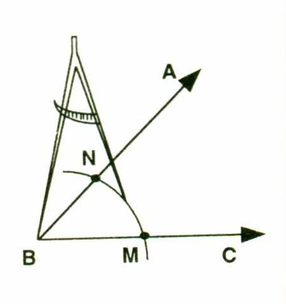
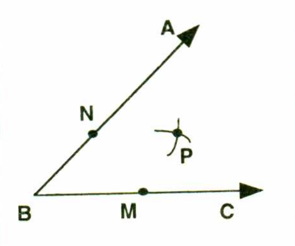
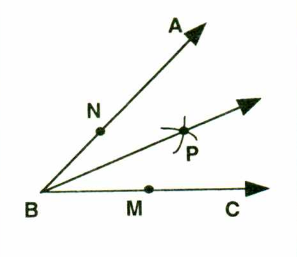
$\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ∠AOB

¿Cómo trazar una bisectriz utilizando sólo regla y compás?

Por ejemplo, deseamos trazar la bisectriz del ∠ABC.

Se procede de la siguiente manera:

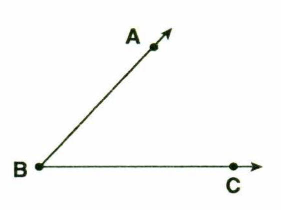


1er. paso: ubicas la punta del compás en el vértice B y con una abertura que tú eliges, dibujas un arco que cortará a ambos lados en M y N. 	**2do. paso:** Con la punta del compás en M y luego en N, con una misma abertura, dibuja dos arcos que se cortarán en P. 	**3er. paso:** Une el vértice B con el punto "P" y obtendrás la bisectriz BP del ∠ABC 

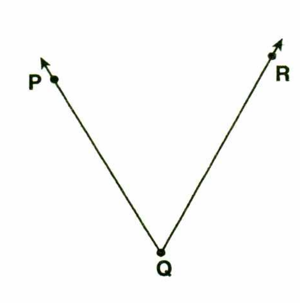
TALLER DE EJERCICIOS Nº 72

Utilizando regla y compás, traza la bisectriz de los siguientes ángulos.

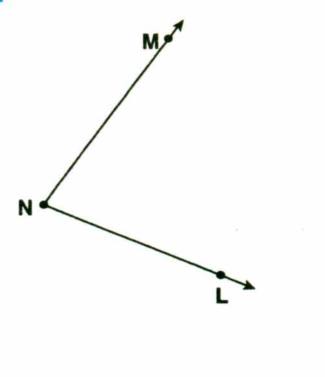
1



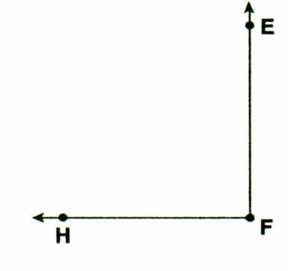
3



2



4



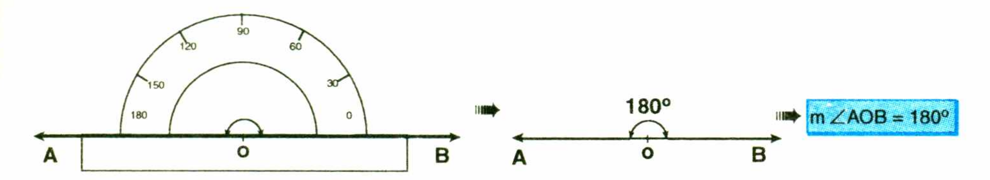
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS:

Los ángulos se clasifican atendiendo a ciertos criterios.

A) Según su medida

- **Angulo Nulo.-** Cuando sus dos lados coinciden, midiendo de esta manera 0°

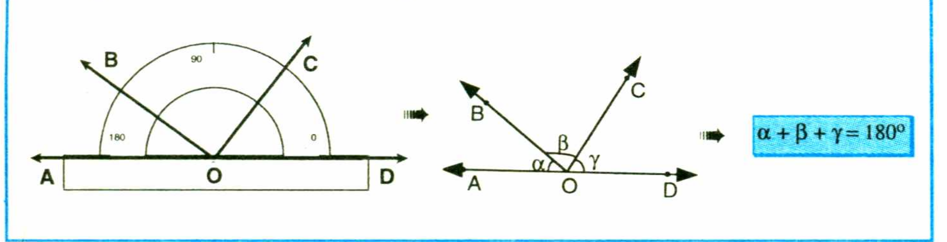
- **Angulo llano.-** Cuando sus dos lados se encuentran extendidos en direcciones opuestas. Mide 180°



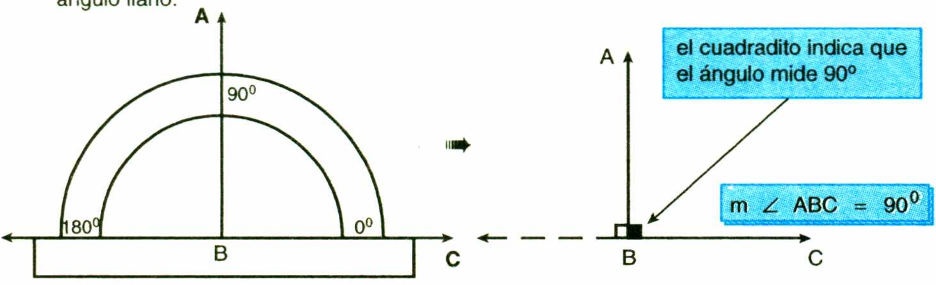
¡Atención!

PROPIEDAD DEL ÁNGULO LLANO

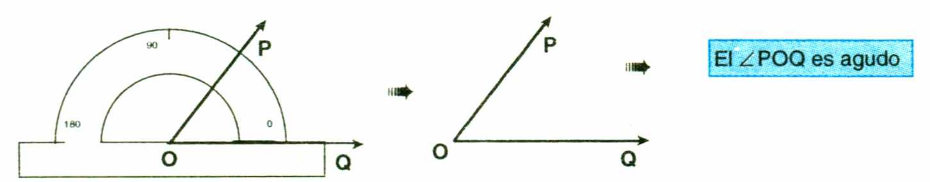
Si un ángulo llano se divide en varios ángulos consecutivos, todos ellos sumarán 180°.



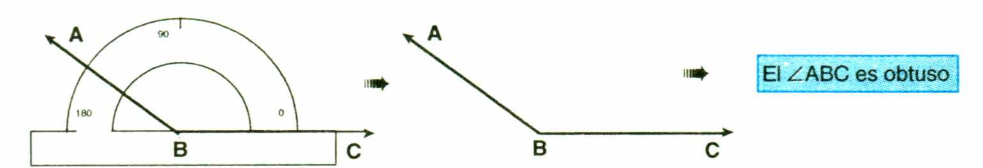
- **Ángulo Recto.-** Es uno de los ángulos que se obtiene cuando se traza la bisectriz a un ángulo llano.



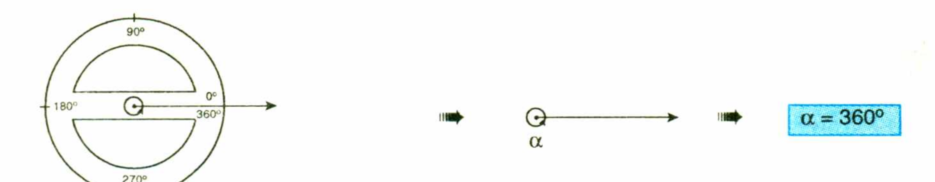
❖ **Angulo Agudo.-** Es el ángulo cuya medida es menor que 90º (pero mayor que 0º)



❖ **Ángulo obtuso.-** Es el ángulo cuya medida es mayor que 90º (pero menor que 180º)



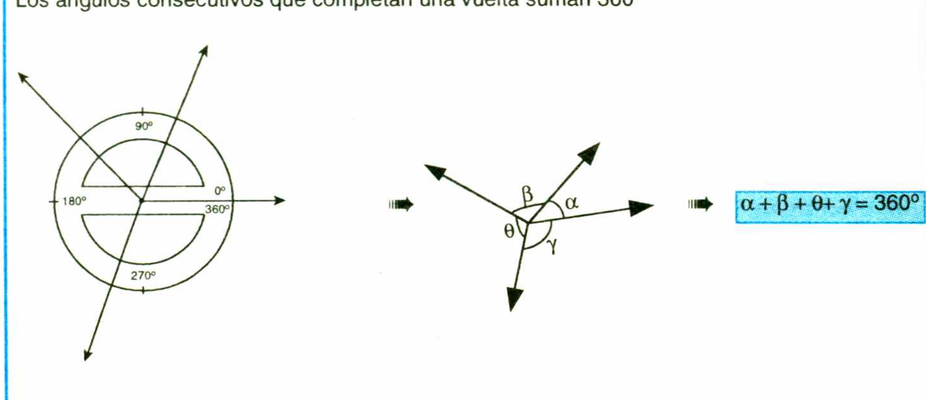
❖ **Ángulo de una vuelta.-** Es el ángulo cuya medida es 360º.



¡Atención!

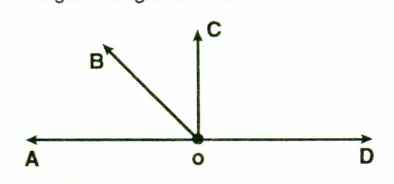
PROPIEDAD DEL ÁNGULO DE UNA VUELTA

Los ángulos consecutivos que completan una vuelta suman 360º



TALLER DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS Nº 73

Ejercicio 1 Usa el transportador y clasifica a los ángulos según su medida.



m ∠AOB = ... ➠ el ∠ AOB es agudo

m ∠BOC = ... ➠ el ∠ BOC es ....

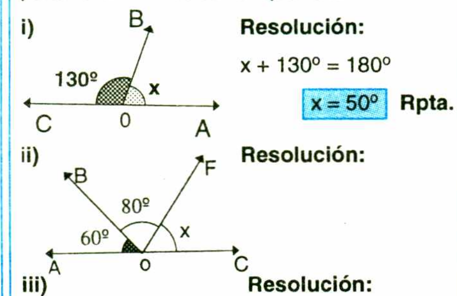
m ∠COD = ... ➠ el ∠ COD es ....

m ∠BOD = ... ➠ el ∠ BOD es ....

m ∠AOC = ... ➠ el ∠ AOC es ....

m ∠AOD = ... ➠ el ∠ AOD es ....

Ejercicio 3 Aplica la propiedad del ∠llano para hallar la medida "x" que falta.



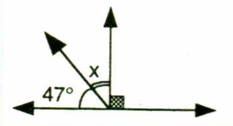
Resolución:

$x + 130^\circ = 180^\circ$

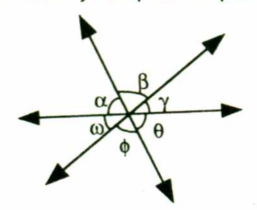
$x = 50^\circ$ **Rpta.**

Resolución:

iii) **Resolución:**



Ejercicio 2 Aplica la propiedad del ∠llano y del ∠de una vuelta y completa lo que falta.



i) .... $=180^\circ$

ii) $\alpha + \gamma + \theta = 180^\circ$

iii) .... $= 180^\circ$

iv) .... $=180^\circ$

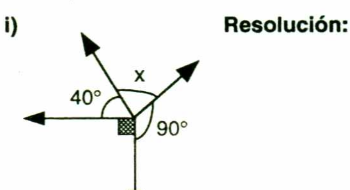
v) .... $=180^\circ$

vi) .... $=180^\circ$

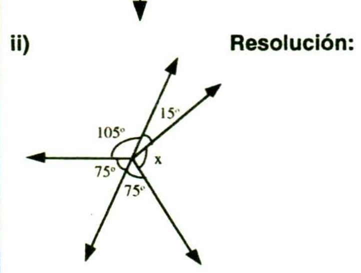
vii) $\alpha + \beta + \gamma + \theta + \phi + \omega =$

Ejercicio 4 Aplica la propiedad del ∠de una vuelta para hallar la medida "x" que falta.

i) **Resolución:**



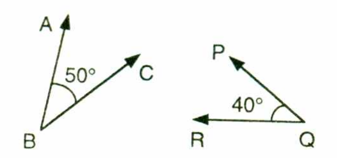
ii) **Resolución:**



B) Según la Comparación de sus medidas

. **Ángulos Complementarios.-** Son dos ángulos cuyas medidas suman 90º

Ejm:

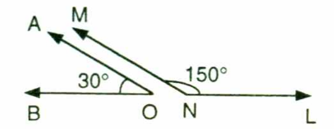


Los ángulos ABC y PQR son complementarios porque:

$m\angle ABC + m\angle PQR = 90^0$

. **Ángulos Suplementarios.-** Son dos ángulos cuyas medidas suman 180º

Ejm:



Los ángulos AOB y MNL son suplementarios porque:

$m\angle AOB + m\angle MNL = 180^o$

Complemento de un ángulo.-

Es lo que le falta a la medida de un ángulo para ser igual a 90º.

notación:

C_α: se lee "complemento de alfa"

Ejemplos:

$C_{10} = 90^o - 10^o = 80^o$; C_{100} = No existe

$C_{30} = 90^o - 30^o = 60^o$; $C_{90} = 0^o$

$C_\alpha = 90^o - \alpha$

NOTA.- Solo tienen complemento los ángulos positivos menores o iguales que 90º.

Suplemento de un ángulo.-

Es lo que le falta a la medida de un ángulo para ser igual a 180º.

notación

S_β: se lee "suplemento de beta"

Ejemplo:

$S_{45} = 180^o - 45^o = 135^o$; S_{190} = No existe

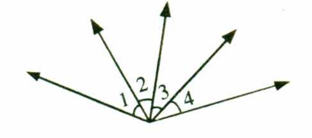
$S_{130} = 180^o - 130^o = 50^o$; $S_{180} = 0$

$S_\beta = 180^o - \beta$

NOTA.- Solo tienen suplemento los ángulos positivos menores o iguales que 180º.

C) Según sus vértices y lados

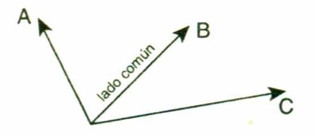
☞ **Angulos consecutivos.** Son varios ángulos que tienen el mismo vértice.



Los ángulos 1, 2, 3 y 4 son consecutivos.

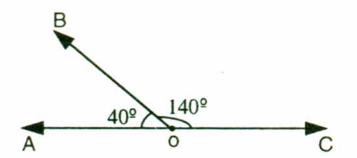
Caso particular: Cuando se trata sólo de dos ángulos consecutivos, se llaman ángulos adyacentes.

Ejm



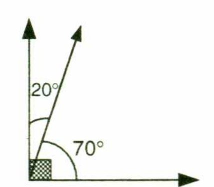
AOB y BOC son ángulos adyacentes

☞ **Ángulos Adyacentes Suplementarios.-** Son dos ángulos consecutivos cuyas medidas suman 180° . **Ejm:**



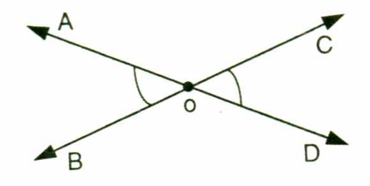
AOB y BOC son adyacentes suplementarios

☞ **Ángulos Adyacentes Complementarios.-** Son dos ángulos consecutivos cuyas medidas suman 90°. **Ejm:**



Los ángulos PQR y RQT son adyacentes complementarios

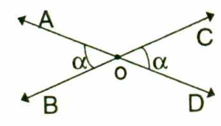
☞ **Ángulos Opuestos por el vértice.-** Son dos ángulos que tienen el mismo vertice y los lados de uno son las prolongaciones en sentido opuesto de los lados del otro. **Ejm:**



Los ángulos AOB y COD son opuestos por el vértice.

¡Atención!

Propiedad de los ángulos opuestos por el vértice
Los ángulos opuestos por el vértice
son congruentes.



$\angle AOB \cong \angle COD$

TALLER DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS Nº 74

Ejercicio 1 Aplicando la definición de complemento y suplemento, llenar la siguiente tabla

ANGULO	COMPLEMENTO	SUPLEMENTO
80º	10º	100º
40º		
105º	NO EXISTE	
112º		
22,5º	67,5º	
195º		
75º		

Ejercicio 2 Dado las siguientes medidas:

$\alpha = 30^\circ$; $\beta = 100^\circ$; $\gamma = 45^\circ$

Calcular:

Complemento de $\alpha \Rightarrow C_\alpha =$

Suplemento de $\beta \Rightarrow S_\beta =$

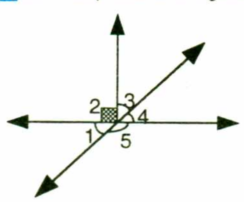
Complemento de $\gamma \Rightarrow C_\gamma =$

Suplemento de $(\alpha + \beta) \Rightarrow S_{(a+b)} = 180^\circ - (30^\circ + 100^\circ) = 50^\circ$

Complemento de $(\beta-\gamma) \Rightarrow C_{(\beta-\gamma)} =$

Suplemento de $2\alpha \Rightarrow S_{2\alpha} =$

Ejercicio 3 Con respecto a la figura:



Menciona a los siguientes pares de ángulos:

i) Adyacentes:

$\angle 1$ y $\angle 2$; $\angle 2$ y $\angle 3$; $\angle 3$ y $\angle 4$; $\angle 4$ y $\angle 5$; $\angle 5$ y $\angle 1$

ii) Adyacentes suplementarios:

....

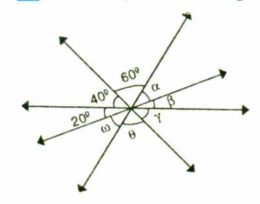
iii) Adyacentes complementarios:

....

iv) Opuestos por el vértice

....

Ejercicio 4 Con respecto a la figura:



llenar la tabla

	Valor del	Complemento	Suplemento
α			
β	20º		
γ		50º	
θ			120º
ω			

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ÁNGULOS

A: PLANTEO DE ECUACIONES CON COMPLEMENTO Y SUPLEMENTO.

Ejercicio 1 El complemento de un ángulo más el suplemento del mismo es igual a 250°. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

Resolución:

. El ángulo es x

. $C_x + S_x = 250°$

$(90° - x) + (180° - x) = 250°$

$-2x + 270° = 250°$

$-2x = -20°$

$x = 10°$ **Rpta.**

Ejercicio 2 El doble del complemento de "α" es igual al suplemento de 150°. Hallar "α".

Resolución:

. $2C_{\alpha} = S_{150}$

$2(90 - \alpha) = 30°$

$90° - \alpha = 15°$

$\alpha = 75°$ **Rpta.**

Ejercicio 3 La mitad del complemento de un ángulo, es igual al mismo ángulo. ¿Cuánto mide tal ángulo?

Resolución:

✳ El ángulo es "α"

✳ $1/2(90° - \alpha) = 30°$

$90° - \alpha = 15°$

$90° = 3\alpha$

$30° = \alpha$ **Rpta.**

Ejercicio 4 El doble de la medida de un ángulo, aumentado en el triple del complemento del mismo, equivale al doble del suplemento de tal ángulo, diminuido en 40°. Hallar la medida del ángulo mencionado.

Resolución:

.Sea la medida del ángulo "x"

$2x + 3(90° - x) = 2(180° - x) - 40°$

$2x + 270° - 3x = 360° - 2x - 40°$

$270° - x = 320° - 2x$

$x = 50°$ **Rpta.**

Ejercicio 5 Dos ángulos complementarios se diferencian en 40. ¿Cuánto mide cada uno de dichos ángulos?

Resolución:

. Sean la medida de los ángulos complementarios:

1er ángulo = α (mayor)

2do ángulo = 90° -α (menor)

Recuerda que: A cualquiera de los dos se le designa como el mayor.

. Del enunciado.

$\alpha - (90° - \alpha) = 40°$

$\alpha - 90° + \alpha = 40°$

$2\alpha = 130°$

$\alpha = 65°$

. Luego las medidas son

1er. ∠65° ; 2do. ∠25° **Rpta.**

Ejercicio 6 La tercera parte del suplemento de un ángulo es igual al complemento del doble del ángulo. Hallar la medida de dicho ángulo

Resolución

.El ángulo mide "x"

$$\frac{180° - x}{3} = 90° - 2x$$

$180° - x = 270° - 6x$

$5x = 90°$

$x = 18°$ **Rpta.**

Ejercicio 7 Un ángulo y su suplemento están en la relación de 1 a 4. Hallar el complemento de tal ángulo.

Resolución:

. El ángulo es "y"

$$\frac{y}{180^\circ - y} = \frac{1}{4}$$

$$4y = 180^\circ - y$$

$$5y = 180^\circ$$

$$y = 36^\circ$$

. Debemos hallar el complemento de "y"

$$C_y = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

Ejercicio 8 El complemento de "x", más el suplemento de "2x" es igual al doble del suplemento de "3x". Hallar "x"

Resolución:

. Traducimo el enunciado:

$$(90^\circ - x) + (180^\circ - 2x) = 2(180^\circ - 3x)$$

$$270^\circ - 3x = 360^\circ - 6x$$

$$3x = 90^\circ$$

$x = 30^\circ$ **Rpta.**

Ejercicio 9 La medida de un ángulo excede a su complemento en 28°. El ángulo mide:

Resolución:

. El ángulo mide "x"

$$x - (90^\circ - x) = 28^\circ$$

$$2x - 90^\circ = 28^\circ$$

$$2x = 118^\circ$$

Rpta. $x = 59^\circ$

Recuerda que:

Una cantidad "A" excede a otra "B" en:

A - B

El exceso de A sobre B es:

A - B

Ejercicio 10 El suplemento de un ángulo excede al complemento del doble de dicho ángulo, en 124°. ¿Cuánto mide el ángulo?

Resolución:

. El ángulo mide "α"

. Traduciendo el enunciado:

$$(180^\circ - \alpha) - (90^\circ - 2\alpha) = 124^\circ$$

$$90^\circ + \alpha = 124^\circ$$

$\alpha = 34^\circ$ **Rpta.**

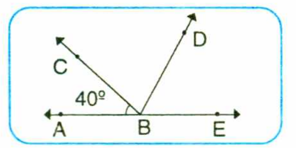
B. EJERCICIOS GRAFICOS DE ANGULOS

A continuación resolveremos ejercicios de situaciones problemáticas asociadas a los ángulos, expresadas en dibujos.

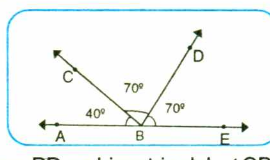
Ejercicio 1 En la figura:
BD es bisectriz del ∠CBE.

Hallar

i) m ∠CBD
ii) m ∠DBE
iii) m ∠ABD



Resolución:



✻ Como BD es bisectriz del ∠CBE, significa que:

m ∠CBD = m ∠DBE = 1/2 m ∠CBE ...(1)

✻ Por propiedad del ángulo llano:

40º + m ∠CBE = 180º

m ∠CBE = 140º ...(2)

✻ (2) en (1): m ∠CBD = m ∠DBE = 70º

Entonces:

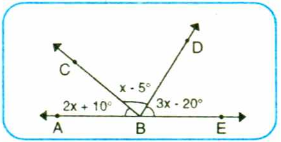
i) m ∠CBD = 70º

ii) m ∠DBE = 70º

iii) m ∠ABD = 40º + 70º = 110º **Rpta.**

Ejercicio 2 Apartir del siguiente dibujo, hallar "x" y luego.

i) m ∠ABC
ii) m ∠CBD
iii) m ∠DBE
iv) m ∠ABD
v) m ∠CBE

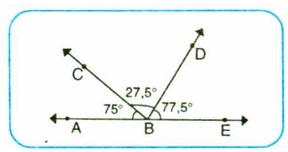


Resolución:

⚪ Como los $\angle_s$ ABC, CBD y DBE completan un llano, entonces:

(2x + 10º) + (x - 5º) + (3x + 20º) = 180º

6x -15º = 180º ➡ **x = 32,5º**



⚪ Reemplazamos

i) m ∠ABC = 2(32,5º) + 10º = **75º**

ii) m ∠CBD = 32º - 5º = **27,5º**

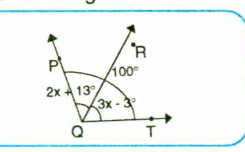
iii) m ∠DBE = 3(32,5º) - 20º = **77,5º**

iv) m ∠ABD =75º + 27,5º = **102,5º**

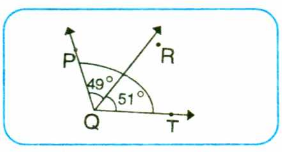
v) m ∠CBE = 27,5º + 77,5º = **105º**

Ejercicio 3 A partir de la figura hallar:

i) x
ii) m ∠PQR
iii) m ∠RQT



Resolución:



⚪ Por la propiedad de la suma de ángulos:

i) 2x + 13º + 3x - 3º = 100º

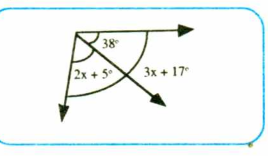
5x +10º = 100º ➡ **x = 18º**

ii) m ∠PQR = 2(18º) + 13º = **49º**

iii) m ∠RQT = 3(18º) - 3º = **51º** **Rpta.**

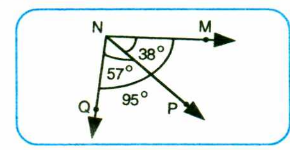
Ejercicio 4 Hallar:

i) x
ii) m ∠PNQ
iii) m ∠MNQ



Resolución:

⚪ Aplicamos la propiedad de la diferencia de ángulos:



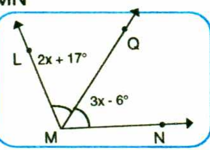
i) $(3x + 17^o) - (2x + 5^o) = 38^o$

$x + 12^o = 38^o$ ➠ $x = 26^o$

ii) $m\angle PNQ = 2(26^o) + 5^o =$ 57^o

iii) $m\angle MNQ = 3(26^o) + 17^o =$ 95^o **Rpta.**

Ejercicio 5 En la figura:
MQ es bisectriz del $\angle LMN$
Calcular:

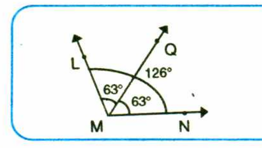


i) x

ii) $m\angle LMQ$, $m\angle QMN$

iii) $m\angle LMN$

Resolución:



❖ Por definición de bisectriz:

$m\angle LMQ = m\angle QMN$

$2x + 17^o = 3x - 6^o$ ➠ i) $x = 23^o$

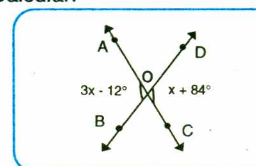
❖ Reemplazamos:

ii) $m\angle LMQ = 2(23^o) + 17^o =$ 63^o

$m\angle QMN = 3(23^o) - 6^o =$ 63^o

iii) $m\angle LMN = 63^o + 63^o =$ 126^o

Ejercicio 6 Calcular:

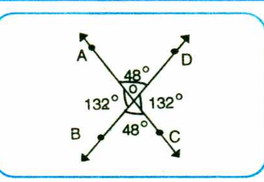


i) x
ii) $m\angle AOB$
$m\angle BOC$
$m\angle COD$
$m\angle AOD$

Resolución:

❖ Por la propiedad de los ángulos opuestos por el vértice:

$3x - 12^o = x + 84^o$ ➠ i) $x = 48^o$



❖ Reemplazamos:

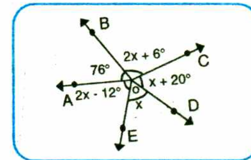
ii) $m\angle AOB = 3(48^o) - 12^o =$ 132^o

$m\angle BOC = 180^o - 132^o =$ 48^o

$m\angle COD = m\angle AOB =$ 132^o

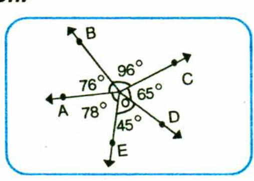
$m\angle AOD = m\angle BOC =$ 48^o **Rpta.**

Ejercicio 7 En el gráfico hallar:



i) $m\angle BOC$
ii) $m\angle COD$
iii) $m\angle DOE$
iv) $m\angle ADE$

Resolución:



❖ Por la propiedad del de una vuelta:

$76^o + (2x + 6^o) + (x + 20^o) + x + (2x - 12^o) = 360^o$

$6x + 90^o = 360^o$ ➠ $x = 45^o$

❖ Luego:

$m\angle BOC = 2(45^o) + 6^o =$ 96^o

$m\angle COD = 45^o + 20^o =$ 65^o

$m\angle DOE =$ 45^o

$m\angle AOE = 2(45^o) - 12^o =$ 78^o **Rpta.**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS

01 El complemento de "x" es 70°. Hallar x

A) 10° **B)** 20° **C)** 30° **D)** 40° **E)** 50°

02 Hallar la medida de un ángulo sabiendo que la suma de su complemento y suplemento es 190°

A) 30° **B)** 40° **C)** 50° **D)** 60° **E)** 70°

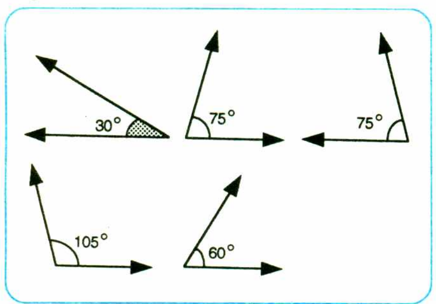
03 Si el suplemento de "2x" más el complemento de "x" es igual a "x". ¿Cuánto es el valor de "x"?

A) 22,5° **B)** 30° **C)** 45° **D)** 67,5° **E)** 60°

04 ¿En cuánto excede el suplemento de 80° al complemento de 30°?

A) 50° **B)** 40° **C)** 30° **D)** 20° **E)** 10°

05 Observa las medidas de los siguientes ángulos:



Se hacen las siguientes afirmaciones:

I) El ∠ABC y el ∠DEF son complementarios.

II) El ∠GHJ y el ∠MNL son suplementarios.

III) ∠DEF ≅ ∠GHJ

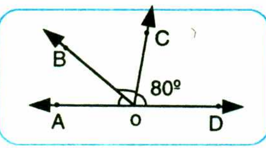
IV) El ∠ABC y el ∠PQR son complementario.

Cuál es falsa:

A) sólo I **B)** I y II **C)** I y II
D) I y IV **E)** Ninguna es falsa

06 En la figura OB es bisectriz del ∠AOC. Calcular m ∠AOB

A) 40°
B) 30°
C) 50°
D) 60°
E) 80°



07 Hallar el complemento de "x"

A) 70°
B) 20°
C) 10°
D) 40°
E) 45°

08 Hallar el suplemento de "α"

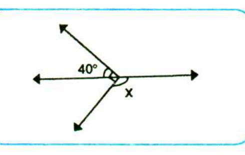
A) 10°
B) 140°
C) 170°
D) 160°
E) N.A.

09 Un ángulo, aumentado en 30°, es igual al doble su complemento. El ángulo mide.

A) 40° **B)** 45° **C)** 60° **D)** 50° **E)** 80°

10 Hallar "x"

A) 30°
B) 40°
C) 130°
D) 140°
E) 120°



En cada una de las siguientes figuras hallar el valor de "x"

11

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 36°
E) 45°

12

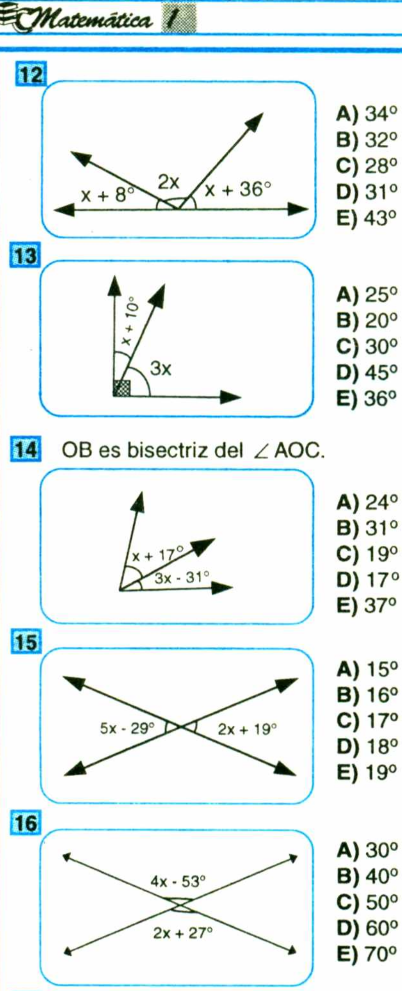
13

14 OB es bisectriz del ∠ AOC.

15

16

17



12. A) 34° B) 32° C) 28° D) 31° E) 43°

13. A) 25° B) 20° C) 30° D) 45° E) 36°

14. A) 24° B) 31° C) 19° D) 17° E) 37°

15. A) 15° B) 16° C) 17° D) 18° E) 19°

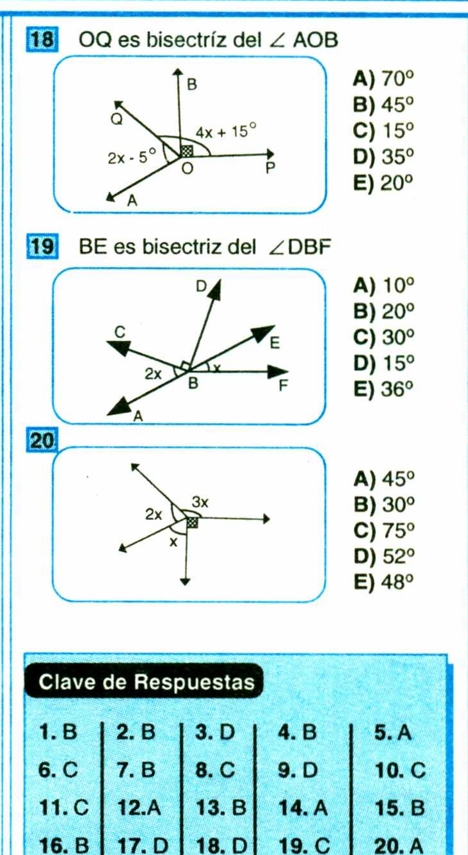
16. A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

17. A) 32,8° B) 22,4° C) 17,5° D) 47,6° E) 36,2°

18 OQ es bisectríz del ∠ AOB

19 BE es bisectriz del ∠DBF

20



18. A) 70° B) 45° C) 15° D) 35° E) 20°

19. A) 10° B) 20° C) 30° D) 15° E) 36°

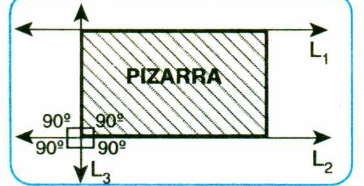
20. A) 45° B) 30° C) 75° D) 52° E) 48°

Clave de Respuestas

1. B	2. B	3. D	4. B	5. A
6. C	7. B	8. C	9. D	10. C
11. C	12. A	13. B	14. A	15. B
16. B	17. D	18. D	19. C	20. A

RECTAS PERPENDICULARES Y RECTAS PARALELAS

Consideremos a las rectas L_1, L_2 y L_3 que contienen imaginariamente a los lados de una pizarra. Se dice que:



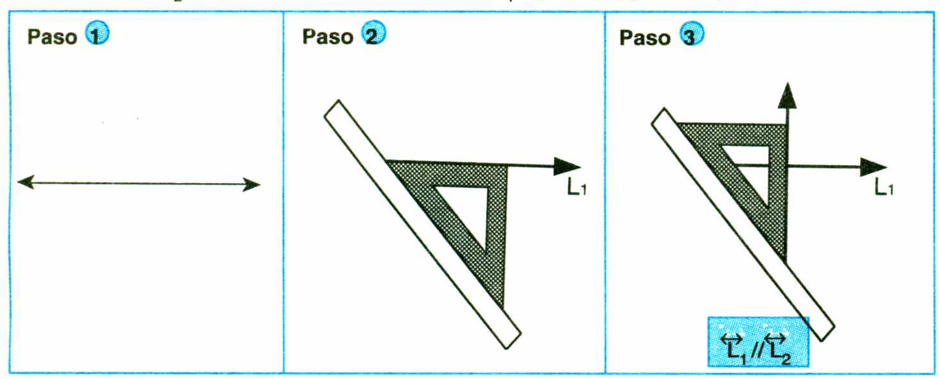
i) $\overleftrightarrow{L_1}$ es paralela a $\overleftrightarrow{L_2}$ lo cual se simboliza así: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

ii) $\overleftrightarrow{L_2}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{L_3}$, lo cual se simboliza así:
Entonces: $L_1 \perp L_2$

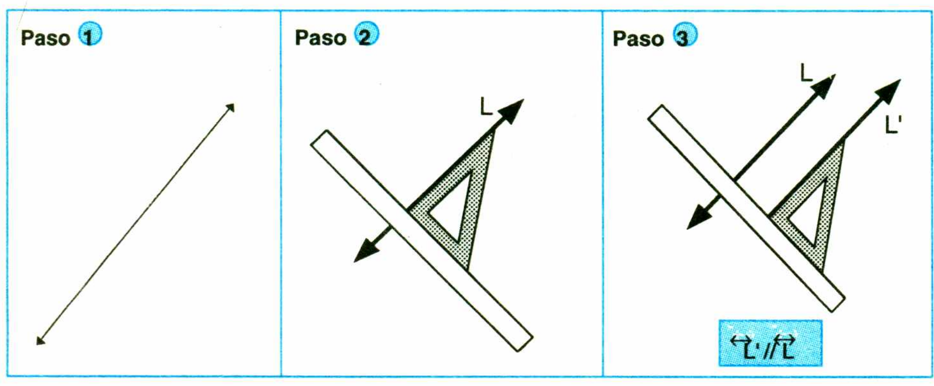
✍ 2 rectas en un plano son paralelas cuando por más que se prolonguen no llegan a cortarse.

✍ 2 rectas en un plano son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos rectos.

Para trazar dos rectas perpendiculares utiliza tu regla y escuadra. Por ejemplo, si desea trazar una recta L_2 perpendicular a una recta dada L_1 sigue los siguientes pasos:

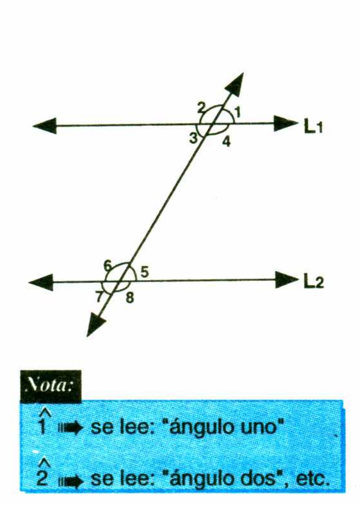


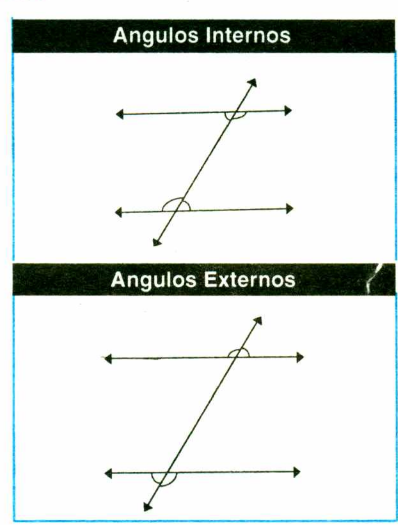
Para trazar una recta L' paralela a una recta dada L procede de la siguiente manera:



ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA RECTA SECANTE.

Dos rectas paralelas al ser cortadas por una tercera recta (llamada recta secante) determinan ángulos especiales por la posición de un respecto al otro.





Nota:

$\hat{1}$ ➡ se lee: "ángulo uno"

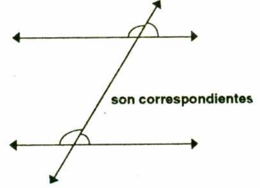
$\hat{2}$ ➡ se lee: "ángulo dos", etc.

Los cuatro ángulos determinados en la recta L_1 se relacionan con los cuatro ángulo determinados en L_2, formando parejas que reciben nombre específicos como **ángulos correspondientes, alternos y conjugados**. Es importante identificar tales parejas y conocer sus propiedades.

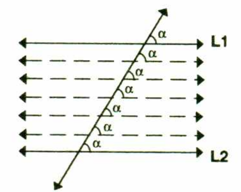
. **Ángulos Correspondientes.-** Son parejas de ángulos que ocupan posiciones análogas en cada una de las rutas paralelas. Son los siguientes:

(1;5), (2;6), (3;7), (4;8)

El ángulo 1 es correspondiente con el ángulo 5
El ángulo 2 es correspondiente con el ángulo 6, etc.



Si se trazan paralelas sucesivas a $\overleftrightarrow{L_1}$ hasta llegar a $\overleftrightarrow{L_2}$, se podrá comprobar que cada par de ángulo correspondientes son congruentes. Veamos:



Postulado de los ángulos correspondientes:

Los ángulos correspondientes son congruentes luego.

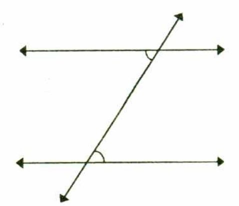
$\hat{1} \cong \hat{5};\ \hat{2} \cong \hat{6};\ \hat{3} \cong \hat{7};\ \hat{4} \cong \hat{8}$

Nota:

Se llama **Postulado** a aquella propiedad que se acepta sin previa demostración, debido a su evidencia. Las propiedades que se aceptan con demostración se llaman **Teoremas.**

Teniendo como punto de partida esta propiedad de los ángulo correspondientes fácilmente se puede llegar a verificar las propiedades que vienen a continuación.

. **Ángulos Alterno:** Observa el siguiente dibujo. Las parejas de ángulos alternos son las siguientes:



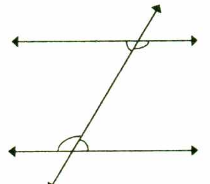
Alternos Internos: (3;5), (4;6)

Alternos Externos: (2;8), (1;7)

Propiedad: Los ángulo alternos son congruentes.

$\hat{3} \cong \hat{5};\ \hat{4} \cong \hat{6};\ \hat{1} \cong \hat{7};\ \hat{2} \cong \hat{8}$

. **Ángulos Conjugados.-** Son las siguientes parejas de ángulos.



Conjugados internos: (3;6), (4;5)

Conjugados externos: (2;7), (1;8)

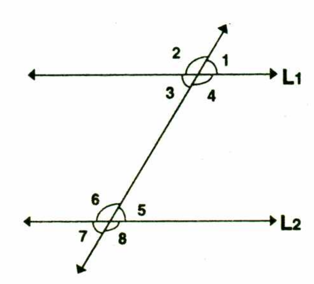
Propiedad: Los ángulos conjugados son suplementarios.

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$; $m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$

$m\angle 2 + m\angle 7 = 180^\circ$; $m\angle 1 + m\angle 8 = 180^\circ$

RESUMEN

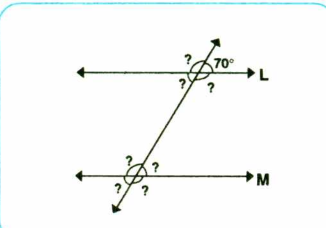
- **CORRESPONDIENTES.-** Son congruentes
  (1;5), (2;6), (3;7), (4;8)
- **ALTERNOS.-** Son congruentes
  - **Internos: (3;5), (4;6)**
  - **Externos: (2;8), (1;7)**
- **CONJUGADOS.-** Son suplementarios (sus medida suman 180)
  - **Internos: (3;6), (4;5)**
  - **Externos: (2;7), (1;8)**



NOTA: Si L_1 no es paralela a L_2 no se cumple ninguna de las propiedades mencionadas.

Actividad: Utilizando regla, escuadra y transportador comprueba que estas propiedades, efectivamente se cumplen.

Ejemplo: A partir de la siguiente figura, calcula todos los ángulos que faltan, L // M



Resolución:

* En primer lugar hallamos los triángulos que faltan en la recta L.

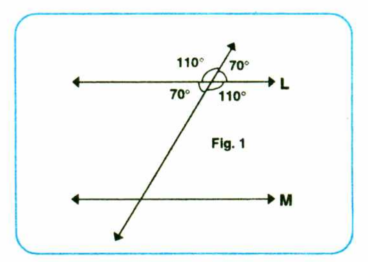


Fig. 1

* Luego aplicamos la propiedad de los ángulo correspondientes.

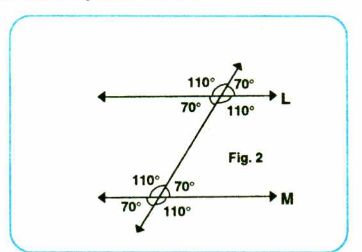


Fig. 2

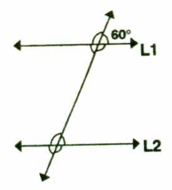
Comprueba que en la **f ig. 2** se cumplen las otras propiedades de los ángulos alternos y los ángulos conjugados

TALLER DE EJERCICIOS Nº 75

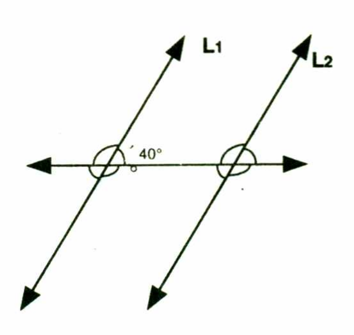
En cada figura: $L_1 // L_2$

A Aplicando las propiedades que conoces, calcula todos los ángulos que faltan.

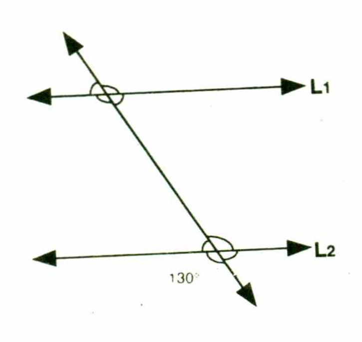
Ejercicio 1



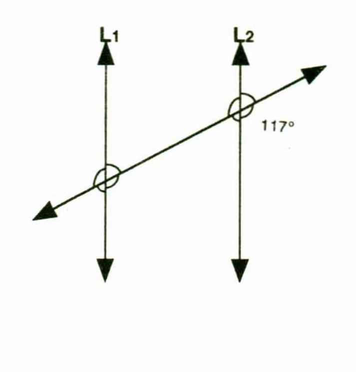
Ejercicio 3



Ejercicio 2

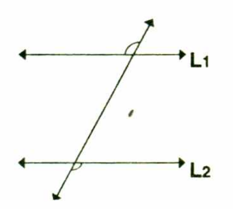


Ejercicio 4



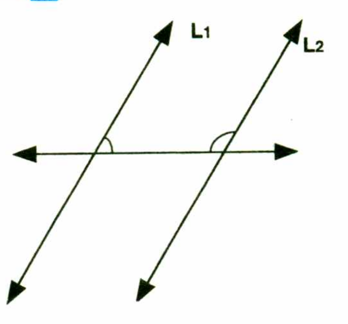
B Identifica qué tipo de parejas son los ángulos "marcados" y escribe la propiedad que le corresponde.

Ejercicio 5



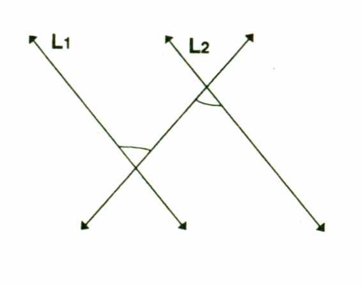
Rpta. ángulos alternos externos, son congruentes

Ejercicio 6



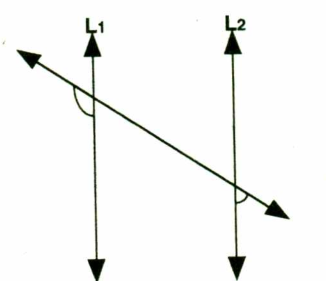
Rpta. ....

Ejercicio 7



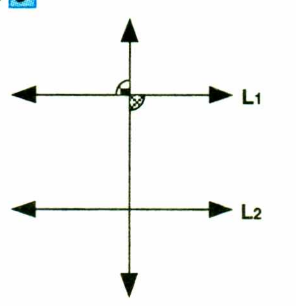
Rpta. ....

Ejercicio 8



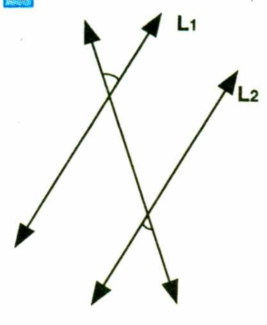
Rpta. ....

Ejercicio 9



Rpta. ....

Ejercicio 10



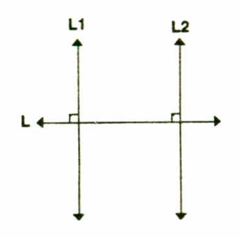
Rpta. ....

PROPIEDAD DE LAS RECTAS PERPENDICULARES Y PARALELAS

1ra. Propiedad: Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

Si: $L_1 \perp L$ y $L_2 \perp L$

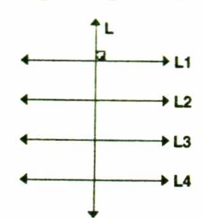
entonces: $L_1 // L_2$



2da. Propiedad: Si una recta es perpendicualr a otra, es también perpendicualr a todas las paralelas a ella.

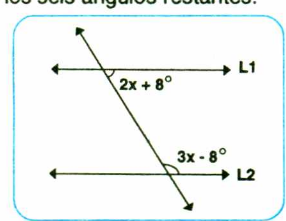
Si: $L \perp L_1$ y $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$

Entonces: $L \perp L_2$; $L \perp L_3$; $L \perp L_4$



EJERCICIOS GRAFICOS RESUELTOS

Ejercicio 1 Del gráfico $L_1 // L_2$ Hallar "x" y luego los seis ángulos restantes.



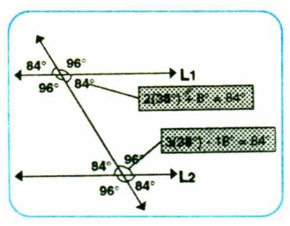
Resolución:

✳ Por ser ángulos conjugados internos:

$2x + 8^o + 3x - 18^o = 180^o$

$5x = 190^o$ ➠ $x = 38^o$

✳ Reemplazamos y el valor de "x" por 38° y hallamos los ángulos restantes.



Ejercicio 2 Del gráfico L // M. Hallar:

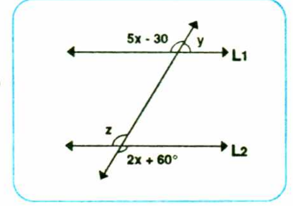
i) El valor de "x"

ii) El valor de "y"

iii) El valor de "z"

iv) y + z

v) x + y + z



Resolución:

✳ En primer lugar hallamos "x". Por ser ángulos alternos externos:

$5x - 30^o = 2x + 60^o$

$3x = 90^o$ ➠ i) $x = 30^o$

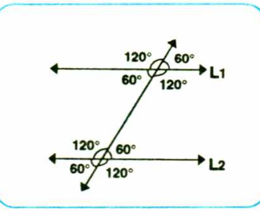
Reemplazamos en la figura:

✳ Luego:

ii) $y = 60^o$

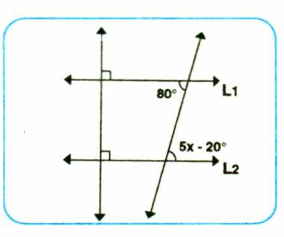
iii) $z = 120^o$

iv) $y + z = 180^o$



v) $x + y + z = 30^o + 60^o + 120^o = 210^o$ **Rpta.**

Ejercicio 3 En la figura $L_1 \perp L$ y $L_2 \perp L$ Hallar "x"

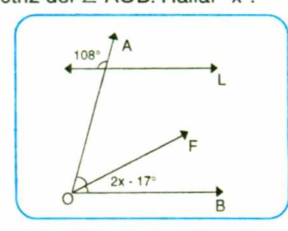


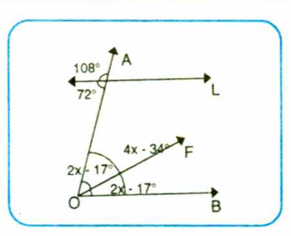
Resolución:

- Por la **1ra propiedad:** $L_1 // L_2$
- Por ser ángulos alternos internos:

$5x - 20° = 80° \Rightarrow 5x = 100° \Rightarrow$ **$x = 20°$ Rpta.**

Ejercicio 4 En la figura L // OB y además OF es bisectriz del ∠ AOB. Hallar "x".





Resolución:

Por ser ángulos alternos internos.

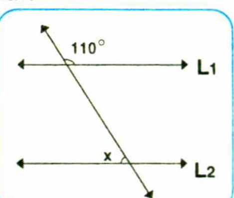
$4x - 34° = 72°$

$4x = 106° \Rightarrow$ **$x = 26,5°$** **Rpta.**

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE ÁNGULOS FORMADOS POR DOS PARALELAS Y UNA SECANTE

Ejercicio 1 $L_1 // L_2$. Hallar "x"

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



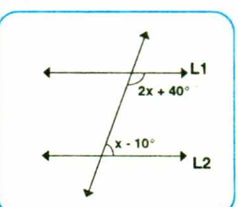
Ejercicio 2 m // n. Hallar "α"

A) 63°
B) 117°
C) 113°
D) 80°
E) 108°

117°
L1
α
L2

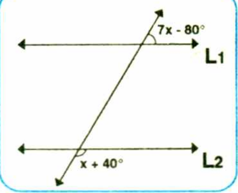
Ejercicio 3 $L_1 // L_2$. Hallar "x"

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



Ejercicio 4 L // L' hallar "x"

A) 22,5°
B) 30°
C) 15°
D) 18°
E) 27,5°

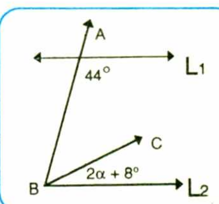


Ejercicio 5 AB // CD. Hallar "θ"

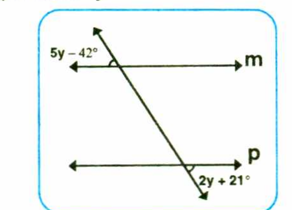
A) 45°
B) 15°
C) 30°
D) 37°
E) 53°

Ejercicio 6 $L_1 // L_2$ y AB es bisectriz. Hallar "α"

A) 6°
B) 7°
C) 8°
D) 9°
E) 10°



Ejercicio 7 m // p. Hallar "y"

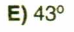


A) 33°

B) 29°

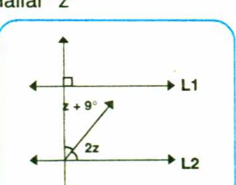
C) 17°

D) 21°



E) 43°

Ejercicio 8 L_1// L_2. Hallar "z"



A) 32°

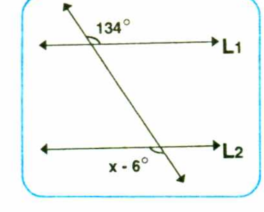
B) 27°

C) 41°

D) 24°

E) 21°

Ejercicio 9 L_1// L_2. Hallar "x"



A) 128°

B) 132°

C) 140°

D) 142°

E) 146°

Ejercicio 10 r // s. Hallar "y"

A) 143°

B) 137°

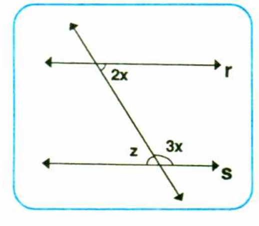
C) 129°

D) 156°

E) 134°

y
r
2x + 5°
x - 32°
s

Ejercicio 11 Calcular "z" sí r // s



A) 36°

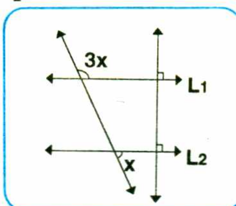
B) 48°

C) 72°

D) 24°

E) 64°

Ejercicio 12 $L_1 \perp L$ y $L_2 \perp L$. Hallar "x"



A) 30°

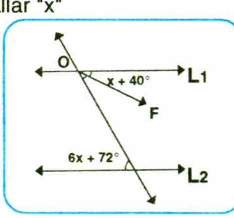
B) 40°

C) 45°

D) 75°

E) 37°

Ejercicio 13 Las rectas L_1 y L_2 son paralelas y OF es bisectriz. Hallar "x"



A) 1°

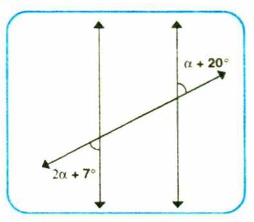
B) 2°

C) 3°

D) 4°

E) 5°

Ejercicio 14 m // n. Hallar "α"



A) 12°

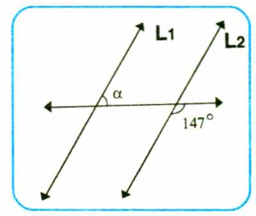
B) 13°

C) 14°

D) 15°

E) 16°

Ejercicio 15 m // n. Hallar "α"



A) 31°

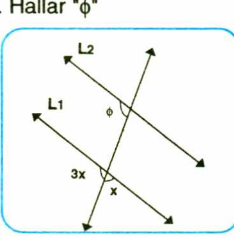
B) 33°

C) 35°

D) 37°

E) 39°

Ejercicios 16 m // n. Hallar "φ"



A) 45°

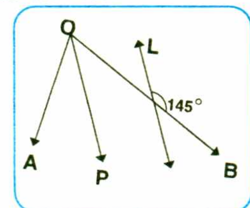
B) 130°

C) 132°

D) 135°

E) 145°

Ejercicio 17 OP es bisectriz del ∠AOB y además OP // L. Hallar m ∠AOB



A) 70°

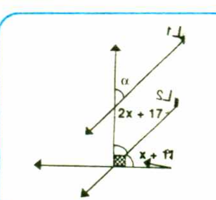
B) 80°

C) 65°

D) 100°

E) 60°

Ejercicio 18 L_1// L_2. Hallar "α"



A) 33°

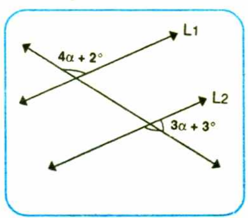
B) 57°

C) 63°

D) 53°

E) 37°

Ejercicio 19 L_1// L_2. Hallar "β"



A) 90°

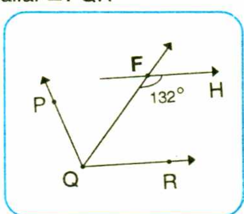
B) 132°

C) 102°

D) 106°

E) 112°

Ejercicio 20 QF es bisectriz del ∠PQR. Además: FH // QR. Hallar ∠PQR



A) 96°

B) 98°

C) 100°

D) 102°

E) 104°

Clave de Respuestas

1. D	**2.** B	**3.** C	**4.** E	**5.** D
6. B	**7.** D	**8.** B	**9.** C	**10.** A
11. C	**12.** C	**13.** B	**14.** B	**15.** B
16. D	**17.** A	**18.** B	**19.** C	**20.** A

Se terminó de Imprimir en Febrero de 1998
en los Talleres Gráficos de
EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda.
RUC Nº 29534659
Jr. Las Verdolagas Nº 199 - Urb. Micaela Bastidas
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949

Impreso en EDITORIAL MONTERRICO S.A.